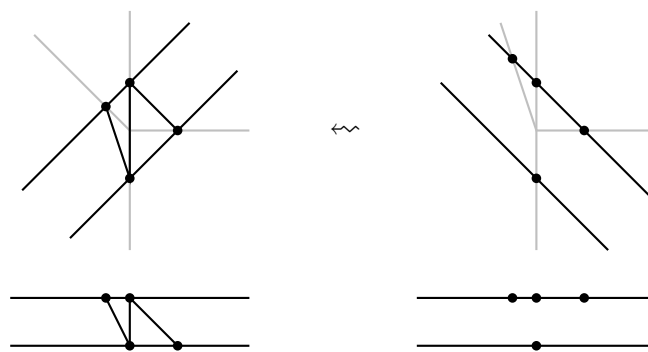


Exzeptionelle Folgen in der torischen Geometrie

Andreas Hochenegger

Dissertation



eingereicht am

Fachbereich Mathematik und Informatik
der freien Universität Berlin

2010

Die vorliegende Dissertation wurde von Prof. Dr. Klaus Altmann betreut.

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere, diese Dissertation selbständig verfaßt, alle verwendeten Hilfsmittel sowie Hilfen angegeben und die Arbeit nicht in einem früheren Promotionsverfahren eingereicht zu haben.

Andreas Hochenegger, Berlin am 25. Mai 2011.

1. Gutachter: Prof. Dr. Klaus Altmann
2. Gutachter: Prof. Dr. Lutz Hille

Datum der Disputation: 24. Mai 2011

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	v
Kapitel 1. Torische Geometrie	1
1. Torische Varietäten und T -Varietäten	1
2. Torische Flächen und rationale \mathbb{C}^* -Flächen	5
Kapitel 2. T -Deformation rationaler \mathbb{C}^* -Flächen	17
3. T -Deformationen	17
4. Degenerationsdiagramme	19
5. T -Deformationen und Geradenbündel	26
Kapitel 3. Exzeptionelle Folgen und torische Systeme	31
6. Derivierte Kategorien und exzeptionelle Folgen	31
7. Torische Systeme	32
8. Augmentation	39
Kapitel 4. Exzeptionelle Folgen und T -Degeneration	43
9. Exzeptionelle Folgen unter T -Degeneration	43
10. Alle exzeptionellen Folgen sind im Falle $\rho = 3, 4$ konstruierbar	47
11. Gegenbeispiel für $\rho = 5$	64
Kapitel 5. Kawamata, Borisov, Chen und Smith	67
12. Der Vorschub auf torischen Stacks	73
13. Quasi-gewichtete, projektive Räume	76
14. Mori-Faserung	84
Anhang A. Rechnerhilfe	91
1. Nachweis der Konstruierbarkeit	91
2. Kohomologieberechnung	99
Abbildungsverzeichnis	103
Literaturverzeichnis	105
Zusammenfassung	107

Einleitung

Wie in vielen Teilen der Mathematik ist auch in der algebraischen Geometrie die Konstruktion von Invarianten von zentraler Bedeutung. Eine dieser Invarianten ist die *derivierte Kategorie* $\mathcal{D}^b(X)$ einer Varietät X . Die derivierte Kategorie entstand ursprünglich als Struktur, in der sich viele homologische Konstruktionen wesentlich einfacher und knapper formulieren lassen. Für eine gewisse Zeit wurde dieser technische Vorteil als wesentliche Eigenschaft dieser Kategorie erachtet. Mittlerweile entwickelte sich aber aus ihr selbst ein interessanter, mathematischer Forschungsgegenstand.

Zum einen wurde von Bondal und Orlov nachgewiesen, daß die derivierte Kategorie Fano Varietäten und solche vom allgemeinen Typ eindeutig bestimmt. In all diesen Fällen kann die Varietät sogar aus der Kategorie rekonstruiert werden. Für Varietäten, die nicht darunter fallen, wurden auch viele interessante Resultate erzielt. Mukai konnte zeigen, daß eine abelsche Varietät A und ihr Dual \hat{A} äquivalente derivierte Kategorien aufweisen. Bridgeland zeigte diese Aussage für Dreifaltigkeiten, die über einen Flop miteinander verbunden sind.

Schlußendlich möchte ich noch die Spiegelsymmetrie anführen, die ihren Weg aus der Physik in die Mathematik gefunden hat. Diese wurde von Kontsevich als homologische Spiegelsymmetrie formuliert. Seine Vermutung, die in einigen Fällen bewiesen werden konnte, besagt, daß zwei Varietäten X und Y spiegelsymmetrisch sind, wenn die derivierte Kategorie von X äquivalent zur Fukaya Kategorie von Y ist, und umgekehrt. Etwas informeller besagt diese Vermutung, daß die komplexe Geometrie von X der symplektischen Geometrie von Y entspricht, und umgekehrt.

Diese Beispiele sollen belegen, daß ein tieferes Verständnis der derivierten Kategorie der Beantwortung einer Vielzahl von mathematischen Fragen dienlich sein kann. Dieses Verständnis soll durch das Studium *exzeptioneller Folgen* gefördert werden. Diese bilden vom Wesen her eine „Basis“ der derivierten Kategorie, die in einem sehr präzisen Sinne (semi-)orthogonal ist.

Ein Leitmotiv dieser Arbeit ist die Konstruktion dieser Folgen. Genauer gilt es zu klären, wie man aus einer exzeptionellen Folge \mathcal{E} auf X eine weitere solche Folge auf Y konstruiert werden kann, sofern X und Y miteinander verbunden sind. Diese Verbindung kann beispielsweise eine Aufblasung sein, eine Faserung oder auch eine Degeneration. Selbst die Einschränkung der Verbindung auf diese Auswahl erleichtert die Beantwortung dieser Frage noch nicht sehr. Deswegen schränke ich mich zusätzlich auf torische Varietäten ein. Diese lassen sich kombinatorisch vollständig beschreiben, was viele Berechnungen ungemein erleichtert.

Ich möchte nun einen Überblick über die einzelnen Kapitel geben.

Das erste Kapitel widmet sich den Grundlagen torischer Geometrie. Ich werde dabei keine umfassende Einführung geben, sondern Punkte herausgreifen und beleuchten, die für die nachfolgenden Kapitel wichtig sind. Diese Punkte umfassen

neben torischen Varietäten selbst, auch deren Verallgemeinerung zu T -Varietäten. Da sich ein Großteil der Arbeit ausschließlich mit Flächen beschäftigt, werde ich diverse Möglichkeiten vorstellen, wie sich diese beschreiben lassen.

In den Kapiteln 2 bis 4 werde ich exzeptionelle Folgen aus Geradenbündeln auf torischen Flächen genauer untersuchen. Der Ausgangspunkt meiner Überlegungen ist die Arbeit [HP08], in der Lutz Hille und Markus Perling unter anderem einer exzeptionellen Folge auf einer rationalen Fläche eine torische Fläche zuordnen. Alexei Bondal vermutete, daß diese Zuordnung eventuell einer Degeneration der rationalen Fläche zu einer torischen entsprechen könnte. Dank Nathan Iltens Arbeit zur Deformation rationaler \mathbb{C}^* -Flächen, die gewisse Deformationen sehr explizit beschreibt, ließ ich mich von dieser Vermutung lose leiten.

Im zweiten Kapitel gehe ich genauer auf diese Deformationen rationaler \mathbb{C}^* -Flächen ein, wie sie von Nathan Iltens in [HI09] entwickelt wurden. Zusätzlich konnte er zeigen, daß diese Deformationen im Falle glatter Flächen einen Isomorphismus der Picardgruppen induzieren. Sowohl diese Deformationen wie auch dieser Isomorphismus können sehr explizit beschrieben werden, was ich in diesem Kapitel auch vorstellen werde.

Im dritten Kapitel wird die in [HP08] entwickelte Zuordnung einer torischen Fläche zu einer exzeptionellen Folge vorgestellt. Eine weitere, wichtige Konstruktion aus diesem Artikel ist die *Augmentation*, die es erlaubt, eine volle, exzeptionelle Folge auf einer rationalen Fläche zu einer vollen, exzeptionellen Folge auf einer Aufblasung fortzusetzen. Außerdem werde ich noch beleuchten, wie verschiedene exzeptionelle Folgen, denen sich dieselbe torische Fläche zuordnen läßt, miteinander verbunden sind.

Im vierten Kapitel werden die schon bekannten Ergebnisse aus dem zweiten und dritten Kapitel miteinander verbunden. Zunächst untersuche ich dort das Verhalten von exzeptionellen Folgen unter den speziellen Deformationen und Degenerationen aus Kapitel 2. Rationale Flächen, die nicht isomorph zum \mathbb{P}^2 sind, lassen sich stets zu einer Hirzebruchfläche \mathcal{F}_r abblasen. Da es durch die Augmentation eine der Aufblasung ähnliche Konstruktion gibt, stellt sich nun die Frage, ob alle exzeptionellen Folgen *konstruierbar* sind, das heißt, sich durch sukzessives Augmentieren aus einer exzeptionellen Folge auf einer Hirzebruchfläche herstellen lassen.

THEOREM. *Sei X eine glatte, projektive, torische Fläche vom Picardrang 3 oder 4. Dann sind alle vollen, exzeptionellen Folgen aus Geradenbündeln auf X konstruierbar. Für den Picardrang 5 ist diese Aussage falsch, das heißt, es gibt eine solche Fläche mit einer vollen, exzeptionellen Folge aus Geradenbündeln, welche nicht konstruierbar ist.*

Das abschließende fünfte Kapitel hebt sich insofern von den vorherigen Kapiteln ab, als nicht mehr torische Flächen sondern torische Stacks untersucht werden. In dem Artikel [Kaw06] zeigte Yujiro Kawamata unter Verwendung des Minimal Model Programms, daß jede torische Orbifaltigkeit eine exzeptionelle Folge besitzt. Der Beweis ist recht algorithmisch und liefert als Resultat eine volle exzeptionelle Folge, die im Allgemeinen nicht mehr aus Geradenbündeln besteht. Lev Borisov, Linda Chen und Gregory Smith haben im Artikel [BCS05] eine Beschreibung torischer Deligne-Mumford Stacks vorgestellt, welche die Cox-Konstruktion in natürlicher Weise verallgemeinert. In diesem letzten Kapitel werde ich einen Teil von [Kaw06] in die Sprache von [BCS05] „übersetzen“. Auch wenn ich versucht habe, mich

möglichst nahe am Artikel [Kaw06] zu halten, werde ich doch in manchen Punkten davon abweichen. Diese Abweichungen werden in der Hoffnung gemacht, daß dadurch der Artikel [Kaw06] zugänglicher wird.

Danksagung

Ohne die Unterstützung einer Vielzahl von Menschen hätte diese Doktorarbeit nicht in dieser Form entstehen können, wofür ich mich hier herzlich bedanken möchte.

An erster Stelle möchte ich meinem Doktorvater Klaus Altmann danken – nicht nur für seine Betreuung, sondern auch dafür, daß er stets ein offenes Ohr für die Probleme hatte, die im Zuge einer solchen Arbeit auftreten. Es war stets eine Freude mit ihm zu diskutieren. Daraus ergaben sich oft wichtige Impulse für meine Arbeit.

Auch möchte ich mich bei Lutz Hille, Norbert Hoffmann, Nathan Ilten, Lars Petersen, David Ploog, Hendrik Süß und Robert Vollmert dafür bedanken, daß sie mir bei Fragen mit ihrem Fachwissen weiterhalfen bzw. sich geduldig und interessiert meine mathematischen Gedanken angehört haben.

Doch der Mensch lebt nicht nur vom (mathematischen) Brot allein. Der kollegiale bis freundschaftliche Umgang innerhalb der Arbeitsgruppe „algebraische Geometrie“ und zu den Arbeitsgruppen „komplexe Analysis“ und „Gitterpolytope“ trug wesentlich zur Entstehung dieser Arbeit bei.

Als Belege für diesen Umgang zähle ich den stetigen Strom an Keksen aus dem Hause Merz (Danke!), Gespräche abseits der Mathematik während des gemeinsamen Gangs zur Mensa, die des öfteren auch ins Absurde abdrifteten, und, sofern es die Witterung zuließ, die ein oder andere Schneeballschlacht.

Das alles schuf eine äußerst angenehme Atmosphäre. Zwar wage ich nicht zu behaupten, daß dadurch unmittelbar die Produktivität gesteigert wurde. Aber die Arbeit an meiner Dissertation war sicherlich nicht eine Aneinanderreihung bahnbrechender mathematischer Erfolge, sondern ließ mich doch einige Male an meinen Fähigkeiten zweifeln. In solchen Situationen war es genau dieser freundschaftliche Rahmen, der mir wieder neuen Elan verlieh.

Zu guter Letzt möchte ich noch meinen Eltern, Geschwistern und meinen Freunden in Tirol danken, für ihre Unterstützung und dafür, daß sie stets an mich glaubten.

Torische Geometrie

In diesem Kapitel werde ich jene Elemente der torischen Geometrie einführen und kurz beleuchten, die im Rest der Arbeit ausgiebig Verwendung finden.

Nach der Definition einer torischen Varietät und deren Verallgemeinerung zur T -Varietät werde ich mich mit dem Flächenfall eingehender beschäftigen. Dabei werden mir einfache Beschreibungen von Divisoren und von der Aufblasung besonders am Herzen liegen.

Quellenangabe: Für die Theorie torischer Varietäten habe ich auf die Bücher [Ful93], [Oda88], [Dan78] und [CLS11] zurückgegriffen. Die Theorie von T -Varietäten wird in [AHS08] entwickelt. Der Spezialfall rationaler \mathbb{C}^* -Flächen wird eingehender in [Süß08], [Tim06] und [OW77] beschrieben. Zur Moritheorie rationaler Flächen fand ich die Bücher [Mat02] und [Man86] hilfreich.

1. Torische Varietäten und T -Varietäten

Ich werde hier nur die in der restlichen Arbeit verwendeten Notationen einführen und grundlegende Tatsachen der torischen Geometrie zitieren. Die Details zu torischen Varietäten lassen sich in jedem Buch zu diesem Thema nachlesen, deswegen werde ich auf genaue Referenzen verzichten. Ich gehe außerdem kurz auf die Verallgemeinerung zu T -Varietäten ein, wobei ich auch für genauere Ausführungen auf Literatur verweise.

Torische Varietäten. Seien M und N zwei duale Gitter, das heißt, $M = N^* = \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$. Diese Gitter sollen frei sein, das heißt, es gibt einen Isomorphismus $N \cong \mathbb{Z}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Ein (polyedrischer) Kegel $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}} = N \otimes \mathbb{Q}$ ist die positive Hülle endlich vieler Vektoren $v_i \in N$, also

$$\sigma = \sum_i \{\lambda_i \cdot v_i \in N_{\mathbb{Q}} \mid \lambda_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}\} =: \sum_i \mathbb{Q}_+ \cdot v_i$$

Ein Kegel kann andererseits auch als Durchschnitt von Halbräumen geschrieben werden, das heißt, es gibt endlich viele $u_i \in M$, sodaß

$$\sigma = \bigcap_i \{v \in N_{\mathbb{Q}} \mid \langle u_i, v \rangle \geq 0\} =: \bigcap_i H^+(u_i).$$

Der *duale Kegel* $\sigma^{\vee} \subset M_{\mathbb{Q}}$ ist durch Vertauschen der Rollen von v_i und u_i definiert, das heißt

$$\sigma^{\vee} = \sum_i \mathbb{Q}_+ \cdot u_i = \bigcap_i H^+(v_i).$$

Für ein Beispiel siehe Abbildung 1.

Die *Dimension* $\dim(\sigma)$ von σ ist die Dimension des Untervektorraums in $N_{\mathbb{Q}}$, der von σ aufgespannt wird. Eine *Seite* von σ ist

$$\tau = \sigma \cap H^+(u)$$

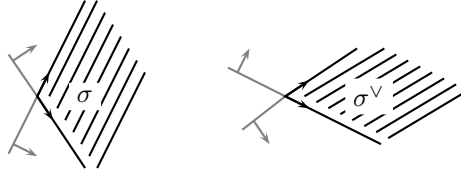


ABBILDUNG 1. Zwei zueinander duale Kegel.

für ein $u \in M$. Wir schreiben dann $\tau \prec \sigma$. Ein eindimensionaler Kegel heißt *Strahl*.

Ein *Fächer* Σ in N ist eine endliche Menge von Kegeln σ in $N_{\mathbb{Q}}$, die folgendermaßen zueinander passen sollen:

- (1) seien σ_1 und σ_2 Kegel in Σ , dann ist $\sigma_1 \cap \sigma_2$ sowohl eine Seite von σ_1 also auch von σ_2 , und
- (2) sei τ eine Seite von σ und $\sigma \in \Sigma$, dann ist auch $\tau \in \Sigma$.

Mit $\Sigma(i)$ bezeichnen wir die i -dimensionalen Kegel in Σ . Zwischen σ und dem davon erzeugten Fächer, welcher aus σ und dessen Seiten besteht, werden wir nicht unterscheiden.

DEFINITION 1.1 (+ Proposition). Gegeben sei ein Fächer Σ in N . Durch $\sigma \in \Sigma(i)$ ist eine normale *affine torische Varietät* durch

$$U(\sigma) = \text{Spec } \mathbb{C}[\sigma^{\vee} \cap M]$$

gegeben. Sei $\tau \prec \sigma \in \Sigma$, das läßt sich in eine offene Einbettung

$$\text{Spec } \mathbb{C}[\tau^{\vee} \cap M] \hookrightarrow \text{Spec } \mathbb{C}[\sigma^{\vee} \cap M]$$

übersetzen. Diese Einbettungen verkleben zu einer (separierten) *torischen Varietät* $X(\Sigma)$. Es ist $\dim X(\Sigma) = \dim N = n$.

Da $\{0\}$ ein Kegel in jedem Fächer ist, wird der (algebraische) *Torus*

$$T = T_N = \text{Spec } \mathbb{C}[\{0\}^{\vee} \cap M] = \text{Spec } \mathbb{C}[M] \cong (\mathbb{C}^*)^n$$

eine offene und dichte Teilmenge einer jeden torischen Varietät. Ich möchte noch anmerken, daß statt diesen speziellen Halbgruppen $\sigma^{\vee} \cap M$ auch allgemeinere Halbgruppen in M als Ausgangspunkt gewählt werden können. Sobald aber M nicht mehr von diesem speziellen Typ ist, geht die Normalität verloren.

DEFINITION 1.2 (+ Proposition). Gegeben sei ein Fächer Σ in N , sowie ein weiterer Fächer Σ' in N' . Ein Morphismus $\phi : X(\Sigma) \rightarrow X(\Sigma')$ heißt *torisch*, falls $\phi(T) \subseteq T'$, und die Einschränkung von ϕ auf die Tori ein Gruppenhomomorphismus ist.

Ein torischer Morphismus ϕ wird durch eine \mathbb{Z} -lineare Abbildung $f : N \rightarrow N'$ bereits vollständig bestimmt, die jeden Kegel von Σ in einen Kegel von Σ' abbildet, das heißt, zu jedem Kegel $\sigma \in \Sigma$ gibt es einen Kegel $\sigma' \in \Sigma'$ mit $f(\sigma) \subseteq \sigma'$.

Viele Eigenschaften einer torischen Varietät lassen sich leicht am Fächer ablesen.

PROPOSITION 1.3. Sei Σ ein Fächer in N . Im folgenden seien v_i die primitiven Erzeuger der Strahlen eines gegebenen Kegels $\sigma \in \Sigma$. Dann gilt:

- (1) $X(\Sigma)$ weist genau dann höchstens Quotientensingularitäten auf, wenn der Fächer simplicial ist, das heißt, v_i von jedem Kegel $\sigma \in \Sigma$ sind linear unabhängig, mit anderen Worten, die v_i bilden eine Basis des von σ in $N_{\mathbb{Q}}$ erzeugten Untervektorraums,
- (2) $X(\Sigma)$ ist genau dann glatt, wenn der Fächer glatt ist, das heißt, die v_i eines jeden Kegels σ bilden eine Gitterbasis des von $\sigma \cap N$ erzeugten Untergitters,
- (3) $X(\Sigma)$ ist genau dann vollständig, wenn der Fächer vollständig ist, das heißt, $|\Sigma| = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma = N_{\mathbb{Q}}$, und
- (4) $X(\Sigma)$ ist genau dann projektiv, wenn der Fächer der Normalenfächer zu einem Polytop ist.

T-Bahnen. Durch einen Kegel $\sigma \in \Sigma$ ist nicht nur eine offene Teilmenge von $X(\Sigma)$ gegeben, sondern es läßt sich daraus auch eine T -Bahn gewinnen.

Zunächst können wir aus einem Kegel σ zwei duale Gitter gewinnen:

$$N(\sigma) = N / N_{\sigma} \quad \text{und} \quad M(\sigma) = \sigma^{\perp} \cap M,$$

wobei N_{σ} das Untergitter $\sigma \cap N$ von N ist. Durch die Projektion $N \rightarrow N(\sigma)$ erhalten wir einen Fächer

$$\text{Star}(\sigma) = \{\bar{\tau} \subseteq N(\sigma) \mid \tau \prec \sigma\}.$$

Die torische Varietät $X(\text{Star}(\sigma))$ ist der Abschluß $V(\sigma) := \overline{\text{o}(\sigma)}$ der Bahn $\text{o}(\sigma) = T_{N(\sigma)}$. Um diese Bezeichnung zu rechtfertigen, wird eine abgeschlossene Einbettung $V(\sigma) \hookrightarrow X(\Sigma)$ benötigt. Diese ist lokal durch die Surjektion

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[\tau^{\vee} \cap M] &\rightarrow \mathbb{C}[\tau^{\vee} \cap \sigma^{\perp} \cap M] \\ \chi^u &\mapsto \begin{cases} \chi^u & \text{wenn } u \in \tau^{\vee} \cap \sigma^{\perp} \cap M, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

für $\tau \in \Sigma$ gegeben. Ein Beispiel für diese Konstruktion ist in Abbildung 8 zu sehen.

Man beachte, daß die Dimension der Bahn $\text{o}(\sigma)$ bzw. des Abschlusses $V(\sigma)$ gerade die Kodimension des Kegels σ ist. Insbesondere entsprechen Strahlen des Fächers gerade T -invarianten Weildivisoren.

Divisoren. Die Beschreibung von Divisoren läßt sich auch auf die Kombinatorik des Fächers zurückführen. Aufgrund der obigen Überlegungen wissen wir, daß es T -invariante Bahnen von Kodimension 1 gibt. Damit erhalten wir T -invariante Weildivisoren D_{ρ} zu jedem Strahl $\rho \in \Sigma(1)$. Zwar ist

$$\text{WDiv}_T X(\Sigma) := \bigoplus_{\rho \in \Sigma(1)} \mathbb{Z} \cdot D_{\rho} \subsetneq \text{WDiv} X(\Sigma),$$

aber dennoch erzeugen diese die Divisorenklassengruppe vermöge der exakten Sequenz

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow M \rightarrow \text{WDiv}_T X(\Sigma) \rightarrow \text{Cl} X(\Sigma) \rightarrow 0, \\ u &\mapsto \sum_{\rho} \langle u, v_{\rho} \rangle D_{\rho} \end{aligned}$$

wobei v_{ρ} der primitive Erzeuger von ρ ist. Auf etwas andere Weise lassen sich T -invariante Cartierdivisoren definieren. Auf einer T -invarianten offenen Menge $U(\sigma)$ für $\sigma \in \Sigma$ ist ein solcher Divisor D durch einen Charakter $\chi^{u_{\sigma}}$ mit $u_{\sigma} \in M$ gegeben. Ein *Charakter* ist hier stets ein Charakter des Torus, also

$$\begin{aligned} \chi^u : T &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ t = (t_1, \dots, t_n) &\mapsto t^u = t_1^{u_1} \dots t_n^{u_n} \end{aligned}$$

Damit diese kompatibel sind, bedarf es $a_\rho \in \mathbb{Z}$ zu jedem $\rho \in \Sigma(1)$, sodaß $\langle u_\sigma, v_\rho \rangle = -a_\rho$ für $\rho \in \sigma(1)$ ist. Damit ist sogar $D = \sum_\rho a_\rho D_\rho$ und somit $\text{CDiv}_T X(\Sigma) \subseteq \text{WDiv}_T X(\Sigma)$. Wiederum sind alle T -invarianten Cartierdivisoren ausreichend um die Picardgruppe zu erzeugen:

$$0 \rightarrow M \rightarrow \text{CDiv}_T X(\Sigma) \rightarrow \text{Pic } X(\Sigma) \rightarrow 0.$$

Sobald $X(\Sigma)$ glatt ist, unterscheiden sich $\text{Pic } X(\Sigma)$ und $\text{Cl } X(\Sigma)$ nicht. Für einen simplizialen Fächer, gibt es zu jedem Weildivisor D ein $n \in \mathbb{N}$, sodaß zumindest $n \cdot D$ Cartier ist, damit ist in diesem Fall jeder Weildivisor \mathbb{Q} -Cartier.

T -Varietäten. Während es bei torischen Varietäten eines Kegels σ bedurfte um eine affine torische Varietät $U(\sigma)$ zu definieren, ist bei T -Varietäten der Grundbaustein ein sogenannter polyedrischer Divisor.

Sei Δ ein *Polyeder*, das heißt Durchschnitt endlich vieler affiner Halbräume. Dann läßt sich Δ als Minkowskisumme $\Delta = \pi + \sigma$ schreiben, wobei π ein *Polytop*, das ist ein beschränkter Polyeder, und σ ein Kegel ist. Für $\Delta \neq \emptyset$ ist zwar π nicht eindeutig, hingegen σ schon. Wir nennen σ den *Schweifkegel* von Δ . Die Menge aller Polyeder mit vorgeschriebenem Schweifkegel bilden eine Halbgruppe $\text{Pol}_\sigma^+(N)$, deren neutrales Element σ ist. Ich möchte noch darauf hinweisen, daß auch $\emptyset \in \text{Pol}_\sigma^+$ ist.

Sei Y eine normale Varietät. Ein *polyedrischer Prädivisor* mit Schweifkegel $\text{tail}(\mathcal{D}) := \sigma$ ist eine formale, endliche Summe

$$\mathcal{D} = \sum_Z \Delta_Z \otimes Z$$

über alle Primdivisoren Z auf Y mit $\Delta_Z \in \text{Pol}_\sigma^+(N)$. Wie immer heißt endlich hier, daß für alle Z , bis auf endlich viele Ausnahmen, der Koeffizient Δ_Z das neutrale Element σ in $\text{Pol}_\sigma^+(N)$ ist.

Einem polyedrischen Prädivisor \mathcal{D} können wir für jedes $u \in \sigma^\vee \cap M$ *auswerten*, das ist

$$\mathcal{D}(u) = \sum_Z \min\langle u, \Delta_Z \rangle \otimes Z.$$

Damit erhalten wir einen gewöhnlichen Divisor $\mathcal{D}(u)$ auf dem Träger von \mathcal{D} :

$$\text{Loc } \mathcal{D} = Y \setminus \bigcap_{\Delta_Z = \emptyset} Z.$$

Für den Fall, das Y eine Kurve ist, benötige ich noch den Begriff des *Grad* eines polyedrischen Divisors. Dieser ist

$$\deg \mathcal{D} = \sum_Z \Delta_Z.$$

Insbesondere ist $\deg \mathcal{D} = \emptyset$, sobald einer der Koeffizienten $\Delta_Z = \emptyset$ ist.

Ein *polyedrischer Divisor* ist ein polyedrischer Prädivisor \mathcal{D} , mit folgenden zwei Eigenschaften. Zum einen soll für alle $u \in \sigma^\vee \cap M$ der Divisor $\mathcal{D}(u)$ Cartier und ein positives Vielfaches von $\mathcal{D}(u)$ basispunktfrei sein. Außerdem soll für alle $u \in M$, die im relativen Inneren von σ^\vee liegen, der Divisor $\mathcal{D}(u)$ groß sein.

Aus einem polyedrischen Divisor \mathcal{D} läßt sich ein affines Schema mit T -Wirkung konstruieren, vermöge

$$X(\mathcal{D}) = \text{Spec } \bigoplus_{u \in \sigma^\vee \cap M} \Gamma(\text{Loc } \mathcal{D}, \mathcal{O}(\mathcal{D}(u))).$$

Seien \mathcal{D} und \mathcal{D}' polyedrische Divisoren zu Schweifkegeln σ und σ' . Sobald $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'$ ist, was $\Delta_Z \subseteq \Delta'_Z$ für jeden Primdivisor Z auf Y bedeutet, dann erhalten wir eine dominante Abbildung $X(\mathcal{D}) \rightarrow X(\mathcal{D}')$. Wir sagen, daß \mathcal{D} eine *Seite* von \mathcal{D}' ist (Schreibweise: $\mathcal{D} \prec \mathcal{D}'$), falls diese dominante Abbildung eine offene Einbettung ist.

DEFINITION 1.4 (divisorielle Fächer). Ein *divisorieller Fächer* \mathcal{S} ist eine endliche Menge polyedrischer Divisoren auf Y , sodaß für $\mathcal{D}, \mathcal{D}' \in \mathcal{S}$ stets zum einen $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \sum_Z (\Delta_Z \cap \Delta'_Z) \otimes Z \in \mathcal{S}$ und zum anderen $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ eine Seite von \mathcal{D} und \mathcal{D}' ist.

Aufgrund der etwas speziellen Definition einer Seite verkleben die affinen $X(\mathcal{D})$ für $\mathcal{D} \in \mathcal{S}$ zu einer *T-Varietät* $X(\mathcal{S})$, siehe [AHS08, 5.4]. Wir nennen Y den *Basisraum* des divisoriellen Fächers \mathcal{S} .

DEFINITION 1.5. Sei \mathcal{S} ein divisorieller Fächer auf Y . Zu $y \in Y$ und $\mathcal{D} \in \mathcal{S}$ ist ein *y-Anteil* von \mathcal{D}

$$\mathcal{D}_y = \sum_{y \in Z} \Delta_Z.$$

Damit definieren wir den *y-Anteil* \mathcal{S}_y von \mathcal{S} als die Menge aller *y-Anteile* \mathcal{D}_y für $\mathcal{D} \in \mathcal{S}$. Der divisorielle Fächer \mathcal{S} heißt *vollständig* falls für alle Anteile $|\mathcal{S}_y| = N_{\mathbb{Q}}$ ist.

PROPOSITION 1.6 ([AHS08, Theorem 7.5]). *Die T-Varietät $X(\mathcal{S})$ ist genau dann vollständig, wenn es der divisorielle Fächer \mathcal{S} ist.*

Die Dimension von $X(\mathcal{S})$ ist $\dim Y + \dim N_{\mathbb{Q}}$. Nach [AHS08, Theorem 5.6] läßt sich jede Varietät mit Toruswirkung als *T-Varietät* beschreiben, insbesondere lassen sich torische Varietäten in diese größere Welt einbetten, siehe [AHS08, Abschnitt 5]. Für torische Flächen werden wir das auch im folgenden Abschnitt zeigen.

Ich möchte nicht weiter auf allgemeine *T-Varietäten* eingehen, sondern im folgenden Abschnitt ausführlicher den Fall eines divisoriellen Fächers in $N \cong \mathbb{Z}$ auf $Y = \mathbb{P}^1$ betrachten. Das sind rationale \mathbb{C}^* -Flächen.

2. Torische Flächen und rationale \mathbb{C}^* -Flächen

KONVENTION (+ Bemerkung). Alle hier vorkommenden torischen Flächen verstehe ich implizit als glatt und vollständig.

Für glatte Flächen ist vollständig gleichbedeutend mit projektiv.

Außerdem ist ein zweidimensionaler Fächer bereits durch seine Strahlen bestimmt (sofern eben Vollständigkeit vorausgesetzt wird).

Die Strahlen werde ich meist mit v_1, \dots, v_n bezeichnen. Sofern die Gefahr einer Verwechslung gering ist, werde ich die selben Bezeichner ebenfalls für die primitiven Erzeuger der Strahlen verwenden.

Die Numerierung der Strahlen v_i soll zyklisch sein. Um mir lästige Fallunterscheidungen zu ersparen, fasse ich Indizes wie i als Element aus $[n] := \{1, \dots, n\} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ auf, so ein i nenne ich dann *zyklischer Index*. Damit sind zum Beispiel v_i, v_{i+1} stets die Erzeuger eines Kegels des Fächers, auch wenn mal $i = n$ sein sollte.

Für eine Aufblasung $b : X' \rightarrow X$ und einem Geradenbündel L auf X gilt

$$H^i(X', b^*L) = H^i(X, L).$$

Deshalb werde ich, sofern die Gefahr einer Verwechslung gering ist, für das Geradenbündel b^*L auf X' wieder die Bezeichnung L verwenden.

Beschreibung torischer Flächen mittels Schnittzahlen. Für eine torische Varietät ist $X(\Sigma) \setminus T = \cup_{\rho} D_{\rho}$, das heißt die sogenannten *Randdivisoren* kommen zum Torus T hinzu. Im Falle von Flächen kann aus dem Selbstschnittverhalten dieser T -Divisoren $X(\Sigma)$ rekonstruiert werden.

PROPOSITION 1.7. *Seien v_1, \dots, v_n die zyklisch angeordneten Strahlen eines zweidimensionalen Fächers. Die entsprechenden T -Divisoren seien D_i für $i \in [n]$. Dann ist $D_i^2 = a_i$ genau dann, wenn $v_{i-1} + a_i v_i + v_{i+1} = 0$.*

BEWEIS. Sei D ein Randdivisor. Dann gilt

$$\sum_i (D \cdot D_i) v_i = 0,$$

siehe [CLS11, (6.3.2)]. Da $D_i \cdot D_{i+1} = 1$ und $D_i \cdot D_j = 0$ für $j \notin \{i, i \pm 1\}$ (siehe [CLS11, Korollar 3.3, Lemma 3.4]), folgt die Aussage. \square

KOROLLAR 1.8 (+ Schreibweise). *Damit ist eine torische Fläche X schon durch die Selbstschnittzahlen a_1, \dots, a_n ihrer T -Divisoren bestimmt. Deshalb werde ich auch $X = \text{TV}(a_1, \dots, a_n)$ schreiben.*

BEMERKUNG 1.9. Umgekehrt führt nicht jedes beliebige Tupel (a_1, \dots, a_n) ganzer Zahlen zu einer torischen Fläche. Eine Restriktion ist, daß $\sum a_i = 12 - 3n$ ist. Das kann leicht mittels Induktion gezeigt werden, sobald die Schnittzahlen auf der Hirzebruchfläche bekannt sind und mit dem Wissen, daß jede andere Fläche $\neq \mathbb{P}^1$ daraus durch sukzessives Aufblasen gewonnen werden kann. Für eine weitere Restriktion siehe Bemerkung 2.17. Eine vollständige Charakterisierung solcher Tupel findet sich in [Ful93, Abschnitt 2.5].

Außerdem legt ein zulässiges Tupel die Strahlen v_i nur bis auf Basiswechsel fest, was aber die resultierende torische Varietät nicht beeinflußt. Weiters möchte ich noch darauf hinweisen, daß die Reihenfolge der a_i auch abgeändert werden kann, sofern das nur einer anderen zyklischen Numerierung der entsprechenden Strahlen ist. Beispielsweise ist

$$\text{TV}(a_1, \dots, a_n) = \text{TV}(a_{i+1}, \dots, a_n, a_1, \dots, a_i) = \text{TV}(a_n, \dots, a_1).$$

Beschreibung rationaler \mathbb{C}^* -Flächen mittels Multidivisoren.

KONVENTION. Die hier auftretenden rationalen \mathbb{C}^* -Flächen seien alle genauso wie die zugehörigen divisoriiellen Fächer vollständig und weiterhin glatt.

Es gibt neben Fächer und Schnittzahlen noch eine weitere Beschreibung torischer Flächen, die ich später zur Deformation torischer Flächen in Kapitel 2 verwenden werde; nämlich durch *Multidivisoren*.

Mit Multidivisoren können auch rationale \mathbb{C}^* -Flächen beschrieben werden. Im Kapitel 2 zur Deformation werden wir uns nicht nur auf torische Flächen beschränken, da diese aufgrund des zweidimensionalen Torus recht „starr“ sind. Rationale \mathbb{C}^* -Flächen werden uns da genügend Platz verschaffen, um für unsere Zwecke ausreichend zu deformieren.

Eine (glatte) rationale \mathbb{C}^* -Fläche läßt sich zunächst als divisoriieller Fächer \mathcal{S} in $N \cong \mathbb{Z}$ auf $Y = \mathbb{P}^1$ beschreiben. Diese Beschreibung ist nicht eindeutig, und erlaubt außerdem gegenüber der allgemeinen T -Varietätensprache einige Vereinfachungen, die uns zum Begriff des Multidivisors führen werden. Wir folgen da im wesentlichen [Süß08].

Sobald Y eine Kurve ist, lassen sich einige Eigenschaften wesentlich direkter überprüfen. Die Divisoren auf der Kurve Y bezeichne ich im folgenden nicht mehr mit Z sondern mit P für Punkt.

PROPOSITION 1.10 ([Süß08, Seite 4]). *Sei \mathcal{D} ein polyedrischer Prädivisor auf einer Kurve Y . Dann ist \mathcal{D} ein polyedrischer Divisor falls*

- (1) $\deg \mathcal{D} \subsetneq \sigma = \text{tail } \mathcal{D}$ (man beachte, falls $\text{Loc } \mathcal{D} \neq \mathbb{P}^1$ ist, dann ist $\deg \mathcal{D} = \emptyset$ und somit diese Bedingung automatisch erfüllt), und
- (2) für alle $u \in \sigma^\vee$ mit

$$\{v \in \sigma \mid \langle v, u \rangle = \min(\sigma, u)\} \cap \deg \mathcal{D} \neq \emptyset$$

ist ein Vielfaches von $\mathcal{D}(u)$ ein Hauptdivisor.

Seien \mathcal{D} und \mathcal{D}' zwei polyedrische Divisoren auf Y . Genau dann ist $\mathcal{D}' \prec \mathcal{D}$, wenn einerseits $\Delta'_P \prec \Delta_P$ für jeden Punkt $P \in Y$ und andererseits $\deg \mathcal{D} \cap \text{tail } \mathcal{D}' = \deg \mathcal{D}'$ ist.

Die Beschreibung durch divisorielle Fächer \mathcal{S} ist nicht eindeutig, sodaß wir auch hier im Fall, daß Y eine Kurve ist, vereinfachen können. Sei \mathcal{D} ein polyedrischer Divisor von \mathcal{S} mit affinem Träger, also ist \mathcal{D} von der Form

$$\mathcal{D} = \sum_{j=1}^l \Delta_j \otimes P_j + \sum_{j=1}^k \emptyset \otimes Q_j,$$

wobei $\Delta_j \neq \sigma$ nicht-trivial ist und $k > 0$. Wir ersetzen \mathcal{D} durch l polyedrische Divisoren

$$\mathcal{D}^i = \Delta_i \otimes P_i + \sum_{j \neq i} \emptyset \otimes P_j + \sum_j \emptyset \otimes Q_j.$$

Nach Durchführung dieses Verfahrens für jeden polyedrischen Divisor $\mathcal{D} \in \mathcal{S}$ mit affinem Träger erhalten wir einen neuen divisoriiellen Fächer \mathcal{S}' , wobei aber $X(\mathcal{S}) = X(\mathcal{S}')$ ist.

Wenn wir uns nun für rationale \mathbb{C}^* -Flächen auf $N \cong \mathbb{Z}$ und $Y = \mathbb{P}^1$ einschränken, können wir noch mehr über die Gestalt von \mathcal{D} sagen. Sollte dieser polyedrische Divisor \mathcal{D} nämlich vollständigen Träger $\text{Loc } \mathcal{D} = \mathbb{P}^1$ haben, muß Bedingung (1) aus Propostion 1.10 erfüllt sein. Das kann aber nur eintreten, wenn der Schweifkegel $\text{tail } \mathcal{D} = \mathbb{Q}_\pm$ nach einer Seite unbeschränkt ist.

Die Bedingung (2) in Propostion 1.10 ist hier automatisch erfüllt, da die Koeffizienten der auftretenden polyedrischen Divisoren Intervalle mit rationalen Randpunkten sind.

All diese Vereinfachungen bedeuten, daß die rationale \mathbb{C}^* -Fläche zu einem divisoriiellen Fächer fast vollständig durch die y -Anteile \mathcal{S}_y für $y \in \mathbb{P}^1$ bestimmt ist. Die einzig noch notwendige Information ist, ob die polyedrischen Divisoren mit unbeschränktem Schweifkegel nun affinen oder vollständigen Träger haben. Das führt nun zum Begriff des *Multidivisors*.

DEFINITION 1.11 (polyedrische Unterteilung). Eine (polyedrische) *Unterteilung* U von \mathbb{Q} ist gegeben durch Intervalle $] - \infty, t_1]$, $[t_i, t_{i+1}]$ und $[t_n, \infty[$ sowie deren Durchschnitte $\{t_i\}$, wobei $t_1 < \dots < t_n$.

Die Menge aller Unterteilungspunkte bezeichnen wir mit $\mathcal{P}(U)$. Sei $\{t_1, \dots, t_n\}$ eine endliche Menge von Punkten in \mathbb{Q} , dann schreibe ich für die durch $\{t_1, \dots, t_n\}$ induzierte Unterteilung von \mathbb{Q} manchmal $U(\{t_1, \dots, t_n\})$. Damit ist $U = U(\mathcal{P}(U))$. Mit *trivialer Unterteilung* meinen wir die Unterteilung $U(0)$.

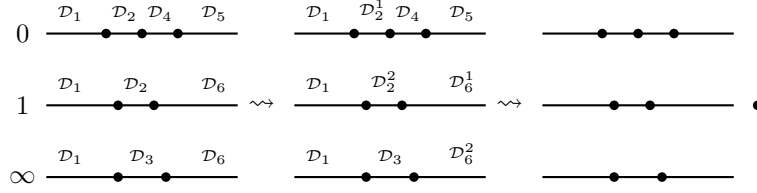


ABBILDUNG 2. Die Vereinfachung eines divisorien Fächers mit anschließendem Übergang zum Multidivisor

Sein t ein Unterteilungspunkt von U . Die *Höhe* von t ist die kleinste natürliche Zahl $\lambda(t) > 0$, sodaß $\lambda(t) \cdot t \in \mathbb{Z}$.

DEFINITION 1.12 (Multidivisor). Sei C eine projektive, glatte Kurve. Ein *Multidivisor* \mathcal{M} ist eine formale Summe $\sum U_P \otimes P$ mit einem Paar $(m_<, m_>)$, wobei $m_> \in \{\circ, \bullet\}$. Für $\sum U_P \otimes P$ und $(m_<, m_>)$ sollen folgende Eigenschaften vorweisen:

- (1) bis auf endlich viele Ausnahmen sind alle U_P triviale Unterteilungen,
- (2) falls $m_< = \circ$, dann ist $\sum_{P \in C} \min\{\mathcal{P}(U_P)\} < 0$ und
- (3) falls $m_> = \circ$, dann ist $\sum_{P \in C} \max\{\mathcal{P}(U_P)\} > 0$.

Für gewöhnlich werde ich nur jene, endlich vielen U_P erwähnen, die ungleich der trivialen Unterteilung sind.

In der Abbildung 2 ist an einem Beispiel zu sehen, wie sich ein allgemeiner divisorien Fächer vereinfachen läßt, und wie dann der Übergang zum Multidivisor von statten geht. Dabei treten im linken Bild die polyedrischen Divisoren $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_6$ auf. Dort haben die Divisoren $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ und \mathcal{D}_6 mehr als einen nicht-trivialen polyedrischen Koeffizienten. Da \mathcal{D}_2 und \mathcal{D}_6 affinen Träger aufweisen, können diese aufgespalten werden, was zum mittleren Bild führt. Nun wird nur noch die Information benötigt, ob ein polyedrischer Divisor mit unbeschränkten Koeffizienten affinen Träger hat, was mit $m_> = \bullet$ vermerkt wird, was im rechten Bild zu sehen ist.

BEMERKUNG 1.13. Aus einem Multidivisor läßt natürlich wieder ein divisorien Fächer gewinnen.

Torische Flächen als Multidivisor auf \mathbb{P}^1 . Jede torische Fläche läßt sich auch als rationale \mathbb{C}^* -Fläche verstehen, indem wir die Wirkung des zweidimensionalen Torus auf eine eindimensionale \mathbb{C}^* -Wirkung einschränken. Auf dem Niveau des Charaktergitters M des zweidimensionalen Torus T_N bedeutet das, daß wir ein primitives $u \in M$ wählen und so einen eindimensionalen Untergitter $M(u) = M / M_u$ erhalten (dabei ist M_u das von u erzeugte Untergitter von M). Das duale Gitter zu $M(u)$ ist dann $N(u) = u^\perp \cap N$. Über die Einbettung $N(u) \hookrightarrow N$ erhalten wir die Einbettung des eindimensionalen Untertorus $T_{N(u)} \hookrightarrow T_N$. Die Konstruktion ist im wesentlichen dual zur Konstruktion der T -Bahn in Abschnitt 1. Damit können wir diese torische Fläche als $T_{N(u)}$ -Varietät betrachten.

Zu diesem $u \in M$ können wir die beiden Geraden

$$E_\pm = \{v \in N \mid \langle u, v \rangle = \pm 1\}$$

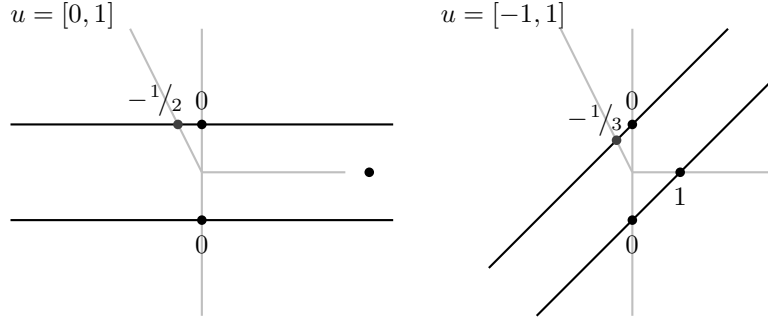


ABBILDUNG 3. Zwei Multidivisoren der Hirzebruchfläche \mathcal{F}_2 .

betrachten. Schneiden wir diese Geraden mit dem Fächer Σ der Fläche erhalten wir zwei Unterteilungen U_0 und U_∞ . Falls der Fächer Strahlen $\mathbb{Q}_\pm \cdot v$ mit $\langle u, v \rangle = 0$ aufweist, setzen wir das entsprechende $m_{\geq} = \bullet$, sonst belassen wir den Wert bei \circ . Damit ist der Fächer vollständig durch (U_0, U_∞) und m_{\geq} festgelegt. Für ein Beispiel siehe Abbildung 3.

BEMERKUNG 1.14. In [Süß08] werden statt $m_{\geq} \in \{\circ, \bullet\}$ die Markierungen Q^- und Q^+ verwendet, wobei beispielsweise die Markierung Q^- gesetzt wird, wenn $m_{<} = \circ$ ist. Da ich in Bildern nur $m_{\geq} = \bullet$ vermerken werde, kann das durchaus zu Verwirrung führen. Der Grund für die hier verwendete Notation ist jener, daß damit die Punkte in den Bildern genau T -invarianten Divisoren entsprechen.

Glattheit von \mathbb{C}^ -Flächen.* Wir wollen im folgenden nur rationale \mathbb{C}^* -Flächen betrachten, die glatt und vollständig sind. Neben der Vollständigkeit läßt sich auch die Glattheit am Multidivisor ablesen.

Dazu benötigen wir zunächst noch ein Kriterium, wann zwei rationale \mathbb{C}^* -Flächen äquivariant isomorph sind.

Folgende Definitionen und die Proposition lassen sich auch allgemeiner für T -Varietäten formulieren, siehe [Süß08, Theorem 1.8]. Uns reicht aber die vereinfachte Form für \mathbb{C}^* -Flächen.

DEFINITION 1.15. Zu einer Unterteilung $U = U(t_1, \dots, t_l)$ und $n \in \mathbb{Z}$ meinen wir mit $n \cdot U = U(nt_1, \dots, nt_l)$ und mit $U + n = U(t_1 + n, \dots, t_l + n)$. Diese Definitionen lassen sich in natürlicher Weise auf Multidivisoren ausweiten.

Zwei Multidivisoren \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 mit $\mathcal{M}_i = (\sum_P U_P^i, m_{i, \geq})$ auf \mathbb{P}^1 heißen *linear äquivalent* wenn es einen Hauptdivisor $\text{div } f = \sum n_P \cdot P$ auf \mathbb{P}^1 gibt mit

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 + \text{div } f := \left\{ \sum_P (U_P^2 + n_P) \otimes P, m_{2, \geq} \right\}.$$

Wir schreiben dafür $\mathcal{M}_1 \sim \mathcal{M}_2$.

Sei ϕ ein Automorphismus von \mathbb{P}^1 . Dann ist der *Rückzug* eines Multidivisors \mathcal{M} auf \mathbb{P}^1 durch

$$\phi^* \mathcal{M} = \left\{ \sum_P U_P \otimes \phi^{-1}(P), m_{\geq} \right\}$$

definiert.

PROPOSITION 1.16 ([Süß08, Kor. 4.2]). *Seien \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 zwei Multidivisoren auf \mathbb{P}^1 . Dann sind $X(\mathcal{M}_1)$ und $X(\mathcal{M}_2)$ genau dann äquivariant isomorphe \mathbb{C}^* -Flächen, wenn es einen Isomorphismus $\phi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ gibt, sodaß $\mathcal{M}_1 \sim \pm \phi^* \mathcal{M}_2$ ist.*

In [Süß08, Prop. 3.1, Thm. 3.3] wird genau geklärt, wann ein polyedrischer Divisor $\mathcal{D} \in \mathcal{S}$ zu einem glatten affinen Teilstück einer \mathbb{C}^* -Fläche $X(\mathcal{S})$ führt.

PROPOSITION 1.17 ([Süß08, Prop. 3.1, Thm. 3.3]). *Sei \mathcal{D} ein polyedrischer Divisor auf \mathbb{P}^1 . Dann ist die affine \mathbb{C}^* -Fläche $X(\mathcal{D})$ genau dann glatt,*

Falls $\text{Loc } \mathcal{D} = \mathbb{P}^1$: *wenn $\mathcal{D} \sim \Delta_P \otimes P + \Delta_Q \otimes Q$ und*

$$\overline{\mathbb{Q}_+ \cdot (\{1\} \times \Delta_P \cup \{-1\} \times \Delta_Q)} \subset \mathbb{Q} \times N_{\mathbb{Q}}$$

ein glatter Kegel ist.

Falls $\text{Loc } \mathcal{D} \neq \mathbb{P}^1$: *wenn für jeden Koeffizienten Δ_P von \mathcal{D}*

$$\overline{\mathbb{Q}_+ \cdot (\{1\} \times \Delta_P)} \subset \mathbb{Q} \times N_{\mathbb{Q}}$$

ein glatter Kegel ist.

Zwar ist nun die Frage der Glattheit geklärt, dennoch möchte ich noch eine andere Sichtweise einführen, die diese Proposition gut erklärt und für Divisoren auf \mathbb{C}^* -Flächen nützlich sein wird. Diese Sichtweise wurde von Dimitri Timashev entwickelt, Ein Übersichtsartikel dazu ist [Tim06]. Lokal sind nämlich (glatte) rationale \mathbb{C}^* -Flächen *torisch*.

Wenn wir eine glatte, vollständige \mathbb{C}^* -Fläche vorliegen haben, können wir nach den Vereinfachungen von Seite 7 und Proposition 1.17 drei Sorten polyedrischer Divisoren modulo linearer Äquivalenz unterscheiden.

PROPOSITION 1.18 ([Süß08, Abschnitt 1 und Korollar 4.2]). *Gegeben eine glatte, vollständige, rationale \mathbb{C}^* -Fläche X . Sei \mathcal{S} ein divisorielles Fächer auf \mathbb{P}^1 zu X . Dann kann \mathcal{S} zu einem divisoriellem Fächer \mathcal{S}' abgeändert werden, dessen polyedrischen Divisoren von folgender Gestalt sind:*

- $[a, \infty[\otimes P + [b, \infty[\otimes Q$ bzw. $]-\infty, a] \otimes P +]-\infty, b] \otimes Q$,
- $[a, \infty[\otimes P + \emptyset \otimes Q$ bzw. $]-\infty, a] \otimes P + \emptyset \otimes Q$ oder
- $[a, b] \otimes P + \emptyset \otimes Q$ mit $a \leq b$ (nicht notwendigerweise verschieden).

Dabei sind $P, Q \in$ zwei unterschiedliche Punkte auf \mathbb{P}^1 .

Die Bedeutung der polyedrischen Divisoren, wie sie in der vorangegangenen Proposition vorkommen, kann für meine Zwecke fast nicht unterschätzt werden. Durch diese polyedrischen Divisoren wird nämlich die rationale \mathbb{C}^* -Fläche durch torische Karten überdeckt. Da wir uns auf glatte Flächen beschränken, sind diese sogar isomorph zu \mathbb{A}^2 .

Ich werde das nun an diesen drei polyedrischen Divisoren verdeutlichen. Zunächst können wir durch einen Automorphismus des \mathbb{P}^1 erreichen, daß $P = 0$ und $Q = \infty$ ist. Wir betten den Koeffizienten U_P von P über die Abbildung $i_P : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}^2, x \mapsto (x, 1)$ und U_Q über $i_Q : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}^2, x \mapsto (x, -1)$ in die Ebene ein. Anschließend betrachten wir den Kegel, der durch das Bild dieser beiden Einbettungen erzeugt wird, was als affine torische Karte interpretiert werden kann. Da

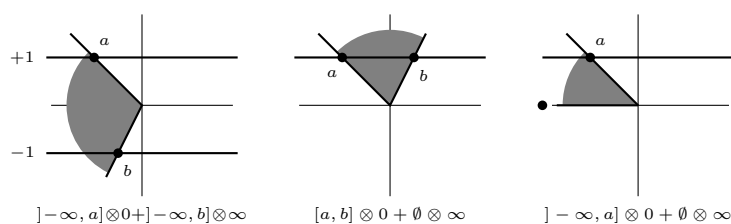


ABBILDUNG 4. Die affinen torischen Karten zu gewissen polyedrischen Divisoren.

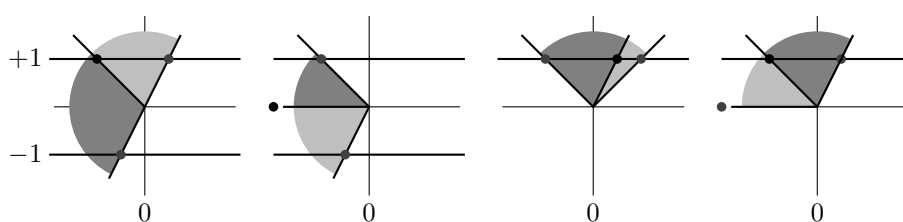


ABBILDUNG 5. Der Divisor D_\bullet in torischen Umgebungen.

das nur ein grobes Rezept ist, fasse ich diese Entsprechungen in folgender Tabelle zusammen, siehe auch Abbildung 4.

polyedrischer Divisor	Kegel	
$[a, \infty[\otimes P + [b, \infty[\otimes Q$	$\langle (a, 1), (b, -1) \rangle$	
$]-\infty, a] \otimes P +]-\infty, b] \otimes Q$	$\langle (a, 1), (1, 0) \rangle$	nur möglich, falls $m_> = \bullet$
$[a, \infty[\otimes P + \emptyset \otimes Q$	$\langle (a, 1), (-1, 0) \rangle$	nur möglich, falls $m_< = \bullet$
$]-\infty, a] \otimes P + \emptyset \otimes Q$	$\langle (a, 1), (b, 1) \rangle$	

Durch diese lokal torische Natur von \mathbb{C}^* -Flächen können viele Techniken der torischen Geometrie auch in dieser allgemeineren Situation verwendet werden. Beispielsweise bei

Divisoren auf \mathbb{C}^ -Flächen.* Für das Kapitel 2, Abschnitt 5 benötige ich noch eine Beschreibung von ausreichend vielen T -invarianten Divisoren auf \mathbb{C}^* -Flächen. Diese spielen eine ähnlich zentrale Rolle wie Randdivisoren für torische Flächen. Mit „ausreichend viel“ meine ich hier, daß diese Divisoren die Picardgruppe erzeugen (werden aber im Allgemeinen keine Basis bilden).

Aus den Betrachtungen zu T -Bahnen auf torischen Varietäten wissen wir, daß im Falle von torischen Flächen die T -invarianten Divisoren durch Strahlen kodiert sind. Genauer gesagt, ist ein solcher Divisor $V(\rho)$ für einen Strahl ρ des Fächers. Der Abschluß von $o(\rho)$ geschieht hier durch Hinzunahme der Bahnen $o(\sigma_i)$ für die beiden zweidimensionalen Kegel σ_i mit $\rho \prec \sigma_i$, wobei $i = 1, 2$. Das heißt aber, daß ein solcher Divisor schon in der torischen Fläche zum Fächer bestehend aus $\{0\}, \rho, \sigma_1$ und σ_2 liegt.

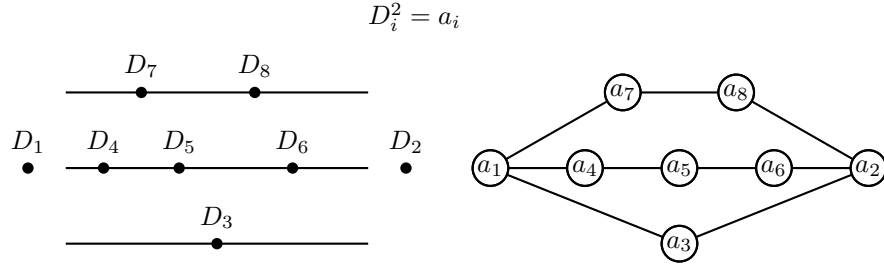


ABBILDUNG 6. Der Vergleich von Multidivisoren mit Orlik und Wagreichs Beschreibung.

Wie wir schon vorhin gesehen haben, läßt sich eine rationale \mathbb{C}^* -Fläche lokal durch affine torische Karten beschreiben. Somit können wir aber T -invariante Divisoren auf einer rationalen \mathbb{C}^* -Fläche mithilfe dieser Karten beschreiben. Es gibt im wesentlichen drei verschiedene Konstellationen für die Karten, die einen solchen Divisor beinhalten, siehe Abbildung 5.

Das Schnittverhalten dieser Divisoren läßt sich mit Techniken der torischen Flächen (fast vollständig) behandeln. Zunächst ist für zwei verschiedene T -invariante Divisoren D und D' , wie sie in Abbildung 5 auftreten:

$$D.D' = \begin{cases} 1 & \text{falls } D \text{ und } D' \text{ benachbart sind,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier meine ich mit „benachbart“, daß eine torische Karte wie in Abbildung 4 gibt, sodaß diese beiden Divisoren den beiden Strahlen des Kegels zu dieser Karte entsprechen.

Der Selbstschnitt eines T -invarianten Divisors auf einer rationalen \mathbb{C}^* -Flächen läßt sich nicht so einfach bestimmen. Ich möchte hier auf die genaue Berechnung nicht genauer eingehen, da ich den Selbstschnitt nur im Spezialfall einer torischen Fläche benötigen werde.

BEMERKUNG 1.19. Sei X eine rationale \mathbb{C}^* -Fläche zum Multidivisor $\mathcal{M} = \{\sum_P U_P \otimes P, m_{\geq}\}$. Dann ist für fast alle $P \in \mathbb{P}^1$ die Unterteilung $U_P = U(0)$ trivial. Nichtsdestotrotz entspricht der Unterteilungspunkt in 0 einem T -invarianten Divisor. Insbesondere gibt es unendlich viele T -invariante Divisoren.

Wenn wir nun annehmen, daß $m_{>} = \bullet = m_{<}$ ist, dann ergibt sich über die Selbstschnittzahlen der Divisoren eine Verbindung zur Beschreibung von Orlik und Wagreich aus [OW77]. Deren Beschreibung ist allerdings nur eine topologische Klassifikation.

Ich möchte hier nicht genauer auf deren Beschreibung eingehen, die Ähnlichkeit möchte ich aber durch die Abbildung 6 verdeutlichen.

Auch wenn es unendlich viele, T -invariante Divisoren gibt, reicht für unsere Zwecke die oben getroffene Auswahl:

PROPOSITION 1.20 ([PS08, Korollar 3.15] + Schreibweise). *Sei X eine glatte, rationale \mathbb{C}^* -Fläche zum Multidivisor $\mathcal{M} = \{\sum_P U_P \otimes P, m_{\geq}\}$. Sei M die endliche Menge jener Punkte auf \mathbb{P}^1 mit nicht-trivialer Unterteilung. Zu einem Unterteilungspunkt $t \in \mathcal{P}(U_P)$ mit $P \in M$ sei $D_{t,P}$ der im vorigen besprochene T -invariante*

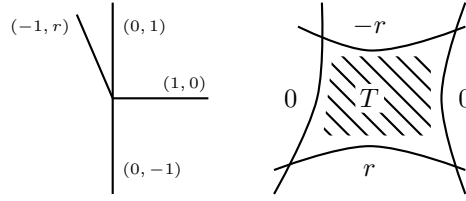


ABBILDUNG 7. Die Hirzebruchfläche \mathcal{F}_r durch Fächer bzw. Schnittzahlen gegeben.

Divisor. Falls $m_{>} = \bullet$ bzw. $m_{<} = \bullet$ ist, dann gibt es noch den T -invarianten Divisor $D_{>}$ bzw. $D_{<}$. Dann erzeugen D_{\geq} und $D_{t,P}$ für $t \in \mathcal{P}(U_P)$ und $P \in M$ die Picardgruppe von X .

Die Hirzebruchflächen \mathcal{F}_r .

BEISPIEL 1.21 (Hirzebruchflächen + Divisoren). Der Fächer einer Hirzebruchfläche \mathcal{F}_r (mit $r \geq 0$) wird von den Strahlen $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$, $v_3 = (-1, r)$ und $v_4 = (0, -1)$ erzeugt, siehe Abbildung 7. Seien D_1, \dots, D_4 die entsprechenden Randdivisoren. Dann ergeben sich folgende Selbstschnittzahlen nach Proposition 1.7:

D	Strahl	D^2
D_1	$(1, 0)$	0
D_2	$(0, 1)$	$-r$
D_3	$(-1, r)$	0
D_4	$(0, -1)$	r

Damit ist $\mathcal{F}_r = \text{TV}(0, -r, 0, r)$. Für Beschreibungen mittels Multidivisoren siehe Abbildung 3.

Die Picardgruppe von \mathcal{F}_r ist zweidimensional, es bestehen die Relationen $D_1 \sim D_3$ und $D_2 + rD_3 \sim D_4$. In Übereinstimmung mit der Notation aus [HP08] werde ich als Basis von $\text{Pic}(\mathcal{F}_r)$ die Klassen $P_n = D_1$ und $Q_n = D_4$ wählen. Das besondere Merkmal dieser Basis ist, daß P_n und Q_n den nef-Kegel erzeugen.

Bezüglich dieser Basis ist der kanonische Divisor

$$K = \sum -D_i = (r - 2)P_n - 2Q_n.$$

Ich nenne (P_n, Q_n) die *nef-Basis* von $\text{Pic}(\mathcal{F}_r)$.

Falls $r = 2a + 1$ ungerade ist, dann gibt es noch eine weitere ausgezeichnete Basis von $\text{Pic}(X)$. Durch den Basiswechsel $P = Q_n - aP_n$ und $R_1 = Q_n - (a + 1)P_n$ wird nämlich die Schnittmatrix diagonalisiert, das heißt,

$$P^2 = 1, R_1^2 = -1 \text{ und } P.R_1 = 0.$$

Die Schnittmatrix ist also unabhängig von r . Gleiches gilt auch für die Koeffizienten des kanonischen Divisors bezüglich dieser Basis:

$$K = (2a - 1)(P - R_1) - 2((a + 1)P - aR_1) = -3P + R_1.$$

Aufgrund all dieser Eigenschaften nenne ich (P, R_1) *gute Basis* von $\text{Pic}(\mathcal{F}_{2a+1})$.

Auf \mathcal{F}_{2a} kann es keine solche Basis geben, da für das Diagonalisieren der Schnittmatrix echt rationale Koeffizienten erforderlich sind.

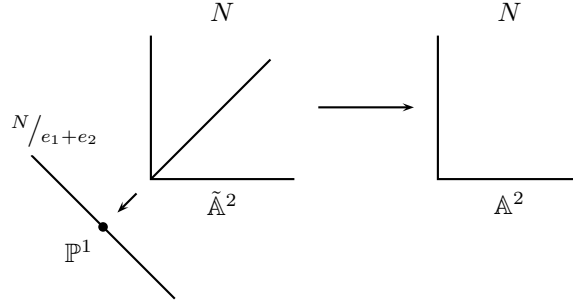


ABBILDUNG 8. Aufblasung des \mathbb{A}^2 als torische Varietät mit exzeptionellem Divisor \mathbb{P}^1 .

Aufblasen von \mathbb{C}^* -Flächen. Als nächstes möchte ich das Aufblasen von glatten \mathbb{C}^* -Flächen behandeln.

KONVENTION. Mit *Aufblasen* einer torischen Fläche meine ich immer das Aufblasen in einem T -invarianten Punkt. Damit ist der exzeptionelle Divisor ebenfalls T -invariant und isomorph zu \mathbb{P}^1 .

BEISPIEL 1.22 (Aufblasen des \mathbb{A}^2). Sei $\sigma = \langle e_1, e_2 \rangle$ und Σ der von σ erzeugte Fächer. Dann ist $\mathbb{A}^2 = \text{TV}(\Sigma)$. Wir können σ mit dem Strahl $e_1 + e_2$ unterteilen und erhalten zwei Kegel $\sigma_i = \langle e_i, e_1 + e_2 \rangle$, $i = 1, 2$. Sei Σ' der von σ_1 und σ_2 erzeugte Fächer. Dann ist $\tilde{\mathbb{A}}^2 = \text{TV}(\Sigma')$ die Aufblasung von \mathbb{A}^2 im Ursprung und die Bahn zum Strahl $e_1 + e_2$ ist der exzeptionelle Divisor und isomorph zu \mathbb{P}^1 . Für ein Bild siehe Abbildung 8.

Sei X eine rationale \mathbb{C}^* -Fläche. Diese läßt sich durch torische Karten überdecken, die isomorph zu \mathbb{A}^2 sind, siehe Proposition 1.18. Da Aufblasen eine lokale Angelegenheit ist, kann ich das Beispiel 1.22 anwenden. Also wird der Kegel $\sigma = \langle u, v \rangle$ mit dem Strahl $u + v$ unterteilt. Der daraus resultierende Fläche ist dann die Aufblasung von X im T -invarianten Punkt $o(\sigma)$. Der exzeptionelle Divisor ist dann $V(u + v)$.

LEMMA 1.23. *Seien $X = \text{TV}(a_1, \dots, a_n)$ und $b : X' \rightarrow X$ eine Aufblasung. Dann gibt es ein i , sodaß $X' = \text{TV}(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i - 1, -1, a_{i+1} - 1, a_{i+2}, \dots, a_n)$ ist.*

BEWEIS. Seien v_1, \dots, v_n die Strahlen zu X . Dann wird an einer Stelle i der Strahl $v = v_i + v_{i+1}$ hinzugefügt, daraus ergibt sich die -1 in den Schnittzahlen von X' . Für a_i gilt die Relation $0 = v_{i-1} + a_i v_i + v_{i+1} = v_{i-1} + a_i v_i + (v - v_i)$. Damit ergibt sich die Schnittzahl $a_i - 1$ für X' , analog für $a_{i+1} - 1$. \square

BEMERKUNG 1.24. Umgekehrt können wir $X = \text{TV}(a_1, \dots, a_n)$ an der Stelle i abblasen, falls $a_i = -1$. Dann ist $X'' = \text{TV}(a_1, \dots, a_{i-2}, a_{i-1} - 1, a_{i+1} - 1, a_{i+2}, \dots, a_n)$ die Abblasung. Der Divisor D_i ist isomorph zu \mathbb{P}^1 (siehe Abbildung 8). Außerdem ist jede Kurve $C \subset X$ mit $C \cong \mathbb{P}^1$ und $C^2 = -1$ ein T -invarianter Randdivisor, das heißt, es gibt ein j mit $C = D_j$.

BEMERKUNG 1.25. Sowohl das Lemma und die Bemerkung lassen sich auch auf rationale \mathbb{C}^* -Flächen anwenden, da nur von der lokalen Natur der Varietät Gebrauch gemacht wird.

Es gibt drei verschiedene Typen von torischen Karten, siehe Proposition 1.18 und Abbildung 4. Ich werde die Aufblasung für jeden Typus separat behandeln, die Ergebnisse sind in Abbildung 5 zu sehen. Im folgenden werden zwei rationale Zahlen a, b vorkommen, ich benötige noch deren Darstellung als gekürzter Bruch, das heißt, $a = n/m$ und $b = k/l$.

Der erste Typus ist durch Unterteilungspunkte $a \in U_+$ und $b \in U_-$ gegeben, die oBdA beide größer oder gleich Null sind (sonst gehe zu einem linear äquivalenten Multidivisor über). Dabei sind mit U_{\pm} die Unterteilungen in Höhe ± 1 gemeint, siehe Abbildung 4. Damit ist der Kegel durch die Strahlen $(a, 1)$ und $(b, -1) \in \mathbb{Q}^2$. Als primitive Strahlen sind das $v_1 = (n, m)$ und $v_2 = (k, -l) \in \mathbb{Z}^2$. Der neue Strahl ist somit durch $v_0 = (n+k, m-l)$ gegeben. Da $\{v_1, v_2\}$ eine Gitterbasis bilden, ist auch $\{v_0, v_i\}$ für $i = 1, 2$ eine Gitterbasis und somit v_0 primitiv.

Es können nun zwei Fälle auftreten. Falls $m+l \neq 0$ ist, dann induziert v_0 den Unterteilungspunkt $c = \frac{n+k}{m-l}$. Offensichtlich gilt für die Höhe, daß $\lambda(c) = \lambda(a) - \lambda(b)$ ist.

Andererseits kann $m+l = 0$ sein. Aufgrund der Primitivität muß $v_0 = (\pm 1, 0)$ sein, damit ist $n+k = 1$. Da aber n und $k \geq 0$ sind, muß $n = 1$ und $k = 0$ sein (oder umgekehrt, ich werde mich aber auf diesen einen Fall beschränken). Aus der Primitivität ergibt sich nun, daß der Fall $m+l = 0$ nur eintreten kann, wenn $a = 1$ und $b = 0$ ist (oder umgekehrt). Außerdem ist in dann die Aufblasung der Übergang $\circ \rightarrow \bullet$ für $m_>$ oder $m_<$.

Der zweite Typus ist durch Unterteilungspunkte $a, b \in U$ gegeben. In diesem Fall sind die primitiven Strahlen $v_1 = (n, m)$ und $v_2 = (k, l)$, sowie der neue Strahl $v_0 = (n+k, m+l)$. Damit ist der neue Unterteilungspunkt $c = \frac{n+k}{m+l}$ mit Höhe $\lambda(c) = \lambda(a) + \lambda(b)$.

Schlußendlich der dritte Typus, welcher durch einen Unterteilungspunkt $a \in U$ und $m_{\geq} = \bullet$ gegeben ist. Wegen $v_2 = (\pm 1, 0)$ ist $v_0 = (n \pm 1, m)$. Der neue Unterteilungspunkt ist dann $c = \frac{n \pm 1}{m}$ mit der Höhe $\lambda(c) = \lambda(a)$.

PROPOSITION 1.26. *Sei $X \neq \mathbb{P}^2$ eine glatte rationale Fläche, dann läßt sich X zu einer Hirzebruchfläche \mathcal{F}_r abblasen.*

BEMERKUNG 1.27. Diese Proposition ist im Falle torischer Flächen eine Konsequenz des Mori Programms für torische Varietäten, worauf ich in 11.2 näher eingehen werde. Für rationale Flächen kann man die Enriques Klassifikation bemühen, siehe [Mat02, Theorem 1-7-1] (dabei benutze man, daß die Kodaira Dimension rationaler Flächen $-\infty$ ist, sowie die Irregulärheit 0). Mit dieser Proposition sind induktive Beweise möglich, indem das Verhalten diverser Eigenschaften unter Aufblasung betrachtet werden. Anschließend braucht es nur noch eine Untersuchung der Hirzebruchflächen.

PROPOSITION 1.28. *Sei $\pi : X \rightarrow Y$ die Aufblasung einer Fläche Y in einem Punkt P . Dann ist der exzeptionelle Ort $R = \pi^{-1}(P)$ ein Divisor und isomorph zu \mathbb{P}^1 . Außerdem ist $R^2 = K.R = -1$ und somit $\chi(R) = 1$.*

BEWEIS. Der erste Teil dieser Aussage ist [Har77, Proposition V.3.1]. Dort wird auch $R^2 = -1$ gezeigt. Da $R \cong \mathbb{P}^1$ ist, folgt mit der Adjunktionsformel

([Har77, Proposition V.1.5]), daß $2 \cdot 0 - 2 = R \cdot (R + K)$ ist und damit die Proposition. \square

PROPOSITION 1.29 (+ Definition). *Sei X eine torische Fläche vom Picardrang $n + 1 > 2$. Dann hat $\text{Pic}(X)$ eine Basis P, R_1, \dots, R_n mit den Eigenschaften*

(1) *es wird die Schnittpaarung diagonalisiert, das heißt,*

$$P^2 = 1, R_i^2 = -1 \text{ und } P \cdot R_i = R_i \cdot R_j = 0 \text{ für } 1 \leq i, j \leq n, i \neq j,$$

(2) *der kanonische Divisor ist von der Gestalt*

$$K_X = -3P + \sum_{i=1}^n R_i.$$

So eine Basis nenne ich gute Basis von $\text{Pic}(X)$.

BEWEIS. Es kann X zu mindestens einer Hirzebruchfläche \mathcal{F}_r abgeblasen werden, sei $X = X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_1 = \mathcal{F}_r$ ein solcher Abblasungsweg. Zunächst möchte ich festhalten, daß Flächen vom Picardrang 3 von der Form

$$\text{TV}(0, -r, -1, -1, r - 1)$$

sind, sich also sowohl zu \mathcal{F}_r als auch zu \mathcal{F}_{r-1} abblasen lassen. Sei also oBdA. $X_1 = \mathcal{F}_r$ mit $r = 2a + 1$ ungerade, sodaß wir für $\text{Pic}(\mathcal{F}_r)$ eine gute Basis P, R_1 wie im Beispiel 1.21 wählen können.

Nun können wir induktiv vorgehen. Sei also auf X_i schon eine gute Basis der Form P, R_1, \dots, R_i gewählt und $b : X_{i+1} \rightarrow X_i$ eine Aufblasung mit exzeptionellem Divisor R_{i+1} . Dann ist P, R_1, \dots, R_{i+1} eine gute Basis von $\text{Pic}(X_{i+1})$.

Zunächst zeige ich, daß die Schnittform von der gewünschten Form ist. Seien v der neue Strahl von X_{i+1} und v_{\pm} die benachbarten Strahlen, das heißt, nur für die entsprechenden Randdivisoren D_{\pm} ist $D_{\pm} \cdot R_{i+1} = 1 \neq 0$. Dann ist für $D \in \{P, R_1, \dots, R_i\}$ der Schnitt

$$D \cdot R_{i+1} = c_+ D_+ \cdot R_{i+1} + c_- D_- \cdot R_{i+1} + c_R R_{i+1}^2 = c_+ + c_- - c_R.$$

Da aber $D = b^* D$ ist $c_+ + c_- = c_R$. Somit ist $P \cdot R_{i+1} = R_j \cdot R_{i+1} = 0$ für $j < i + 1$.

Zur Gestalt des kanonischen Divisors bemerken wir nur, daß

$$K_{X_{i+1}} = b^* K_{X_i} + R_{i+1}.$$

\square

BEMERKUNG 1.30. Diese Aussage gilt wesentlich allgemeiner auf einer beliebigen glatten, projektiven Fläche X sofern wir statt $\text{Pic}(X)$ die endlich erzeugte, abelsche Gruppe $\text{Num}(X) = \text{Pic}(X) / \text{Pic}_0(X)$ betrachten (dabei sind $\text{Pic}_0(X)$ jene Cartierdivisoren, die numerisch äquivalent zur Null sind). Es folgt mittels des Indexsatzes von Hodge ([Har77, Theorem V.1.9]), daß zumindest nach Übergang zu Divisoren mit reellen Koeffizienten eine Basis existiert, die das Schnittprodukt mit Signatur $(+1, -1, \dots, -1)$ diagonalisiert.

Für rationale \mathbb{C}^* -Flächen kann die Aussage auch mit den T -Deformationen, wie sie in Kapitel 2 eingeführt werden, gezeigt werden. Nach Proposition 2.20 läßt sich jede rationale \mathbb{C}^* -Fläche durch T -Deformationen und T -Degenerationen in eine torische Fläche überführen. Nach den Propositionen 2.21 und 2.22 ergibt sich daraus ein Isomorphismus der Picardgruppen, der die Schnittpaarung und den kanonischen Divisor erhält.

T -Deformation rationaler \mathbb{C}^* -Flächen

Hier werde ich Ergebnisse aus [HI09] zitieren. Nach ein paar allgemeinen Fakten zu Deformationen torischer Flächen, werde ich Methoden vorstellen, wie sich bestimmte einparametrische Deformationen - genannt T -Deformation - mittels Zerlegung von Multidivisoren beschreiben lassen. Diese T -Deformationen sind zwar speziell, bilden aber nach Basiswechsel zu $\text{Spec } \mathbb{C}[\epsilon]/\langle \epsilon^2 \rangle$ ein Erzeugendensystem der infinitesimalen Deformationen erster Ordnung. Die Methode der Zerlegung läßt sich auch umkehren, um eine Beschreibung von T -Degenerationen zu erhalten, die auch eine recht einfache Beschreibung des Verhaltens von Divisoren unter T -Degeneration liefert.

Quellenangabe: Die allgemeine Theorie wird beispielsweise in in den Büchern [Ser06] und [Har10] dargestellt. Die Theorie für den Spezialfall, der hier behandelt wird, wurde in [Ilt09], [IV09] und [HI09] entwickelt.

KONVENTION. In diesem Kapitel sind wieder alle rationalen \mathbb{C}^* -Flächen glatt und projektiv. Im Kapitel 1 war Y stets eine Varietät, auf der wir einen divisorien Fächer betrachteten, um eine T -Varietät zu erhalten. Da wir uns im folgenden fast ausschließlich mit rationalen \mathbb{C}^* -Flächen beschäftigen werden, das heißt, der „Basisraum“ ist \mathbb{P}^1 , ist der Buchstabe Y wieder für andere Zwecke verfügbar. Außerdem sind mit Auf- bzw. Abblasungen stets bezüglich des Torus äquivalente Auf- bzw. Abblasungen gemeint.

3. T -Deformationen

Die Toruswirkung auf einer torischen Varietät führt dazu, daß die infinitesimalen Deformationen erster Ordnung bezüglich des Charaktergitters des Torus graduiert sind. Der Vektorraum dieser Deformationen wird üblicherweise mit T^1 bezeichnet.

PROPOSITION 2.1 ([Ilt09, Korollar 1.5]). *Sei X torische Fläche und $u \in M$. Dann ist*

$$\dim T^1(-u) = \# \{v_i \in \Sigma(1) \mid \langle v_i, u \rangle = 1 \text{ und } \langle v_{i\pm 1}, u \rangle > 0\}.$$

Im folgenden werden wir zu einem gegebenen $u \in M$, für welches $\dim T^1(-u)$ größer Null ist, das heißt, für welches eine infinitesimale Deformation über dem artinschen Ring $\text{Spec } \mathbb{C}[\epsilon]/\langle \epsilon^2 \rangle$ existiert, sogar eine Deformation über einer offenen Teilmenge von \mathbb{A}^1 konstruieren.

DEFINITION 2.2 (Zerlegung). Sei U eine Unterteilung von \mathbb{Q} mit den beschränkten Geradenstücken I_1, \dots, I_k derart angeordnet, daß $I_i \leq I_{i+1}$. Eine *Zerlegung* von U ist ein Paar (Z_+, Z_-) mit $Z_+ = (\Delta_1^+, \dots, \Delta_k^+)$ und $Z_- = (\Delta_1^-, \dots, \Delta_k^-)$ mit Polytopen Δ_i^\pm , sodaß für $1 \leq j \leq k$ gilt

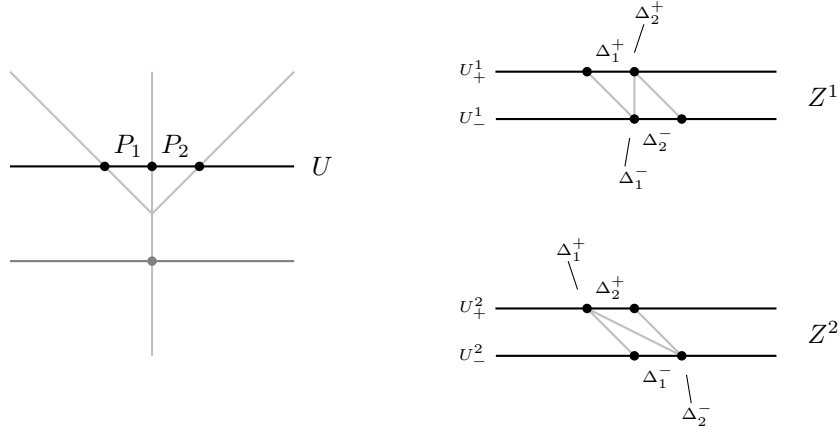


ABBILDUNG 9. Zwei Zerlegungen Z^1 und Z^2 , welche dieselbe Unterteilung (U_+, U_-) induzieren.

- (1) $I_j = \Delta_j^+ + \Delta_j^-$ und
- (2) entweder ist Δ_j^+ oder Δ_j^- ein Gitterpunkt.

Im folgenden werde ich für paarweise auftretende Objekte statt beispielsweise Z_+ und Z_- ein wenig kürzer nur Z_\pm schreiben. Durch Z_\pm wird eine Unterteilung U_\pm von \mathbb{Q} induziert. Wir nennen das Paar (U_+, U_-) eine *zerlegte Unterteilung* von U .

BEMERKUNG 2.3. Im Allgemeinen kann es verschiedene Zerlegungen (Z_+, Z_-) von U geben, welche dieselbe zerlegte Unterteilung (U_+, U_-) induzieren, für ein Beispiel siehe Abbildung 9. Den Geradenstücken I_j von U werden nämlich vermöge einer Zerlegung (Z_+, Z_-) noch zusätzlich Polyeder Δ_j^\pm aus beiden Unterteilungen U_\pm zugeordnet. Auf die die resultierende Deformation der Fläche wirkt sich dieser „Informationsüberschuß“ $I_j \mapsto \Delta_j^\pm$ durchaus aus. Ich verweise da auf die Bemerkung 2.24.

PROPOSITION 2.4 ([HI09, Theorem 2.1] + Definition). *Sei X eine rationale \mathbb{C}^* -Fläche gegeben durch einen Multidivisor $\mathcal{M} = \{\sum_P U_P \otimes P, m_{\geq}\}$ und (U_+, U_-) eine zerlegte Unterteilung von U_Q . OBdA. sei $Q = 0$. Sei*

$$B = \mathbb{A}^1 \setminus \{P \mid U_P \text{ ist nicht trivial und } P \neq 0\}.$$

Dann gibt es eine dreidimensionale T -Varietät \mathcal{X} samt Projektion $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B \subseteq \mathbb{A}^1$, für welche gilt:

- (1) $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$ ist eine einparametrische Deformation von $X = \pi^{-1}(0) =: X_0$, welche wir T -Deformation¹ nennen. Die Varietät \mathcal{X} ist der Totalraum der Deformation.

¹in [HI09] heißen solche Deformationen *homogen*.

(2) Die Fasern $X_t := \pi^{-1}(t)$ für $t \neq 0$ und $t \in B$ sind rationale \mathbb{C}^* -Flächen zum Multidivisor

$$\mathcal{M}^t = \left\{ U_+ \otimes 0 + U_- \otimes t + \sum_{P \notin B} U_P \otimes P, m_{\geq} \right\}.$$

BEMERKUNG 2.5 (+ Definition). Ist $X = X_0$ bereits torisch, das heißt, maximal zwei der Unterteilungen des Multidivisors sind nicht-trivial, dann treten in X_t maximal drei nicht-triviale Unterteilungen auf. Da drei beliebige Punkte auf \mathbb{P}^1 durch einen Automorphismus auf die Punkte 0, 1 und ∞ abgebildet werden können, ist nach Proposition 1.16 $X \cong U_0 \otimes 0 + U_\infty \otimes \infty$ und $X_t \cong U_+ \otimes 0 + U_- \otimes 1 + U_\infty \otimes \infty$ für $t \neq 0, \infty$. Sofern die allgemeine Faser mehr als drei nicht-triviale Unterteilungen haben, sind diese im Allgemeinen aus obigen Gründen nicht notwendigerweise zueinander isomorph.

In beiden Fällen werde ich die Schreibweise $X \rightsquigarrow Y$ verwenden, sobald es ein t mit $Y = X_t$ gibt.

KOROLLAR 2.6. Sei X eine torische Fläche. Aus der Beschreibung der Fasern in Proposition 2.4 läßt sich auch folgern, wann die allgemeine Faser Y wieder torisch ist. Zunächst bei einer trivialen T -Deformation, wo U_+ oder U_- eine triviale Unterteilung ist, und damit auch $Y \cong X$.

Eine nicht-triviale T -Deformation mit torischer allgemeiner Faser kann nur auftreten, wenn U_∞ trivial ist. Daraus ergibt sich eine Einschränkung an die Gestalt von X . Es braucht dafür ein $u \in M$, sodaß die Gerade $\langle u, - \rangle = -1$ genau einen Strahl v des Fächers von X schneidet, und zwar in einem Gitterpunkt. Mit anderen Worten, es bedarf einer Gerade $\langle u, - \rangle = 0$, sodaß für alle Strahlen v' des Fächers bis auf v gilt $\langle u, v' \rangle \geq 0$ und $\langle u, v \rangle = -1$, für ein Beispiel siehe Abbildung 9. Wenn wir X über die Selbstschnittzahlen beschreiben, heißt das, daß es eine Schnittzahl $a_i \geq 0$ gibt.

Eine wichtige Beobachtung ist, daß wir mit der Konstruktion aus Proposition 2.4 im wesentlichen schon alle Deformationen von einem torischen X kennen, wie folgende Proposition zeigt. Außerdem sollte spätestens damit der eventuelle Einwand, daß die Beschreibung einer torischen Fläche durch einen Multidivisor unnatürlich ist, weil dafür ein $0 \neq u \in M$ gewählt werden muß, entkräftet sein.

PROPOSITION 2.7 ([It09, Korollar 2.4]). Sei $0 \neq u \in M$. Sei X eine torische Fläche gegeben durch einen Multidivisor \mathcal{M} zur Richtung u . Die Menge aller T -Deformationen π erzeugt nach dem Basiswechsel $\text{Spec} \mathbb{C}[\epsilon] / \langle \epsilon^2 \rangle \rightarrow B \subset \mathbb{A}^1$ die infinitesimalen Deformationen $T_X^1(-u)$.

4. Degenerationsdiagramme

Im vorigen Abschnitt wurden T -Deformationen durch eine Zerlegung des Multidivisors beschrieben. Diese Beschreibung läßt sich auch umkehren; dadurch erhalten wir eine Vorschrift - genannt *Degenerationsdiagramm* - wie ein Multidivisor zusammengesetzt werden soll. Damit läßt sich dann in analoger Weise eine T -Degeneration beschreiben.

DEFINITION 2.8 (Degenerationsgraph, [HI09, Abschnitt 3.2]). Seien U_+ und U_- Unterteilungen von \mathbb{Q} . Ein *Degenerationsgraph* zu (U_+, U_-) ist ein zusammenhängender Graph G mit folgenden Eigenschaften

- (1) die Ecken von G sind die Unterteilungspunkte von U_+ und U_- ,
- (2) G ist bipartit bezüglich U_+ und U_- ,
- (3) wenn wir U_\pm in die Geraden $\langle [0, 1], - \rangle = \pm 1$ einbetten, dann kann G als planarer Graph realisiert werden, dessen Kanten Geradenstücke sind,
- (4) jede Ecke von G , dessen Grad größer als eins ist, ist ein Gitterpunkt.

BEMERKUNG 2.9 (Umrechnung Degenerationsgraph - Zerlegung). Gegeben eine Zerlegung (Z_+, Z_-) von einer Unterteilung U , das heißt, $Z_\pm = (\Delta_1^\pm, \dots, \Delta_n^\pm)$ mit $\Delta_j^+ + \Delta_j^- = I_j$, wobei I_j die beschränkten Geradenstücke von U sind. Diese Daten induzieren einen Degenerationsgraphen der zugehörigen zerlegten Unterteilung (U_+, U_-) , indem wir zwei Unterteilungspunkte p^+ und p^- verbinden, falls ein j gibt, sodaß p^+ und p^- Randpunkte von Δ_j^+ bzw Δ_j^- sind.

Sei umgekehrt (U_+, U_-) ein Paar von Unterteilungen und G der Degenerationsgraph dazu. Seien p_j^+ und p_j^- die Unterteilungspunkte von U_+ und U_- mit $p_j^\pm < p_{j+1}^\pm$. Da G zusammenhängend und planar ist, bildet $\overline{p_1^+ p_1^-}$ eine Kante des Graphen. Aus denselben Gründen muß entweder $\overline{p_1^+ p_2^-}$ oder $\overline{p_2^+ p_1^-}$ eine Kante von G sein. OBdA sei erstere eine Kante. Dann sind

$$\Delta_1^+ = \{p_1^+\} \text{ und } \Delta_1^- = [p_1^-, p_2^-]$$

die ersten Bestandteile der Zerlegung (Z_+, Z_-) . Induktives Vorgehen liefert die restlichen Δ_j^\pm . Die Unterteilung U wird dann durch die Geradenstücke $I_j = \Delta_j^+ + \Delta_j^-$ induziert. Diese Unterteilung U werde ich die *zusammengefaßte Unterteilung* von (U_+, U_-) nennen, auch werde ich die Schreibweise $U = U_+ + U_-$ verwenden.

Für ein Beispiel vom Zusammenhang zwischen Degenerationsgraph und Zerlegung siehe Abbildung 9.

BEMERKUNG 2.10 (T -Degeneration zum Graphen). Sei Y eine torische Varietät, die durch einen Multidivisor $\mathcal{M} = \{U_0 \otimes 0 + U_\infty \otimes \infty, m_\geq\}$ gegeben ist. Sei G ein Degenerationsgraph zu (U_0, U_∞) und $U = U_0 + U_\infty$ die zusammengefaßte Unterteilung. Dann ist durch den Multidivisor $\{U \otimes 0 + U(0) \otimes \infty, m_\geq\}$ ein X gegeben, das sich zu Y deformieren läßt (dabei ist $U(0)$ die triviale Unterteilung von \mathbb{Q} in \mathbb{Q}_+ und \mathbb{Q}_-). Die dafür benötigte Zerlegung kann aus dem Degenerationsgraphen, wie in Bemerkung 2.9 ausgeführt, berechnet werden. Ich werde im folgenden zum Paar (\mathcal{M}, G) *Degenerationsdiagramm* sagen, dabei beachte man, daß \mathcal{M} stets die allgemeine Faser Y kodiert.

BEISPIEL 2.11 (T -Deformation der Hirzebruchflächen). Sei \mathcal{F}_r eine Hirzebruchfläche mit $r \geq 0$. Ich werde hier die Notationen von Beispiel 1.21 weiterhin verwenden. Zunächst möchte ich die Wahlen von $0 \neq u \in M$ einschränken. Dafür wollen wir untersuchen, für welche u nach Proposition 2.1 $\dim T^1(u) > 0$ ist. Nach dieser Proposition bedarf es für T -Deformationen eines Strahls v_i , der von der Gerade $\langle u, - \rangle = 0$ (orientieren Gitter-) Abstand $+1$ hat, und dessen beiden benachbarten Strahlen $v_{i\pm 1}$ auf der gleichen Seite dieser Gerade wie v_i liegen. Als Kandidat für so einen Strahl kommt nur $v_2 = (0, 1)$ in Frage, und damit ergibt sich an u die Bedingung $\langle u, v_2 \rangle = 1$, das heißt, $u_2 = 1$. Zusätzlich muß

$$\langle [u_1, 1], v_1 \rangle = u_1 > 0 \text{ und } \langle [u_1, 1], v_3 \rangle = -u_1 + r > 0 \Leftrightarrow u_1 < r$$

sein. Also ist $u = [j, 1]$ für $0 < j < r$. Insbesondere gibt es keine T -Deformation für $\mathcal{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ und $\mathcal{F}_1 = \tilde{\mathbb{P}}^2$. Aus Proposition 2.7 folgt damit, daß es gar keine Deformationen für diese Flächen gibt.

Nun zum Multidivisor \mathcal{M} der zu einem solchen u gehört. Da nur $\langle u, v_4 \rangle = -1 < 0$ ist, ist $U_\infty = U(0)$ die triviale Unterteilung. Für U_0 wählen wir als Nullpunkt den Schnittpunkt mit v_2 . Die Gerade $\langle u, - \rangle = 1$ kann dann durch $v_2 + t \cdot (1, -j)$ parametrisiert werden. Dann ist $U_0 = U(t_3, 0, t_1)$ für t_1 und t_3 aus den Gleichungen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix} = s_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix} = s_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ r \end{pmatrix},$$

das heißt, $t_1 = 1/j > 0$ und $t_3 = \frac{1}{j-r} < 0$, sowie $s_1 = j$ und $s_3 = r - j$. Damit ist t_j ein Gitterpunkt der Unterteilung, falls $j = 1$ oder $j = r - 1$ (und nur für $r = 2$ tritt beides zugleich ein). Damit ist \mathcal{F}_r kodiert durch den Multidivisor \mathcal{M} zu $u = [j, 1] \in M$, wobei $0 < j < r$,

$$\mathcal{M} = \left\{ U \left(\frac{1}{j-r}, 0, 1/j \right) \otimes 0 + U(0) \otimes \infty, m_{\geq} = \circ \right\}.$$

Sei nun $1 < j < r - 1$. Dann gibt es auf U_0 nur den Gitterpunkt 0, also ist auch nur eine Zerlegung (Z_1, Z_2) von U_0 möglich (bis auf Vertauschen von Z_1 mit Z_2), nämlich

$$Z_1 = \left(\left[\frac{1}{j-r}, 0 \right], \{0\} \right) \quad \text{und} \quad Z_2 = (\{0\}, [0, 1/j]).$$

Damit deformiert \mathcal{F}_r zur Hirzebruchfläche gegeben durch den Multidivisor

$$\mathcal{M}^{r-2j} = \left\{ U \left(\frac{1}{j-r}, 0 \right) \otimes 0 + U(0, 1/j) \otimes \infty, m_{\geq} = \circ \right\}.$$

Daraus ergeben sich die Strahlen $(-1, r - j)$, $(1, j)$ und $(0, \pm 1)$. Nach einem \mathbb{Z} -Basiswechsel, der $(0, \pm 1)$ fix läßt und $(1, j) \mapsto (1, 0)$, sehen wir, daß \mathcal{M}^{r-2j} die Hirzebruchfläche \mathcal{F}_{r-2j} kodiert.

Sei nun $j = 1$ (der Fall $j = r - 1$ ist analog). Dann gibt es einen zusätzlichen Gitterpunkt $1/j = 1$ auf U_0 . Die Frage ist nun, ob sich daraus noch weitere nicht-triviale Zerlegungen von U_0 ergeben (neben der vorhin betrachteten, die hier auch möglich ist). Wenn aber

$$Z_1 = ([0, 1], \{1\})$$

Teil einer Zerlegung sein soll, dann muß

$$Z_2 = \left(\left\{ \frac{1}{j-r} \right\}, \left[\frac{1}{j-r}, 0 \right] \right)$$

sein. Das geht aber nur, wenn auch $\frac{1}{j-r}$ ein Gitterpunkt ist, also $1 = j = r - 1$ oder anders gesagt $r = 2$. Somit haben wir für $j = 1$ und $j = r - 1$ die obige Zerlegung, falls aber $r = 2$ ist, dann gibt es daneben noch die Zerlegung

$$(Z_1, Z_2) = (([0, 1], \{1\}), (\{-1\}, [-1, 0]))$$

die auch eine T -Deformation zu F_0 ergibt.

Ich möchte noch anmerken, daß die T -Deformationen symmetrisch bezüglich $\frac{r}{2}$ sind. Sei $0 < j \leq \frac{r}{2}$ und $j' = r - j$, dann ist $\mathcal{F}_{r-2j} \cong \mathcal{F}_{-(r-2j)} = \mathcal{F}_{r-2j'}$. Für den Multidivisor von \mathcal{F}_r bedeutet $j \leftrightarrow j'$ das Spiegeln von U_0 um den Ursprung. Für die deformierte Hirzebruchfläche ergibt sich ebenfalls ein Spiegeln der beiden Unterteilungen U_+ und U_- um den Ursprung.

Zusammengefaßt existieren für eine Hirzebruchfläche \mathcal{F}_r zumindest eine T -Deformation, sobald $r > 1$ ist. Konkret existiert eine T -Deformation zu

$$u = [j, 1] \quad \text{mit} \quad 0 < j < r,$$

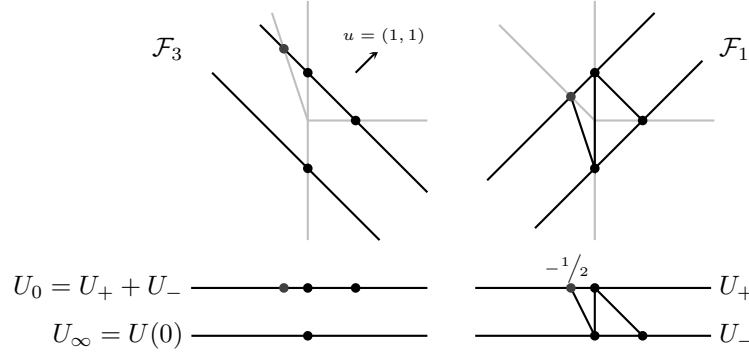


ABBILDUNG 10. Deformation der Hirzebruchfläche \mathcal{F}_3 zu $u = (1, 1)$.

woraus sich eine T -Deformation $\mathcal{F}_r \rightsquigarrow \mathcal{F}_{r-2j}$ ergibt. Der Multidivisor \mathcal{M}^r zu so einem u hat die Gestalt

$$\mathcal{M}^r = \left\{ U \left(\frac{1}{j-r}, 0, \frac{1}{j} \right) \otimes 0 + U(0) \otimes \infty, m_{\geq} = \circ \right\}.$$

Die möglichen Zerlegungen von U_+ sind

$$(Z_1, Z_2) = \left(\left(\left[\frac{1}{j-r}, 0 \right], \{0\} \right), (\{0\}, [0, \frac{1}{j}]) \right) \text{ für alle } r > 1 \text{ und}$$

$$(Z_1, Z_2) = (([0, 1], \{1\}), (\{-1\}, [-1, 0])) \text{ zusätzlich für } r = 2.$$

Damit ist der Multidivisor \mathcal{M}^{r-2j} der deformierten Hirzebruchfläche \mathcal{F}_{r-2j} von der Gestalt

$$\mathcal{M}^{r-2j} = \left\{ U \left(\frac{1}{j-r}, 0 \right) \otimes 0 + U \left(0, \frac{1}{j} \right) \otimes \infty, m_{\geq} = \circ \right\},$$

wobei die beiden verschiedenen Zerlegungen für \mathcal{F}_2 hier denselben Multidivisor \mathcal{M}^0 von \mathcal{F}_0 erzeugen.

Ein Beispiel für eine Deformation ist in der Abbildung 10 zu sehen. Die beiden Zerlegungen für \mathcal{F}_2 sind in Abbildung 9 zu sehen.

BEISPIEL 2.12 (Degenerationsgraph der Hirzebruchflächen). Nun möchte ich den Blickwinkel ändern und nun die entsprechenden T -Degenerationen betrachten. Es findet in diesem Beispiel also nur eine Umformulierung statt. Aus den Überlegungen zur T -Deformation in Beispiel 2.11 ergibt sich, daß wir auf \mathcal{F}_s einen Multidivisor der Form

$$\mathcal{M}^s = \left\{ \underbrace{U \left(-\frac{1}{s+j}, 0 \right)}_{U_+} \otimes 0 + \underbrace{U \left(0, \frac{1}{j} \right)}_{U_-} \otimes \infty, m_{\geq} = \circ \right\}$$

benötigen.

Zunächst möchte ich anmerken, daß \mathcal{F}_s sowohl zu \mathcal{F}_{s+2j} mit $j > 0$ als auch zu $\mathcal{F}_{-(s+2j)} = \mathcal{F}_{s+2j'}$ für $j' = -s-j < -s$ degenerieren kann. Wie ich schon in Beispiel 2.11 angemerkt habe, bedeutet das für die T -Degeneration das Spiegeln von U_+ und U_- um den Ursprung.

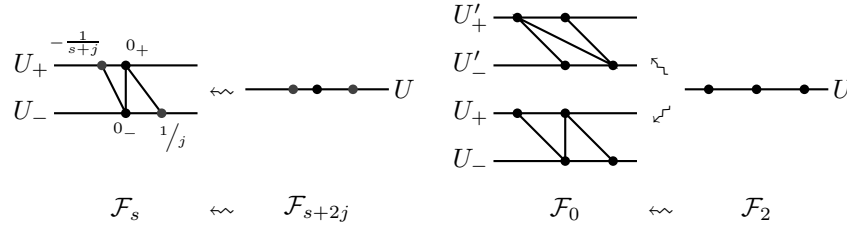


ABBILDUNG 11. Alle nicht-trivialen T -Deformationen von Hirzebruchflächen.

Die berechnete Zerlegung aus Beispiel 2.11 ergibt dazu den Degenerationsgraph G . Sei dafür 0_{\pm} der Unterteilungspunkt 0 auf U_{\pm} . Dann hat G die Kanten

$$-\frac{1}{s+j} - 0_-, \quad 0_- - 0_+ \quad \text{und} \quad 0_+ - \frac{1}{j}.$$

Die zweite Zerlegung, die nur für die Degeneration von \mathcal{F}_0 zu \mathcal{F}_2 möglich ist, induziert einen weiteren Graphen G' . Da in diesem Fall $s = 0$ und $j = 1$ ist, sind $\frac{1}{s+j} = \frac{1}{j} = 1$ und G' umfaßt die Kanten

$$0_- - -1, \quad -1 - +1 \quad \text{und} \quad +1 - 0_+.$$

die auch in Abbildung 11 zu sehen sind.

Als Konsequenz von Beispiel 2.11 erhalten wir das schon bekannte Resultat

PROPOSITION 2.13. *Sei \mathcal{F}_r eine Hirzebruchfläche mit $r \geq 0$. Es gibt eine Deformation $\mathcal{F}_r \rightsquigarrow \mathcal{F}_s$ genau dann, wenn $r > s > 0$ und $r \equiv s \pmod{2}$. Umgekehrt gibt es eine Degeneration von \mathcal{F}_r zu \mathcal{F}_s , sobald $s > r$ und $r \equiv s \pmod{2}$.*

Sei $X \rightsquigarrow Y$ eine T -Deformation. Dann können wir beispielsweise $X' \rightarrow X$ (T -äquivariant) aufblasen und uns fragen, ob es eine T -Deformation zu einer Aufblasung $Y' \rightarrow Y$ gibt, und falls ja, ob diese eindeutig ist. Dieselbe Frage können wir auch stellen, wenn wir mit einer Aufblasung von Y beginnen. Sofern $\rho(X) > 2$ ist, stellt sich diese Frage auch für Abblasungen von X bzw. Y .

LEMMA 2.14 ([HI09, Lemma 3.2]). *Sei $X \rightsquigarrow Y$ eine T -Deformation zum Degenerationsdiagramm (\mathcal{M}, G) . Sei $t - t'$ eine Kante von G , sodaß der Divisor $D_{t+t'}$ auf X Selbstschnitt -1 hat. Dann hat t oder t' als Ecke von G Grad 1 . Sollten beide Ecken Grad 1 haben, so ist die Deformation trivial.*

PROPOSITION 2.15 ([HI09, Proposition 3.3]+Definition). *Sei $X \rightsquigarrow Y$ eine T -Deformation von rationalen \mathbb{C}^* -Flächen kodiert durch das Degenerationsdiagramm (\mathcal{M}, G) .*

- (a) *Sei $X' \rightarrow X$ eine Aufblasung der speziellen Faser. Dann gibt es ein Degenerationsdiagramm (\mathcal{M}', G') , sodaß die zugehörige Fläche Y' zum Multidivisor \mathcal{M}' nicht nur die entsprechende T -Deformation von X' sondern auch eine Aufblasung von Y ist.*
- (b) *Sei $Y' \rightarrow Y$ eine Aufblasung der allgemeinen Faser. Dann gibt es ein eindeutiges Degenerationsdiagramm (\mathcal{M}', G') von Y' , sodaß die spezielle Faser X' auch eine Aufblasung von X ist.*

In beiden Fällen nennen wir (\mathcal{M}', G') eine bzw. die Aufblasung von (\mathcal{M}, G) induziert durch Aufblasen der speziellen bzw. allgemeinen Faser. Im Falle, daß der Picardrang $\rho(X) > 2$ ist, erhalten wir außerdem

- (c) Sei $X \rightarrow X''$ eine Abblasung der speziellen Faser. Dann existiert ein eindeutiges Degenerationsdiagramm (\mathcal{M}'', G'') , sodaß die Fläche Y'' zum Multidivisor \mathcal{M}'' nicht nur zu X'' degeneriert, sondern auch eine Abblasung von Y ist.

Wir nennen (\mathcal{M}'', G'') die Abblasung von (\mathcal{M}, G) induziert durch die Abblasung der speziellen Faser.

Außerdem ist (\mathcal{M}', G') eine Aufblasung von (\mathcal{M}, G) genau dann, wenn (\mathcal{M}, G) eine Abblasung von (\mathcal{M}', G') ist.

BEWEIS. Sei

$$\mathcal{M}_Y = \left\{ \sum_{i=0}^l U_i \otimes P_i, m_{\geq}^Y \right\}$$

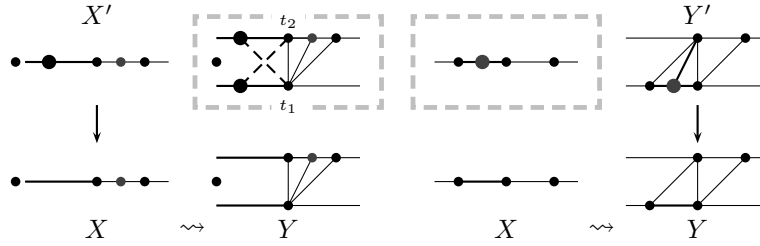
der Multidivisor zu Y . Der Degenerationsgraph G soll zu U_0 und U_1 sein, sodaß der Multidivisor zu X

$$\mathcal{M}_X = \left\{ U_G \otimes P_0 + \sum_{i=2}^l U_i \otimes P_i, m_{\geq}^X \right\}$$

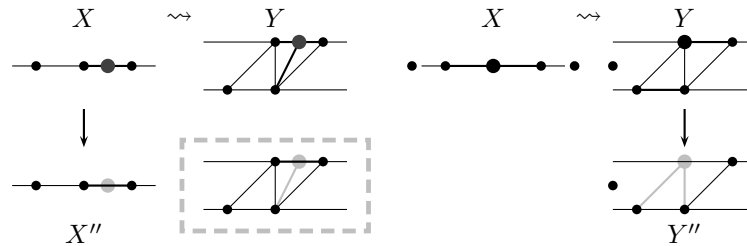
mit $U_G = U_0 + U_1$ ist. Sei $\mathcal{M}_{Y'}$, $\mathcal{M}_{X'}$, $\mathcal{M}_{Y''}$ und $\mathcal{M}_{X''}$ die entsprechenden Multidivisoren der Auf- bzw. Abblasungen. Falls sich die Auf- oder Abblasung außerhalb von U_0 und U_1 bzw. U_G abspielt, bleibt die Deformation bzw. Degeneration davon im wesentlichen unberührt. Dasselbe gilt für eine Auf- bzw. Abblasung, die für m_{\geq} den Übergang $\circ \rightarrow \bullet$ bzw. $\bullet \rightarrow \circ$ bedeutet. Sei also oBdA die Auf- bzw. Abblasung durch Hinzu- oder Wegnehmen eines Unterteilungspunkts in U_0 , U_1 oder U_G kodiert.

Zunächst betrachte ich die Aufblasung. Ich werde hierzu die \mathbb{C}^* -Flächen mit affinen torischen Karten überdecken, siehe Proposition 1.18 und Abbildung 4. Sei I ein Intervall der Form $]-\infty, a]$, $[a, b]$ oder $[a, \infty[$, das als Folge der Proposition einer affinen torischen Fläche isomorph zu \mathbb{A}^2 entspricht. Sei nun I_Y Teil von U_0 oder U_1 . Dann wird durch den Degenerationsgraphen ein eindeutiges $I_X = t + I_Y$ mit $t \in \mathbb{Q}$ als Teil von U_G bestimmt. Umgekehrt erhalten wir durch einen Teil I_X von U_G auch ein I_Y , das aber nicht eindeutig sein muß. Es kann I_Y unter Umständen als Teil sowohl von U_0 als auch von U_1 gewählt werden, als prototypisches Beispiel siehe Abbildung 12(a). In beiden Fällen erhalten wir dadurch isomorphe torische Umgebungen in X bzw. Y , in denen wir aufblasen, was einem Unterteilen der Intervalle durch c_Y bzw. $c_X = t + c_Y$ entspricht. Man sieht leicht, daß diese Aufblasungen eine Degeneration induzieren, denn die Randpunkte von I_Y sind jeweils mit demselben Unterteilungspunkt t auf der gegenüberliegenden Unterteilung verbunden, sodaß der Degenerationsgraph nur um die Kante $c_Y - t$ erweitert werden muß. Für Beispiele siehe Abbildungen 12(a) und 12(b).

Für die Abblasung $X \rightarrow X''$ gehen wir anders vor. Lemma 2.14 garantiert uns, daß zu einem exzeptionellen Divisor $D_{t_0+t_1}$ auf X für eine Kante $t_0 - t_1$ des Degenerationsgraphen, zumindest eine Ecke nur Grad 1 hat. Damit dürfen wir diese Kante aus G entfernen und erhalten eine eindeutige Deformation von $X'' \rightsquigarrow Y''$. Es bleibt nur noch die Frage, ob Y'' eine Abblasung von Y ist. Dafür brauchen wir aber nur die schon bewiesene Aussage zum Aufblasen bemühen. \square



(a) Aufblasen der speziellen Faser X mit zwei Möglichkeiten, die allgemeine Faser Y aufzublasen. (b) Aufblasen der allgemeinen Faser Y .



(c) Abblasen der speziellen Faser X . (d) Zum Abblasen der allgemeinen Faser Y .

ABBILDUNG 12. Zur Proposition 2.15

BEMERKUNG 2.16. Ein Beispiel dafür, daß es nicht notwendigerweise eine Abblasung von (\mathcal{M}, G) induziert durch die Abblasung der allgemeinen Faser gibt, ist in Abbildung 12(d) zu sehen.

Insgesamt ergibt sich damit für T -Deformationen und T -Degenerationen eine ähnliche Beweistechnik wie bei rationalen Flächen. Wir werden oft nur den Fall der Hirzebruchfläche untersuchen, sowie das Verhalten unter Auf- bzw. Abblasen.

BEMERKUNG 2.17 (+ Definition). Sei $X = \text{TV}(a_1, \dots, a_n)$ eine torische Fläche mit $a_1 > 0$ und $n \geq 4$. Nach Korollar 2.6 können in diesem Falle nicht-triviale T -Deformationen von X auftreten. Wir wollen nun X ein wenig genauer untersuchen.

Auf einer Hirzebruchfläche \mathcal{F}_r mit $r > 0$ gibt nur den Strahl mit Erzeuger v , sodaß $D_v^2 = r > 0$ ist. Eine Besonderheit von v ist, daß auch $-v$ ein Strahlerzeuger des Fächers ist. Durch Aufblasen werden die Selbstschnittzahlen nicht größer, siehe Lemma 1.23, also kann für eine allgemeine, torische Fläche wie X der Strahl v_1 mit $D_1^2 = a_1 > 0$ nur das Relikt dieses Strahlerzeugers v einer Hirzebruchfläche sein. Insbesondere gibt es ein $1 < l < n$, sodaß der Strahl v_l von X gerade $-v_1$ ist.

Außerdem gilt für die Schnittzahlen

$$[a_2, \dots, a_{l-1}] = 0 = [a_{l+1}, \dots, a_n],$$

wobei für $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{Z}$ der Kettenbruch $[c_1, \dots, c_k]$ induktiv definiert wird, nämlich

$$[c_k] := c_k \text{ und } [c_1, \dots, c_k] = c_1 - 1/[c_2, \dots, c_k].$$

Diese Aussage zu den Schnittzahlen läßt sich leicht induktiv zeigen, auf der Hirzebruchfläche ist sie klar, und für den Induktionsschritt verwende man Lemma 1.23.

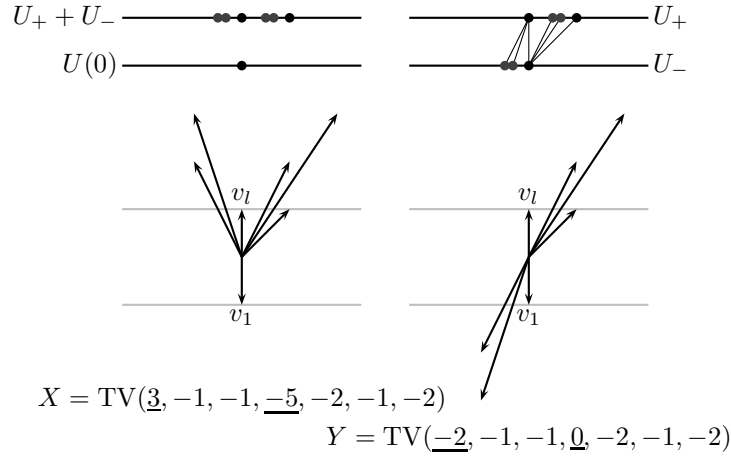


ABBILDUNG 13. Eine Beispieldeformation zu Proposition 2.18

Alleine über die Schnittzahlen lassen sich einige T -Deformationen von torischen Flächen beschreiben.

PROPOSITION 2.18 ([HI09, Theorem 3.4]). *Sei $X = \text{TV}(a_1, \dots, a_n)$ eine torische Fläche mit $n > 3$ und $a_1 > 0$. Dann gibt es ein $1 < l \leq n$, sodaß für die Strahlen $-v_1 = v_l$ gilt (siehe Bemerkung 2.17). Sei*

$$\gamma = \sum_{i=2}^{l-1} (a_i + 3) - 3.$$

Dann gibt es für $0 \leq r \leq a_1$ eine T -Deformation mit allgemeiner torischer Faser

$$Y = \text{TV}(a_1 - \gamma - 2r, a_{l-1}, \dots, a_2, a_l + \gamma + 2r, a_{l+1}, \dots, a_n).$$

BEMERKUNG 2.19. Ich möchte noch betonen, daß für torische Flächen mit $a_i \leq 0$ für alle i durchaus T -Deformationen existieren können. Beispielsweise existiert eine T -Deformation $\text{TV}(-1, -1, -2, -1, -1, 0) \rightsquigarrow \text{TV}(-1, -1, -1, -1, -1, -1)$. Für Details siehe den Beweis von Lemma 4.15 bzw. Abbildung 17.

PROPOSITION 2.20 ([HI09, Theorem 3.5] + Definition). *Seien X und Y zwei rationale \mathbb{C}^* -Flächen vom selben Picardrang $\rho > 2$. Dann sind diese deformationsverbunden, das heißt, es gibt X_0, \dots, X_k mit $X_0 = X$ und $X_k = Y$, sodaß entweder $X_i \rightsquigarrow X_{i+1}$ oder $X_{i+1} \rightsquigarrow X_i$ ist.*

5. T -Deformationen und Geradenbündel

Sei $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$ eine T -Deformation von $X = X_0$. In [HI09, Abschnitt 2.2] werden auf dem Totalraum \mathcal{X} gewisse T -invariante Divisoren konstruiert, die sich zu T -invarianten Divisoren auf jeder Faser X_t mit $t \in B$ einschränken lassen. Die Beschreibung von Divisoren auf \mathcal{X} ist leider nicht so einfach wie für rationale \mathbb{C}^* -Flächen, sodaß ich darauf verzichten und mich auf die Ergebnisse konzentrieren werde.

Außerdem möchte ich noch darauf hinweisen, daß in [HI09] nicht nur glatte und vollständige Varietäten betrachtet werden. Der Preis hierfür ist, daß nur eine

Untergruppe $\text{Pic}'(X_s)$ von $\text{Pic}(X_s)$ betrachtet wird. In unserer Situation (glatt und projektiv) ist diese Unterscheidung nicht notwendig.

In folgender Proposition bezeichne ich mit $K(G)$ die Kanten eines Graphen G . Ich möchte noch in Erinnerung rufen, daß mit $\lambda(t)$ für einen Unterteilungspunkt t , der Nenner des gekürzten Bruchs dieser rationalen Zahl gemeint ist.

PROPOSITION 2.21 ([HI09, Theorem 2.4, Proposition 3.10]). *Sei (\mathcal{M}, G) ein Degenerationsdiagramm, wobei G die Unterteilungen U_0 und U_s verbinde ($s \neq 0$), und $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$ die entsprechende T -Deformation. Dann gibt es einen Isomorphismus $\varpi : \text{Pic}(X_s) \rightarrow \text{Pic}(X_0)$ der Picardgruppen. Diese Abbildung ϖ läßt sich aus dem Degenerationsdiagramm folgendermaßen ablesen:*

$$D_{\geq}^{(s)} \mapsto D_{\geq}^{(0)}$$

$$D_{t,i}^{(s)} \mapsto \begin{cases} D_{t,i}^{(0)} & \text{falls } t \notin U_0, U_s \\ \sum_{\bar{t}' \in K(G)} \lambda(t') D_{t+t',i}^{(0)} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei sei D_{\geq} der Divisor zu $m_{\geq} = \bullet$ und $D_{t,i}$ der Divisor zum Unterteilungspunkt $t \in U_i$. Mit $D^{(0)}$ bzw. $D^{(s)}$ verweise ich nur darauf, ob der Divisor auf der Faser X_s oder X_0 lebt.

Sobald wir Deformationen zur Untersuchung von exzeptionellen Geradenbündeln verwenden, wird folgende Proposition sehr wichtig.

PROPOSITION 2.22 ([HI09, Theoreme 2.6 und 2.7]). *Sei $\varpi : \text{Pic}(X_s) \rightarrow \text{Pic}(X_0)$ die Abbildung aus Proposition 2.21. Dann erhält ϖ die Schnittpaarung und den kanonischen Divisor, das heißt*

$$\varpi(D) \cdot \varpi(D') = D \cdot D' \text{ und } \varpi(K_{X_s}) = \varpi(K_{X_0}).$$

BEISPIEL 2.23. Ich führe hier das Beispiel 2.12 weiter und untersuche das Verhalten der Divisoren auf Hirzebruchflächen unter T -Degeneration. Für eine Zusammenfassung aller nicht-trivialen T -Degeneration von Hirzebruchflächen siehe auch Abbildung 11 (ich werde die dortigen Notationen im folgenden verwenden).

Zunächst die Degeneration $\mathcal{F}_r \leftarrow \mathcal{F}_{r+2j}$ mit $0 < j < r/2$. Nach Beispiel 2.12 wird diese beschrieben durch den Multidivisor von \mathcal{F}_r

$$\mathcal{M}^s = \left\{ U \left(-\frac{1}{r+j}, 0 \right) \otimes 0 + U \left(0, \frac{1}{j} \right) \otimes \infty, m_{\geq} = \circ \right\}$$

und das Degenerationsdiagramm, das durch die Kantenfolge

$$-\frac{1}{r+j} - 0_- - 0_+ - \frac{1}{j}$$

bestimmt ist, siehe auch Abbildung 11.

Damit gilt für die Abbildung der Divisoren

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{N}} \leftarrow \mathbb{N} & \leftarrow & \overline{\mathbb{N}} \\ \varpi : \text{Pic}(\mathcal{F}_r) & \rightarrow & \text{Pic}(\mathcal{F}_{r+2j}) \\ D_1 = D_{\frac{1}{j}, -} & \mapsto & D_{0+\frac{1}{j}} = D_1 \\ D_2 = D_{0, +} & \mapsto & D_{0+0} + j D_{0+\frac{1}{j}} = D_2 + j D_1 \\ D_3 = D_{-\frac{1}{r+j}, +} & \mapsto & D_{-\frac{1}{r+j}+0} = D_3 \\ D_4 = D_{0, -} & \mapsto & D_{0+0} + (r+j) D_{0-\frac{1}{r+j}} = D_2 + (r+j) D_1 \end{array},$$

wobei ich verwendet habe, daß $\lambda\left(-\frac{1}{r+j}\right) = r+j$ und $\lambda\left(\frac{1}{j}\right) = j$ ist.

Für die nef-Basen P_n, Q_n bzw. guten Basen P, R_1 (sofern $r = 2a + 1$ ungerade ist) von $\text{Pic}(\mathcal{F}_r)$ und $\text{Pic}(\mathcal{F}_{r+2j})$ ergibt sich damit

$$\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \longrightarrow$$

$$\begin{aligned} \varpi : \text{Pic}(\mathcal{F}_r) &\rightarrow \text{Pic}(\mathcal{F}_{r+2j}) \\ P_n = D_1 &\mapsto D_1 = P_n \\ Q_n = D_4 &\mapsto (D_2 + (r+2j)D_1) - jD_1 = Q_n - jP_n \ . \\ P = Q_n - aP_n &\mapsto Q_n - (a+j)P_n = P \\ R_1 = Q_n - (a+1)P_n &\mapsto Q_n - (a+j+1)P_n = R_1 \end{aligned}$$

Man beachte, daß beide Basen in Abhängigkeit vom Parameter der jeweiligen Hirzebruchfläche \mathcal{F} definiert sind. Hier offenbart sich ein weiterer Vorteil der *guten* Basis P, R_1 von $\text{Pic}(\mathcal{F})$, diese diagonalisiert nicht nur die Schnittpaarung, sondern bleibt außerdem invariant unter T -Deformationen (was ein wenig mehr als eine Konsequenz aus Proposition 2.22 ist).

Man rechnet leicht nach, dass die Degeneration $\mathcal{F}_r \rightsquigarrow \mathcal{F}_{-(r+2j)}$ hier nichts neues liefert.

Der Fall $r = 0$ liegt etwas anders. Wie schon in Beispiel 2.12 bemerkt, gibt es zwei Degenerationen von \mathcal{F}_0 zu \mathcal{F}_2 .

$$\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \longrightarrow$$

$$\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \longrightarrow$$

$$\begin{aligned} \varpi_1 : \text{Pic}(\mathcal{F}_0) &\rightarrow \text{Pic}(\mathcal{F}_2) & \varpi_2 : \text{Pic}(\mathcal{F}_0) &\rightarrow \text{Pic}(\mathcal{F}_2) \\ P_n &\mapsto P_n & P_n &\mapsto Q_n - P_n \\ Q_n &\mapsto Q_n - P_n & Q_n &\mapsto P_n \end{aligned}$$

Dabei sieht man, daß die Rollen von P_n und Q_n auf \mathcal{F}_0 bei der Degeneration zu \mathcal{F}_2 vertauscht werden. Das ist ein Punkt, der uns noch in Kapitel 4 beschäftigt wird.

BEMERKUNG 2.24. Die zwei verschiedenen Degenerationen von \mathcal{F}_0 zu \mathcal{F}_2 können also in ihrer Auswirkung auf Geradenbündel unterschieden werden, obwohl die Fasern der Totalräume zu dieser Degeneration gleich sind (die spezielle Faser ist \mathcal{F}_2 und die allgemeine Faser \mathcal{F}_0). Die beiden Totalräume unterscheiden sich durch einen Flip im divisorischen Fächer der Form $\square \leftrightarrow \square$, der aus den beiden verschiedenen Degenerationsgraphen resultiert. Für eine genauere Ausarbeitung benötigt es aber einer Beschreibung des divisorischen Fächers der Totalräume wie in [HI09, Abschnitt 2.1].

Mithilfe der folgenden Proposition und Proposition 2.15 läßt sich das Verhalten von Divisoren unter T -Degenerationen auf das vorangegangene Beispiel reduzieren.

PROPOSITION 2.25 ([HI09, Proposition 3.11]). *Sei (\mathcal{M}, G) ein Degenerationsdiagramm und (\mathcal{M}', G') eine Aufblasung dazu. Weiters seien $b_0 : X'_0 \rightarrow X_0$ und $b_s : X'_s \rightarrow X_s$ die Aufblasungen der speziellen und allgemeinen Faser mit exzeptionellem Divisor R_0 bzw. R_s , sowie ϖ und ϖ' die Isomorphismen der Picardgruppen.*

Dann gilt $\varpi'(R_s) = R_0$ und folgendes Diagramm ist kommutativ

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(X'_s) & \xrightarrow{\varpi'} & \text{Pic}(X'_0) \ . \\ b_s^* \uparrow & & \uparrow b_0^* \\ \text{Pic}(X_s) & \xrightarrow{\varpi} & \text{Pic}(X_0) \end{array}$$

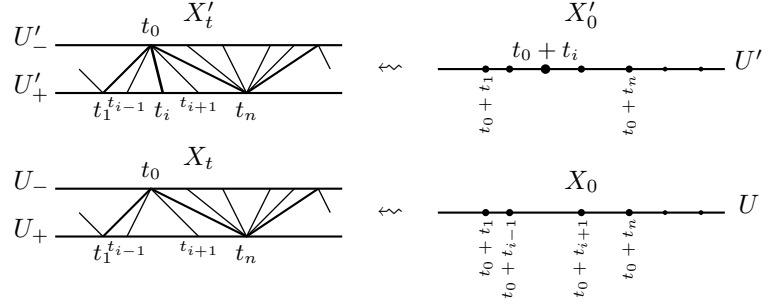


ABBILDUNG 14. Die Aufblasung wird durch Einfügen des Divisors $D_{t_i,+}$ realisiert.

BEWEIS. Nach Proposition 1.20 können wir die Aussage über die T -invarianten Divisoren der Form $D_{t,P}$ und D_{\geq} nachprüfen.

Seien U_+ und U_- die beiden Unterteilungen, die durch den Degenerationsgraphen G verbunden sind. Sobald außerhalb dieser beiden Unterteilungen aufgeblasen wird, gibt es zwischen ϖ und ϖ' keinen wesentlichen Unterschied. Ein weiterer Spezialfall ist, wenn durch die Aufblasung m_{\geq} zu \bullet wird. Aber nach Proposition 2.21 wird D_{\geq}^s von ϖ' wieder auf D_{\geq}^0 abgebildet und die restlichen Divisoren bleiben davon unberührt. Damit sei also der neue Unterteilungspunkt oBdA. $t_i \in U_+$. Sei t_0 solcher Art, daß $t_0 - t_i$ eine Kante von G' ist. Mit $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n$ seien die restlichen Nachbarn von t_0 im Graphen G' bezeichnet (das sind alle Nachbarn im Graphen G).

Ich werde mit Abbildung 14 argumentieren und betrachte nun die Kante $t_0 - t_i$ genauer (diese Kante ist sogar die einzige Kante, an der t_i beteiligt ist). Zunächst möchte ich den Fall betrachten, daß es zwei benachbarte Gitterpunkte t_{i-1} und t_{i+1} von t_i in U_+ gibt. Außerhalb des Dreiecks $\Delta(t_0, t_{i-1}, t_{i+1})$ ändert sich das Degenerationsverhalten der T -invarianten Divisoren unter Aufblasung nicht.

Wir brauchen also nur die Divisoren $D_{t_j,+}^s$ für $j = 0, i \pm 1$ betrachten. Sei $\lambda_i = \lambda(t_i)$. Damit können wir deren Degenerationen folgendermaßen schreiben

$$\varpi(D_{t_0,-}^s) = \sum_{j \neq i} \lambda_j D_{t_j+t_0}^0, \quad \varpi(D_{t_{i \pm 1},+}^s) = \lambda_0 D_{t_0+t_{i \pm 1}}^0.$$

Durch Aufblasen wird daraus

$$b_0^* \varpi(D_{t_0,+}^s) = \sum_{j \neq i} \lambda_j D_{t_j+t_0}^0 + (\lambda_{i-1} + \lambda_{i+1}) D_{t_i+t_0}^0 = \sum_j \lambda_j D_{t_j+t_0}^0$$

(aufgrund der Glattheit ist $\lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} = \lambda_i$, siehe Bemerkung 1.25) bzw.

$$b_0^* \varpi(D_{t_{i \pm 1},+}^s) = \lambda_0 D_{t_0+t_{i \pm 1}}^0 + \lambda_0 D_{t_0+t_i}^0.$$

Umkehrt ist für die Aufblasung $b_s : X'_s \rightarrow X_s$

$$b_s^*(D_{t_0,+}^s) = D_{t_0}^0, \quad b_s^*(D_{t_{i \pm 1},+}^s) = D_{t_{i \pm 1}}^0 + D_{t_i}^0.$$

Nun die Degeneration durch $\varpi' : \text{Pic}(X'_s) \rightarrow \text{Pic}(X'_0)$.

$$\varpi' b_s^*(D_{t_0,+}^s) = \sum_j \lambda_j D_{t_0+t_j}^0, \quad \varpi' b_s^*(D_{t_{i \pm 1},+}^s) = \lambda_0 D_{t_{i \pm 1}}^0 + \lambda_0 D_{t_i}^0.$$

Wir sind noch nicht ganz fertig, denn es gibt noch den Spezialfall, daß der neue Unterteilungspunkt t_i am Rande der Unterteilung U_+ liegt, es also entweder kein t_{i-1} oder t_{i+1} gibt. Falls zusätzlich $m_{\geq} = \bullet$ ist, dann ergibt sich eine völlig analoge Argumentation, indem D_{\geq}^s die Rolle von $D_{t_{i\pm 1},+}^s$ übernimmt. Aber selbst wenn $m_{\geq} = \circ$ ist, muß die obige Argumentation nur unwesentlich angepaßt werden. \square

BEMERKUNG 2.26. Der Beweis der vorangegangenen Proposition wird in [HI09] unter Verwendung einer Beschreibung von Cartierdivisoren auf T -Varietäten mittels stückweise linearer Funktionen geführt. Da ich diese Beschreibungsart in dieser Arbeit nicht benötige, habe ich mich dafür entschieden, den Beweis etwas technischer, technischer, mit den hier vorgestellten Mitteln zu führen.

Exzeptionelle Folgen und torische Systeme

Nach ein paar allgemeinen Bemerkungen zu exzeptionellen Folgen werde ich hier hauptsächlich auf Resultate aus [HP08] eingehen. In diesem Artikel von Lutz Hille und Markus Perling wurde bemerkt, daß sich zu einer exzeptionellen Folge aus Geradenbündeln auf einer rationalen (glatten und projektiven) Fläche stets eine torische Fläche assoziieren läßt. Eine weitere, wichtige Idee aus [HP08] ist, daß es eine Aufblasung $X \rightarrow Y$ erlaubt, eine exzeptionelle Folge auf Y zu einer exzeptionellen Folge auf X zurückzuziehen.

Quellenangabe: Die Grundlagen der derivierten Kategorien in der algebraischen Geometrie wird in [Huy06] sehr schön dargestellt, ich werde mich notationell auch weitgehend an dieses Buch halten. Für den Zusammenhang zwischen exzeptionellen Folgen und torischen Flächen verwende ich die Artikel [HP06] und [HP08].

6. Derivierte Kategorien und exzeptionelle Folgen

KONVENTION. In dieser Arbeit werde ich unter der derivierten Kategorie $\mathcal{D}^b(X)$ einer Varietät X stets die beschränkte, derivierte Kategorie kohärenter Garben auf X verstehen. In diesem Abschnitt darf k ein beliebiger Körper sein.

Um die derivierte Kategorie einer Varietät besser zu verstehen, bietet sich die Suche nach einem möglichst „einfachen“ Erzeugendensystem an. Dabei liegt natürlich es im Auge des Betrachters, was einfach ist. Ein Ansatz sind exzeptionelle Objekte.

DEFINITION 3.1. Sei E ein Objekt in $\mathcal{D}^b(X)$ (oder allgemeiner in einer k -linearen triangulierten Kategorie). Falls

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(X)}(E, E[i]) = \begin{cases} k & \text{für } i = 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist, dann heißt E *exzeptionell*.

Eine (endliche) Folge exzeptioneller Objekte $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$ heißt *exzeptionell*, falls

$$\mathrm{Hom}(E_i, E_j[k]) = 0 \text{ für alle } k \text{ und } i > j$$

ist.

Sofern eine exzeptionelle Folge \mathcal{E} die Kategorie $\mathcal{D}^b(X)$ als triangulierte Kategorie erzeugt, dann heißt Folge *voll*.

Eine exzeptionelle Folge, die zusätzlich

$$\mathrm{Hom}(E_i, E_j[k]) = 0 \text{ für } k > 0 \text{ und } i < j$$

erfüllt, heißt *streng*.

BEMERKUNG 3.2 (+ Definition). Es ist vielleicht nicht klar, was mit „Kategorie erzeugen“ gemeint ist. Sei M eine Menge von Objekten in $\mathcal{D}^b(X)$ (oder allgemeiner: in einer triangulierten Kategorie). Dann ist das Erzeugnis $\langle M \rangle$ die kleinste volle triangulierte Unterkategorie von $\mathcal{D}^b(X)$, die M enthält. Falls die Einbettung von $\langle M \rangle$ eine Äquivalenz zwischen $\langle M \rangle$ und $\mathcal{D}^b(X)$ ist, dann sagen wir, daß M die Kategorie $\mathcal{D}^b(X)$ erzeugt.

Diese Definition läßt sich auch anders formulieren. Sei $M_0 = M$. Dann definieren wir M_{i+1} als die Menge jener Objekte, die wir aus M_i durch direkte Summen, Shifts und Kegelsbildung erhalten. Dann ist $\langle M \rangle = \bigcup M_i$.

DEFINITION 3.3. Sei (E, F) ein exzeptionelles Paar. Die (Links)-*Mutation* von F mittels E ist ein Objekt $L_E F$ in $\mathcal{D}^b(X)$ das in folgendes Dreieck paßt

$$L_E F \rightarrow \bigoplus_l \text{Hom}(E, F[l]) \otimes E[-l] \xrightarrow{\text{can}} F \rightarrow L_E F[1].$$

Die *Rechtsmutation* wird dual dazu definiert als Objekt $R_F E$ im Dreieck

$$E \xrightarrow{\text{can}^*} \bigoplus_l \text{Hom}(E, F[l])^*[l] \otimes F \rightarrow R_F E \rightarrow E[1].$$

BEMERKUNG 3.4. Da im folgenden fast ausschließlich Linksmutationen verwendet werden, werde ich den Zusatz „Links-“ weglassen. Man beachte, daß beide Mutationen im wesentlichen Abbildungskegel des kanonischen Einsetzungsmorphismus can bzw dessen Dual can^* sind. Außerdem sind Links- und Rechtsmutation, wie schon die Bezeichnungen vermuten lassen, invers zueinander.

Sei $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$ eine exzeptionelle Folge. Dann schreiben wir

$$L_i \mathcal{E} = (E_1, \dots, E_{i-1}, L_{E_i} E_{i+1}, E_i, E_{i+2}, \dots, E_n)$$

für die an der Stelle i mutierte, exzeptionelle Folge. Nach [Rud90] ist $L_i \mathcal{E}$ ebenfalls exzeptionell.

7. Torische Systeme

Ein Ziel dieser Arbeit ist es, die Menge aller vollen, exzeptionellen Folgen (aus Geradenbündeln) auf (glatten, projektiven) rationalen Flächen genauer zu untersuchen.

KONVENTION. Im folgenden werden die Geradenbündel stets auf einer glatten, projektiven, rationalen Fläche leben.

Zwischen Divisorenklasse D und Geradenbündel $\mathcal{O}(D)$ möchte ich nicht unterscheiden und gehe sogar soweit, auch für Geradenbündel die additive Schreibweise zu verwenden.

Exzeptionelle Folgen sollen in diesem Kapitel stets aus Geradenbündeln bestehen.

PROPOSITION 3.5. Sei $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$ eine volle, exzeptionelle Folge auf einer rationalen Fläche X . Dann ist n gleich dem Rang der Grothendieck-Gruppe $K_0(X)$.

BEWEIS. Sei $\pi : \mathcal{D}^b(X) \rightarrow K_0(X)$ mit $\pi(K^\bullet) = \sum_i (-1)^i [K^i]$ die Projektion von der derivierten Kategorie auf die Grothendieck-Gruppe. Da π surjektiv ist, kann nur $\text{rk } K_0(X) \leq n$ sein.

In $K_0(X)$ gibt es eine Bilinearform, nämlich die Eulerpaarung $\chi([E], [F])$ für $[E], [F] \in K_0(X)$. Sei A die Matrix mit den Einträgen $A_{ij} = \chi(\pi(E_i), \pi(E_j))$. Da die Folge exzeptionell ist, erhalten wir eine obere $n \times n$ -Dreiecksmatrix, deren Diagonale aus Einsen besteht. Damit ist aber das Bild der exzeptionellen Folge linear unabhängig. \square

KONVENTION (+ Bemerkung). Im folgenden werden ich mit n stets den Rang der Grothendieck-Gruppe meinen. Im Falle torischer Flächen ist das gerade die Anzahl der Strahlen.

BEMERKUNG 3.6 (+Vermutung). Die Frage, ob eine exzeptionelle Folge maximaler Länge bereits voll ist, bleibt ungelöst. Im Falle einer Folge aus Geradenbündeln auf einer projektiven torischen Fläche X , vermute ich sehr stark eine positive Beantwortung. Auf Details kann ich etwas später in Bemerkung 3.39 eingehen.

DEFINITION 3.7 (Verschiebung). Sei $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$ eine exzeptionelle Folge von Geradenbündeln und L ein weiteres Geradenbündel. Dann ist die *Verschiebung*

$$\mathcal{E} + L := (E_1 + L, \dots, E_n + L)$$

wieder eine exzeptionelle Folge.

Damit können wir jede exzeptionelle Folge $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$ *normalisieren* zu $\mathcal{E} - E_1$, sodaß diese normalisierte Folge mit \mathcal{O}_X beginnt. Aufgrund dieser Beobachtung kam Hille und Perling in [HP08] die Idee, daß eigentlich die *Differenzen* zwischen den einzelnen E_i entscheidend sind.

DEFINITION 3.8 (Torisches System). Sei $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$ eine (volle) exzeptionelle Folge. Wir definieren die Differenzen

$$A_i := E_{i+1} - E_i \quad \text{und} \quad A_n := -K_X - \sum_{i=1}^{n-1} A_i = E_1 - K_X - E_n$$

und nennen $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_n)$ (*volles*) *exzeptionelles, torisches System*.

BEMERKUNG 3.9. Ich möchte hier betonen, daß die Fläche X , auf der sich ein torisches System \mathcal{A} befindet, selber keineswegs torisch sein muß. Das Adjektiv „torisch“ rührt daher, daß sich zu \mathcal{A} eine torische Fläche assoziieren läßt (die insbesondere von X verschieden sein kann).

Falls umgekehrt ein exzeptionelles, torisches System $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_n)$ vorliegt, können wir dazu folgende exzeptionelle Folge

$$\left(\mathcal{O}, A_1, A_1 + A_2, \dots, \sum_{i=1}^{n-1} A_i \right)$$

hinschreiben, die Normalisierung zur ursprünglichen exzeptionellen Folge \mathcal{E} . Insbesondere unterscheiden sich die torischen Systeme zu zwei exzeptionellen Folgen, die sich nur durch eine Verschiebung unterscheiden, nicht.

Die Definition von A_n erscheint im Moment wahrscheinlich etwas willkürlich. Im Folgenden wird aber hoffentlich klar, daß diese Definition durchaus sinnvoll ist. Zunächst möchte ich noch bemerken, daß mit dieser Definition stets $\sum_i A_i = -K_X$ ist.

LEMMA 3.10 ([**HP08**, Lemma 3.3]). Seien D, E mit $\chi(-D) = 0 = \chi(-E)$. Dann ist $D^2 = \chi(D) - 2$. Genau dann ist $\chi(D - E) = 0$, wenn $D \cdot E = \chi(D) - 1$.

BEWEIS. Es ist $\chi(\pm D) = 1 + \frac{1}{2}(D^2 \mp K_X \cdot D)$, damit ist $\chi(D) = \chi(D) + \chi(-D) = 2 + D^2$. Die zweite Aussage ergibt sich direkt aus der allgemein gültigen Rechnung $\chi(D+E) = 1 + \frac{1}{2}((D+E)^2 - K_X \cdot (D+E)) = \chi(D) + \chi(E) + D \cdot E - 1$. \square

BEMERKUNG 3.11. Sei $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_n)$ ein exzeptionelles, torisches System. Dann gilt:

- (1) $A_i \cdot A_{i+1} = 1$,
- (2) $A_i \cdot A_j = 0$ für $i \neq j$ und $j \neq i \pm 1$ sowie
- (3) $\sum A_i = -K_X$.

Dabei ist sollen i und j zyklische Indizes sein, das heißt, $i, j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{1, \dots, n\}$.

BEWEIS. Der dritte Punkt gilt aufgrund der Wahl von A_n . Für die beiden ersten Punkte sei $i < j$. Man beachte, daß $\chi(E_i - E_j) = 0$ ist, also $E_i \cdot E_j = \chi(E_i) - 1$. Damit rechnen wir

$$\begin{aligned} A_i \cdot A_j &= (E_{i+1} - E_i) \cdot (E_{j+1} - E_j) = E_{i+1} \cdot E_{j+1} - E_i \cdot E_{j+1} - E_j \cdot E_{i+1} + E_i \cdot E_j \\ &= \begin{cases} \chi(E_{i+1}) - 1 - \chi(E_i) + 1 - \chi(E_{i+1}) + 1 + \chi(E_i) - 1 & \text{falls } i+1 \neq j, \\ \chi(E_{i+1}) - 1 - \chi(E_i) + 1 - E_{i+1}^2 + \chi(E_i) - 1 & \text{falls } i+1 = j. \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } i+1 \neq j, \\ \chi(E_{i+1}) - 1 - E_{i+1}^2 = 1 & \text{falls } i+1 = j. \end{cases} \end{aligned}$$

\square

Das sollte vorerst als Motivation für die etwas allgemeinere Definition eines torischen Systems ohne das Adjektiv „exzeptionell“ reichen.

DEFINITION 3.12 (Torisches System). Eine Folge (A_1, \dots, A_n) heißt *torisches System* falls sie die Bedingungen (1)-(3) aus Bemerkung 3.11 erfüllt.

BEMERKUNG 3.13. Ein torisches System $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_n)$ ist exzeptionell, falls

$$H^l \left(\sum_{i=j}^k -A_i \right) = 0$$

für $l \geq 0$ und $1 \leq j \leq k < n$ ist. Falls zusätzlich

$$H^{l+1} \left(\sum_{i=j}^k A_i \right) = 0$$

ist, dann liegt sogar ein streng exzeptionelles, torisches System vor, das soll heißen, die entsprechende Folge ist streng exzeptionell.

DEFINITION 3.14 (Drehung + Lemma). Sei $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_n)$ ein torisches System. Das (um i) *gedrehte* torische System ist als

$$\mathcal{A}[i] := (A_{i+1}, \dots, A_n, A_1, \dots, A_i)$$

definiert. Sofern \mathcal{A} exzeptionell ist, können wir die Drehung auch für exzeptionelle Folgen $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$ erklären. Explizit für $i = 1$ ist somit

$$\mathcal{E}[1] = (E_2, \dots, E_n, E_1 - K_X).$$

Dabei bleibt die Exzeptionalität von der Folge wie vom System unter Drehung erhalten.

BEWEIS. Es reicht, die Aussage für $i = 1$ zu zeigen. Sei $\mathcal{A}[1] = (A'_1, \dots, A'_n)$, das heißt, $A'_j = A_{j+1}$. Nach Bemerkung 3.13 benötigen wir nur noch das Verschwinden der Kohomologie $H^l \left(\sum_{i=j}^n -A_i \right)$ für $l \geq 0$ und $1 < j \leq n$. Dank Serre-Dualität ist

$$H^l \left(\sum_{i=j}^n -A_i \right) = H^l \left(-K_X + \sum_{i=1}^{j-1} A_i \right) = H^{2-l} \left(-\sum_{i=1}^{j-1} A_i \right) = 0.$$

BEMERKUNG 3.15. Damit ist auch $H^l \left(\sum_{i \in I} -A_i \right) = 0$ für alle $l \geq 0$ und zyklischen Intervalle $I \subsetneq \{1, \dots, n\}$, wobei ich mit *zyklischem Intervall* Teilmengen der Form $\{i, i+1, \dots, j\}$ oder $\{1, 2, \dots, j, i, i+1, \dots, n\}$ meine.

Die Argumentation aus dem vorangegangenen Beweis zeigt auch, wieso die Drehung einer streng exzeptionellen Folge im Allgemeinen nicht mehr streng sein muß. Es kommt nämlich durchaus vor, daß $H^0 \left(\sum_{i=j}^k A_i \right)$ ungleich null ist, was wegen Serre-Dualität zu einem $H^2 \neq 0$ der gedrehten Folge führen kann.

Eine streng exzeptionelle Folge heißt *zyklisch*, falls sie ihre Strenge unter Drehung bewahrt. Solche Folgen sind allerdings selten und können nur bis $\rho(X) < 7$ auftreten, siehe [HP08, Theorem 5.13].

Der Begriff der Drehung ist nur die Ausprägung eines noch allgemeineren Konzepts, nämlich der *Helix* wie sie in [Rud90] definiert wurde.

DEFINITION 3.16 (Helix). Sei $(E_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ eine Folge von Geradenbündeln (oder ganz allgemein, Objekten der derivierten Kategorie). Diese Folge heißt *Helix*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodaß für alle $i \in \mathbb{Z}$

$$(E_i, \dots, E_{i+n})$$

eine exzeptionelle Folge ist.

Ausgehend von einer exzeptionellen Folge \mathcal{E} aus Geradenbündeln können wir jederzeit eine Helix bauen, nämlich

$$H(\mathcal{E}) : \dots, E_n + K_X, E_1, \dots, E_n, E_1 - K_X, \dots, E_n - K_X, E_1 - 2K_X, \dots$$

Damit sind die einzelnen gedrehten exzeptionellen Folgen $\mathcal{E}[i]$ nur Ausschnitte ein und derselben Helix. Außerdem wird damit für das zu \mathcal{E} gehörende torische System $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_n)$ auch $A_n = (E_1 - K_X) - E_n$ zu einer Differenz in der Helix.

BEISPIEL 3.17 (Standardfolge). Seien D_1, \dots, D_n die Randdivisoren einer torischen Fläche X (gemäß ihrer Anordnung der entsprechenden Strahlen des Fächers numeriert). Dann ist

$$(D_1, D_1 + D_2, \dots, D_1 + \dots + D_n)$$

eine exzeptionelle Folge auf X , welche wir exzeptionelle Standardfolge \mathcal{E}_X nennen. Nach Drehung und Normalisierung erhalten wir

$$(\mathcal{O}, D_1, D_1 + D_2, \dots, D_1 + \dots + D_{n-1}).$$

Das exzeptionelle torische (Standard-) System dazu ist $\mathcal{A}_X := (D_1, \dots, D_n)$, das heißt, die Randdivisoren. Damit entspricht eine Drehung nur einer etwas anderen Numerierung der Randdivisoren. Die Frage ist nun, was passiert, wenn die Reihenfolge der Numerierung umgedreht wird?

DEFINITION 3.18 (Spiegelung + Lemma). Sei $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_n)$ ein torisches System. Dann ist die *Spiegelung* von \mathcal{A} als

$$\bar{\mathcal{A}} := (A_n, \dots, A_1)$$

definiert. Sofern \mathcal{A} ein exzeptionelles, torisches System ist, so auch $\bar{\mathcal{A}}$. Die entsprechende exzeptionelle Folge wird mit $\bar{\mathcal{E}}$ bezeichnet.

BEWEIS. Sei $A'_i = A_{n-i+1}$. Dann ist nach Bemerkung 3.13 zu zeigen, daß

$$H^l \left(\sum_{i=j}^k -A'_i \right) = H^l \left(\sum_{i=j}^k -A_{n-i+1} \right) = H^l \left(\sum_{i=n-k+1}^{n-j+1} -A_i \right) = 0$$

ist, für $l \geq 0$ und $1 \leq j \leq k < n$. Damit folgt die Behauptung aus der Bemerkung 3.15. \square

BEMERKUNG 3.19. Aus den selben Gründen wie in Bemerkung 3.15 zur Drehung, bleibt die Strenge einer Folge unter Spiegelung im Allgemeinen nicht erhalten.

Somit ist es im Beispiel 3.17 egal, wie wir die Randdivisoren zyklisch durchnummerieren, die entsprechenden exzeptionellen Folgen unterscheiden sich nur durch Drehung und/oder Spiegelung. In Abschnitt 2 stellten wir fest, daß eine torische Fläche durch die Schnittzahlen ihrer Randdivisoren kodiert werden kann. Das gibt Anlaß zu folgender Definition die auch die Bezeichnung „torisches System“ rechtfertigt.

DEFINITION 3.20 (assoziierte torische Fläche). Sei $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_n)$ ein torisches System. Die zu \mathcal{A} assoziierte torische Fläche ist $\text{TV}(\mathcal{A}) = \text{TV}(a_1, \dots, a_n)$ mit $a_i = \chi(A_i) - 2$.

BEMERKUNG 3.21. Laut [HP08, Theorem 3.5] liefert diese Definition tatsächlich eine torische Fläche. Außerdem falls \mathcal{A} bereits ein exzeptionelles torisches System ist, dann ist $\chi(A_i) - 2 = A_i^2$ nach Lemma 3.10. Damit ist die torische Varietät zum torischen Standardsystem wieder die ursprüngliche Varietät selbst, das heißt, $\text{TV}(\mathcal{A}_X) = X$.

Berechtigterweise kann nun die Frage auftauchen, inwiefern es erforderlich ist, die Selbstschnittzahlen a_i über die Eulercharakteristik zu definieren, anstatt gleich auf die Selbstschnittzahlen A_i^2 zurückzugreifen. Tatsächlich macht es für die Betrachtungen in dieser Arbeit keinen Unterschied. Zum einen gilt das Interesse vorrangig exzeptionellen, torischen Systemen. Aber unter jenen torischen Systemen, die nicht exzeptionell sind, erhalten nur jene besondere Aufmerksamkeit, die sich von einem exzeptionellen, torischen System durch einen Automorphismus der Picardgruppe unterscheiden, der Schnittprodukt und kanonischen Divisor erhält (dazu im folgenden Abschnitt mehr). Da sich die Eulercharakteristik über die Gleichung $\chi(D) = 1 + \frac{1}{2}(D^2 + K.D)$ ausdrücken läßt, ist auch für jene torischen Systeme die Gleichung $\chi(A_i) - 2 = A_i^2$ erfüllt. Demnach sind es historische Gründe, die mich veranlassen, der Eulercharakteristik den Vorzug zu geben.

7.1. Gale Dualität. Gegeben sei ein torisches System $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_n)$, wobei weiterhin n der Rang der Grothendieckgruppe der zugrundeliegenden Fläche X ist. Die Fläche X soll hier (glatt, projektiv und) torisch sein (auch wenn sich mittels T -Degenerationen und dem induzierten Isomorphismus der Picardgruppen

X im folgenden genauso eine rationale \mathbb{C}^* -Fläche sein könnte). Damit erhalten wir eine exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Pic}(X) & \rightarrow & \mathbb{Z}^n & \rightarrow & \text{coker} \cong \mathbb{Z}^2 \rightarrow 0 \\ & & D & \mapsto & (D.A_1, \dots, D.A_n) & & \end{array}$$

Die Bilder der Standardbasis von \mathbb{Z}^n unter der Kokernabbildung sind dann gerade die Erzeuger der Strahlen des Fächers zu $\text{TV}(\mathcal{A})$, siehe [HP08, Proposition 2.7]. Damit sind Fächer von $\text{TV}(\mathcal{A})$ und das torische System \mathcal{A} Gale-dual zueinander. Spiegelung und Drehung auf Seiten des torischen Systems entspricht einer zyklischen Umnummerierung der Strahlen (und damit der entsprechenden Divisoren).

Das Gale-Dual zu einer gegebenen Konfiguration von Strahlen einer torischen Fläche ist allerdings nur bis auf Isomorphismen der Picardgruppe eindeutig, was die Untersuchung torischer Systeme erschwert. Damit das ein torisches System bleibt, muß der Basiswechsel die Schnittpaarung und den kanonischen Divisor erhalten, so einen Automorphismus nenne ich *K-Isometrie* (da es eine Isometrie ist, die den kanonischen Divisor fixiert).

Auf meine Frage, ob es eine Beschreibung dieser *K-Isometrien* gäbe, wies mich Lutz Hille dankenswerterweise auf das Buch [Man86] hin. Ich werde nun die für unsere Zwecke relevanten Teile daraus präsentieren und dabei auch die Notation aus [Man86] größtenteils übernehmen (insbesondere ist hier r nicht der Parameter einer Hirzebruchfläche \mathcal{F}_r).

Nach Bemerkung 1.29 gibt es zu X mit $\rho(X) = r + 1 > 2$ mindestens eine gute Basis P, R_1, \dots, R_r von $\text{Pic}(X)$ mit $P^2 = 1$ und $R_i^2 = -1$ und $P.R_i = R_i.R_j = 0$ für $1 \leq i, j \leq r$ und $i \neq j$. Der kanonische Divisor ist dann $K = -3P + \sum R_i$. Nach [Man86, Kapitel IV] können zu einem Tripel $(N_r, \omega_r, \langle, \rangle)$ mit $N_r = \bigoplus_{i=0}^r \mathbb{Z} \cdot l_i$, $\omega_r = -3l_0 + \sum_{i=1}^r l_i$ und Skalarprodukt \langle, \rangle auf N_r mit

$$\langle l_0, l_0 \rangle = 1, \quad \langle l_i, l_i \rangle = -1 \text{ für } i > 0, \quad \langle l_i, l_j \rangle = 0 \text{ für } i \neq j$$

die Mengen

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_r &= \{l \in N_r \mid \langle l, l \rangle = -2, \langle l, \omega_r \rangle = 0\} \\ \mathcal{I}_r &= \{l \in N_r \mid \langle l, l \rangle = \langle l, \omega_r \rangle = -1\} \end{aligned}$$

definiert werden. Somit können wir $l_0 = P$ und $l_i = R_i$ für $i > 0$ wählen.

PROPOSITION 3.22 ([Man86, Theorem 23.9]). *Sei $3 \leq r \leq 8$ und $(N_r, \omega_r, \langle, \rangle)$ wie vorhin. Dann ist \mathcal{R}_r ein Wurzelsystem vom Typ $A_1 \times A_2, A_4, D_5, E_6, E_7$ bzw. E_8 (dabei ist die Summe der Indizes gerade r) und folgende Gruppen sind gleich:*

- (1) *die Gruppe der Automorphismen von N_r , welche ω_r und das Skalarprodukt erhält, das heißt, die Gruppe der *K-Isometrien*,*
- (2) *die Gruppe aller Permutationen der Elemente von \mathcal{I}_r , welche die paarweisen Skalarprodukte erhält, und*
- (3) *die Weylgruppe $\mathcal{W}_r = \mathcal{W}(\mathcal{R}_r)$ zum Wurzelsystem \mathcal{R}_r .*

Insbesondere sind diese Gruppen endlich.

BEMERKUNG 3.23. Damit sind die gesuchten Basiswechsel von $\text{Pic}(X)$ mit Picardrang $4 \leq \rho(X) = r + 1 \leq 9$ bekannt, explizit werden Erzeuger von \mathcal{R}_r in [Man86, Proposition 25.5.3] angegeben. Für größeren Picardrang wird allerdings \mathcal{R}_r unendlich und damit auch die Gruppe der *K-Isometrien*.

Später werde ich die *K-Isometrien* für Picardrang $\rho(X) = 4, 5$ benötigen, deswegen werde ich diese hier angeben.

BEISPIEL 3.24. Sei X vom Picardrang $\rho(X) = 4$ oder 5 und $P, R_1, \dots, R_3, (R_4)$ eine gute Basis von X . Ich werde zunächst die Wurzelsysteme \mathcal{R}_3 und \mathcal{R}_4 bestimmen.

Nach [Man86, Proposition 25.5.3] bestehen \mathcal{R}_3 bzw. \mathcal{R}_4 aus den Elementen $aP + \sum b_i R_i$, wobei die Koeffizienten aus der Tabelle

	a	b_1	b_2	b_3	(b_4)
Typ 1	0	1	-1	0	0
Typ 2	1	1	1	1	0

sind. Dabei ist es erlaubt, diese Koeffizienten (simultan) mit ± 1 zu multiplizieren und die Koeffizienten b_i beliebig zu permutieren. Einfache, kombinatorische Überlegungen zeigen, daß $\#\mathcal{R}_3 = 6 + 2 = 8$ und $\#\mathcal{R}_4 = 12 + 8 = 20$ sind.

Die Weylgruppe wird durch Spiegelungen bezüglich der Wurzeln erzeugt. Sei $\alpha \in \mathcal{R}_i$, dann ist die Spiegelung bezüglich α

$$s_\alpha(v) = v - \frac{\langle v, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \cdot \alpha,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Schnittpaarung in $\text{Pic}(X)$ ist. Aus den Wurzeln vom Typ 1 ergeben sich dann die Matrizen

$$W_1 : \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathcal{S}_{\rho(X)-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right),$$

wobei \mathcal{S}_i die $i \times i$ -Permutationsmatrizen sind. Aus den Wurzeln vom Typ 2 ergeben sich für \mathcal{R}_3 bzw. \mathcal{R}_4 die Matrizen

$$W_2 : \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A,$$

wobei A die letzte Zeile bzw. Spalte mit einer der Zeilen bzw. Spalten $2 - 4$ vertauscht. Nachrechnen zeigt dann, daß $\mathcal{W}_i = \mathcal{W}(\mathcal{R}_i)$ für $i = 3, 4$ aus Elementen der Form W_1 und $W_1 \cdot W_2$ besteht. Somit ist $\#\mathcal{W}_3 = 2 \cdot 6 = 12$ und $\#\mathcal{W}_4 = 5 \cdot 24 = 120$.

Abschließend behandle ich noch den Fall $\rho = 2$, mit anderen Worten Hirzebruchflächen.

7.2. Beispiel: Hirzebruchfläche. Hier werde ich alle torischen Systeme einer Hirzebruchfläche schriftlich festhalten, siehe [HP08, Proposition 5.2].

Als Basis von $\text{Pic}(\mathcal{F}_r)$ wähle ich die nef-Basis P_n, Q_n wie in Beispiel 1.21, insbesondere ist $P_n^2 = 0, Q_n^2 = r$ und $P_n \cdot Q_n = 1$.

PROPOSITION 3.25 ([HP08, Proposition 5.2]). *Auf einer Hirzebruchfläche \mathcal{F}_r gibt es folgende torische Systeme:*

- (1) $\mathcal{A}_{r,i} := (P_n, iP_n + Q_n, P_n, -(r+i)P_n + Q_n)$ für $i \in \mathbb{Z}$, und
- (2) falls $r = 2a$ gerade ist, $\tilde{\mathcal{A}}_{r,i} := (-aP_n + Q_n, P_n + (a+i)(-aP_n + Q_n), -aP_n + Q_n, P_n - (a+i)(-aP_n + Q_n))$ für $i \in \mathbb{Z}$.

Dabei sind die torischen Systeme vom Typ (1) stets exzeptionell.

Die torischen Systeme vom Typ (2) sind nur in speziellen Fällen exzeptionell, und zwar wenn (1) und (2) zusammenfallen. Das geschieht zum einen, falls $r = 2$ und $i = 0$, und zum anderen, falls $r = 0$ und i beliebig ist, denn in diesem Fall können die Rollen von P_n und Q_n vertauscht werden.

BEMERKUNG 3.26. Im Falle einer Hirzebruchfläche \mathcal{F}_{2a+1} können wir auch die gute Basis P, R_1 verwenden. Wegen $P_n = P - R_1$ und $Q_n = (a + 1)P - aR_1$ wird das torische System vom Typ (1) zu

$$\mathcal{A}_{r,i} = (P - R_1, (a + i + 1)P - (a + i)R_1, P - R_1, -(a + i)P + (a + i + 1)R_1).$$

BEMERKUNG 3.27. Die vereinzelt Exzeptionalität des torischen Systems $\tilde{\mathcal{A}}_{r,i}$ hat weitreichende Folgen. Diese Ausnahmen erfordern beispielsweise bei der Untersuchung von exzeptionellen, torischen Systemen unter Degeneration mehr Sorgfalt.

Ich möchte hier noch die assoziierte torische Varietät $\text{TV}(\mathcal{A})$ festhalten.

\mathcal{A}	$\chi(\mathcal{A}) - 2$	$\text{TV}(\mathcal{A})$
$\mathcal{A}_{r,i}$	$(0, r + 2i, 0, -r - 2i)$	\mathcal{F}_{r+2i}
$\tilde{\mathcal{A}}_{r,i}$	$(0, r + 2i, 0, -r - 2i)$	\mathcal{F}_{r+2i}

Abschließend möchte ich noch die K -Isometrien von $\text{Pic}(\mathcal{F}_r)$ untersuchen. Hier können wir diese direkt berechnen. Sei ϕ ein Automorphismus von $\text{Pic}(\mathcal{F}_r)$ mit Abbildungsmatrix A . Mehrere Bedingungen müssen von ϕ erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \phi(K) = K, \quad \phi(P_n)^2 = P_n^2 = 0, \quad \phi(P_n) \cdot \phi(Q_n) = 1 \quad \text{und} \quad \phi(Q_n)^2 = Q_n^2 = r \\ \text{bzw.} \quad A \cdot K = K \quad \text{und} \quad A^T S A = S \quad \text{für} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diese quadratischen Gleichungen lassen sich beispielsweise mit Gröbnerbasen leicht lösen, beispielsweise in Singular [DGPS10] mittels

```
> ring R=0, (a,b,c,d,r), lp;
> matrix A[2][2]=a,b,c,d;
> matrix K[2][1]=r-2,-2;
> matrix S[2][2]=0,1,1,r;
> ideal I=transpose(A)*S*A-S,A*K-K;
> std(I);
```

Es gibt zwei Lösungen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} -r/2 & 1 - r^2/4 \\ 1 & r/2 \end{pmatrix}$$

Die zweite Lösung ist hier nur im Falle $r = 2a$ sinnvoll und ist jener Basiswechsel ϕ , der zwischen den torischen Systemen vom Typ (1) und Typ (2) wechselt. Es ist $\phi(\mathcal{A}_{r,i}) = \tilde{\mathcal{A}}_{r,i}$ (dabei wird ϕ elementweise angewandt). Man beachte, daß dabei ϕ die Exzeptionalität nicht erhält.

8. Augmentation

In [HP08] wird ein Prozeß vorgestellt, mit dem aus einem gegebenen torischen System \mathcal{A} auf X unter Verwendung einer Aufblasung $X' \rightarrow X$ ein torisches System \mathcal{A}' auf X' konstruiert werden kann. Dieses \mathcal{A}' hat zusätzlich die Eigenschaft, daß $\text{TV}(\mathcal{A}')$ eine Aufblasung von $\text{TV}(\mathcal{A})$ ist.

DEFINITION 3.28 (Augmentation). Sei $b : X' \rightarrow X$ eine Aufblasung mit exzeptionellem Divisor R und \mathcal{A} ein torisches System auf X . Dann ist

$$\text{Aug}_i \mathcal{A} := (A_1, \dots, A_{i-1}, A_i - R, R, A_{i+1} - R, A_{i+2}, \dots, A_n)$$

die *Augmentation* von \mathcal{A} an der Stelle i (wobei ich mit A_i auf X' den Rückzug von A_i unter b bezeichne).

BEMERKUNG 3.29 (+ Lemma). Die Augmentation ist mit der Aufblasung von torischen Flächen vom Wesen her verwandt, dies wird besonders deutlich, wenn man die Beschreibung der Aufblasung einer solchen Fläche über die Schnittzahlen betrachtet:

$$\begin{aligned} \text{TV}(\dots, a_{i-1}, a_i - 1, -1, a_{i+1} - 1, a_{i+2}, \dots) &\rightarrow \text{TV}(\dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots) \\ (\dots, A_{i-1}, A_i - R, R, A_{i+1} - R, A_{i+2}, \dots) &= \text{Aug}_i(\dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, \dots) \end{aligned}$$

Nichtsdestotrotz darf ein torisches System an einer beliebigen Stelle augmentiert werden, unabhängig davon an welcher Stelle eine eventuell zugrundeliegende torische Fläche aufgeblasen wurde.

Die Analogie geht sogar noch ein wenig weiter. Denn es gilt, daß $\text{TV}(\text{Aug}_i \mathcal{A})$ die Aufblasung von $\text{TV}(\mathcal{A})$ an der i -ten Stelle ist.

BEWEIS. Sei $\mathcal{A}' = (A'_1, \dots, A'_{n+1}) = \text{Aug}_i \mathcal{A}$ und $\text{TV}(\mathcal{A}) = \text{TV}(a_1, \dots, a_n)$. Es ist zu zeigen, daß $\text{TV}(\mathcal{A}') = \text{TV}(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i - 1, -1, a_{i+1} - 1, a_{i+2}, \dots, a_n)$.

Sei R der exzeptionelle Divisor der Aufblasung b . Da $\chi(A'_j) = \chi(A_j)$ für $j < i$ und $\chi(A'_j) = \chi(A_{j-1})$ für $j > i + 2$. Also bleibt nur zu zeigen, daß

$$\begin{aligned} \chi(A_i - R) &= \chi(A_i) - 1 \\ \chi(R) &= 1 \\ \chi(A_{i+1} - R) &= \chi(A_{i+1}) - 1 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ist Proposition 1.28. Es bleibt noch zu zeigen, daß $\chi(A_j - R) = \chi(A_j) - 1$.

$$\begin{aligned} \chi(A_j - R) &= 1 + \frac{1}{2}((A_j - R)^2 - K \cdot (A_j - R)) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(A_j^2 - 2A_j \cdot R + R^2 - K \cdot A_j + K \cdot R) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(A_j^2 - K \cdot A_j) + \frac{1}{2}(R^2 + K \cdot R) - A_j \cdot R \\ &= \chi(A_j) - 1 - A_j \cdot R \\ &= \chi(A_j) - 1 - A_j \cdot R \end{aligned}$$

Für die Aussage benötige ich nur noch, daß $A_j \cdot R = 0$. Nach [HPO8, Abschnitt 4] ist $P \cdot R = Q \cdot R = 0$ und $R \cdot R' = 0$ für einen weiteren exzeptionellen Divisor R' (von einer früheren Aufblasung). Da sich jedes A_j als $c_P P + c_Q Q + \sum_k c_k R_k$ darstellen läßt, wobei R_k die exzeptionellen Divisoren der vorangegangenen Aufblasungen und $c_P, c_Q, c_k \in \{-1, 0, +1\}$ sind, gilt $A_j \cdot R = 0$. \square

BEMERKUNG 3.30. Sofern das torische System \mathcal{A} exzeptionell ist, können wir auch die Auswirkungen der Augmentation auf die zugehörige exzeptionelle Folge $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$ betrachten, diese ist dann

$$\text{Aug}_i \mathcal{E} = (E_1, \dots, E_{i-1}, E_i - R, E_i, E_{i+1} - R, \dots, E_n - R).$$

BEISPIEL 3.31. Seien D_1, \dots, D_n die zyklisch angeordneten Randdivisoren eines torischen X und $b : X' \rightarrow X$ eine Aufblasung mit exzeptionellem Divisor R . Es gibt dann ein i , sodaß die Folge $D_1, \dots, D_i - R, R, D_{i+1} - R, \dots, D_n$ die Randdivisoren von X' sind. Genauer gesagt, ist b die Aufblasung im T -invarianten Punkte $D_i \cap$

D_{i+1} . Da ich mit $D_i = b^*D_i$ bezeichne, sind $D_i - R$ und $D_{i+1} - R$ gerade die strikten Transformierten von D_i bzw D_{i+1} unter dieser Aufblasung.

Also ist $\text{Aug}_i \mathcal{A}_X = \mathcal{A}_{X'}$, das heißt, wenn das torische Standardsystem entsprechend der Aufblasung augmentiert wird, ist das Resultat das torische Standardsystem der Aufblasung.

LEMMA 3.32. *Augmentation verträgt sich mit Drehung und Spiegelung. Genauer, sei \mathcal{A} ein torisches System und $b : X' \rightarrow X$ eine Aufblasung mit exzeptionellem Divisor R . Dann gilt*

- (1) $\text{Aug}_i(\mathcal{A}[k]) = (\text{Aug}_{i+k} \mathcal{A})[k]$ und
- (2) $\text{Aug}_i(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\text{Aug}_{n-i} \mathcal{A}}$.

BEWEIS. Einsetzen. □

Eine leichte Abwandlung von [HP08, Proposition 5.5] ist folgendes Lemma.

LEMMA 3.33. *Sei \mathcal{A} ein torisches System. Dann ist \mathcal{A} genau dann exzeptionell, wenn $\text{Aug}_i \mathcal{A}$ exzeptionell ist.*

BEWEIS. Sei $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_n)$ und $\mathcal{A}' = (A'_1, \dots, A'_{n+1}) = \text{Aug}_i \mathcal{A}$.

Das torische System \mathcal{A} ist genau dann exzeptionell, wenn die Kohomologien $H^\bullet(\sum_{l=j}^k -A_l)$ für $1 \leq j \leq k < n$ verschwinden. Nun betrachten wir die entsprechenden Kohomologien für \mathcal{A}' . Es können drei verschiedene Summen auftreten:

$$\sum_l -A'_l = \begin{cases} \sum_l -A_l \\ -R \\ \sum_l -A_l + R \end{cases}$$

Damit können wir die dieses Lemma auf folgende Frage reduzieren. Sei $X \rightarrow Y$ eine Aufblasung mit exzeptionellem Divisor R und L ein Geradenbündel auf Y , gilt $H^\bullet(L) = 0 \Leftrightarrow H^\bullet(L + R) = 0$?

Zunächst zeige ich, daß $\chi(L) = \chi(L + R)$ ist:

$$\begin{aligned} \chi(L + R) &= 1 + \frac{1}{2}((L + R)^2 - K.(L + R)) = 1 + \frac{1}{2}(L^2 + R^2 - K.L - K.R) = \\ &= 1 + \frac{1}{2}(L^2 - K.L) + \frac{1}{2}(R^2 - K.R) = \chi(L) + 0 \end{aligned}$$

wobei ich verwende, daß $L.R = 0$ und $R^2 = K.R = -1$ ist.

Angenommen $H^\bullet(L) = 0$, dann gilt nach [HP08, Lemma 4.3], daß auch $h^0(L + kR) = 0$ und $h^2(L + kR) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist. Damit folgt „ \Rightarrow “ aus der Konstanz der Euler-Charakteristik bei Addition des exzeptionellen Divisors R .

Umgekehrt sei $H^\bullet(L + R) = 0$. Das eben zitierte Lemma besagt auch, daß damit $h^1(L) = 0$ ist. Damit folgt die Aussage wieder aus der Gleichheit der Euler-Charakteristiken. □

DEFINITION 3.34. Ein exzeptionelles torisches System \mathcal{A} bzw. exzeptionelle Folge \mathcal{E} auf einer rationalen Fläche X mit $\rho(X) > 1$ heißt *konstruierbar*, falls diese durch Augmentation eines vollen, exzeptionellen, torischen Systems bzw. exzeptionellen Folge auf \mathcal{F}_r entsteht.

BEMERKUNG 3.35 (+ Konvention). In [HP08, Proposition 5.5] wurde gezeigt, daß eine konstruierbares, torisches System bereits voll ist, deswegen werde ich in Zukunft das Adjektiv „voll“ bei solchen Systemen weglassen. In analoger Weise zur genannten Proposition kann man zeigen, daß die Augmentation eines vollen, nicht

notwendigerweise konstruierbaren, aber exzeptionellen, torischen Systems wieder voll ist.

BEISPIEL 3.36. Die Augmentation eines streng exzeptionellen Systems muß nicht mehr streng exzeptionell sein. Ein extremes Beispiel hierzu ist das Gegenbeispiel in [HP06] zu Kings Vermutung, es gäbe auf torischen Varietäten stets eine streng exzeptionelle Folge von Geradenbündeln.

Jede rationale Fläche X mit $\rho(X) > 1$ läßt sich zu einer Hirzebruchfläche \mathcal{F}_r abblasen. Damit erhalten wir aus unseren Überlegungen zu torischen Systemen auf Hirzebruchflächen in Abschnitt 7.2 und Bemerkung 3.29 folgendes Lemma.

LEMMA 3.37. *Sei Y eine torische Fläche vom selben Picardrang wie eine rationale Fläche X , dabei sei der Rang der Picardgruppe mindestens 3. Dann existiert ein konstruierbares, torisches System \mathcal{A} auf X mit $\mathrm{TV}(\mathcal{A}) = Y$.*

BEWEIS. Wir können X und Y sukzessive zu Flächen X' bzw. Y' vom Picardrang 3 abblasen. Nun ist $Y' = \mathrm{TV}(r, 0, -r - 1, -1, -1)$ die Aufblasung von \mathcal{F}_r bzw. \mathcal{F}_{r+1} . Die Fläche X' läßt sich zumindest zu einer Hirzebruchfläche \mathcal{F}_s abblasen. Wir können hier ohne Einschränkung an die Allgemeinheit annehmen, daß $r = s \pmod{2}$. Dann gibt es ein exzeptionelles, torisches System \mathcal{A}' auf \mathcal{F}_s mit $\mathrm{TV}(\mathcal{A}') = \mathcal{F}_r$. Wir augmentieren dieses System entlang des Aufblasungsweges zu einem konstruierbaren, torischen System \mathcal{A} auf X . Wenn wir dabei stets an jenen Stellen augmentieren, an denen aufgeblasen wird, um von \mathcal{F}_r zu Y zu gelangen, dann erreichen wir zusätzlich $\mathrm{TV}(\mathcal{A}) = Y$. \square

Damit können wir diesen Abschnitt mit folgendem Theorem schließen.

THEOREM 3.38. *Sei \mathcal{A} ein torisches System auf einer rationalen Fläche X . Dann gibt es eine K -Isometrie ϕ der Picardgruppe, sodaß $\phi\mathcal{A}$ ein konstruierbares, torisches System ist.*

BEWEIS. Zu \mathcal{A} kann die torische Varietät $Y = \mathrm{TV}(\mathcal{A})$ assoziiert werden. Nach obigem Lemma gibt es ein konstruierbares, torisches System \mathcal{A}' mit derselben assoziierten Fläche Y . Da \mathcal{A} und \mathcal{A}' Gale-dual zur selben Fläche sind, sind diese über einen Isomorphismus der Picardgruppe miteinander verbunden. Da aber die Elemente dieser Systeme jeweils die Picardgruppe erzeugen, muß dieser Isomorphismus das Schnittprodukt und den kanonischen Divisor erhalten, ist also eine K -Isometrie. \square

BEMERKUNG 3.39. Aus einer Diskussion mit David Ploog ergab sich die Vermutung, daß sich so eine K -Isometrie zu einer Autoäquivalenz von $\mathcal{D}^b(X)$ liften läßt. Das Bild einer vollen, exzeptionellen Folge unter einer Autoäquivalenz ist aber wieder eine volle, exzeptionelle Folge. Damit würde aus der Liftbarkeit automatisch folgen, daß jedes exzeptionelle, torische System \mathcal{A} auf X bereits voll ist. Auf Autoäquivalenzen der derivierten Kategorie torischer Flächen wird im Artikel [BP10] ausführlich eingegangen.

Exzeptionelle Folgen und T -Degeneration

In diesem Kapitel werde ich exzeptionelle Folgen aus Geradenbündeln auf torischen Flächen mithilfe der Methoden der T -Degenerationen genauer untersuchen. Dieses Kapitel bildet eines der Kernstücke dieser Arbeit. All jene Resultate, die nicht von mir sind, habe ich entsprechend gekennzeichnet.

In ersten Abschnitt werde ich zeigen, daß sich Augmentation mit T -Degeneration einigermaßen gut verträgt. Daraus ergibt sich die Hoffnung, daß das Studium des Verhaltens konstruierbarer, torischer Systeme unter T -Degeneration auf den Fall der Hirzebruchflächen reduziert werden kann. Obwohl diese Hoffnung enttäuscht wird und zum Begriff des kompatiblen, torischen Systems führt, werde ich dennoch den Fall der Hirzebruchfläche genauer betrachten, der sich schön mit Mutation exzeptioneller Folgen erklären läßt.

Im vorigen Kapitel wurde mit der Augmentation eine recht einfache Methode vorgestellt, mit welcher sich exzeptionelle Folgen auf aufgeblasene Flächen heben lassen. Da sich jede rationale Fläche mit Picardrang > 1 stets zu einer Hirzebruchflächen abblasen läßt, stellt sich die Frage, ob sich in analoger Weise jede exzeptionelle Folge aus den exzeptionellen Folgen auf Hirzebruchflächen durch Augmentieren gewinnen lassen. Dieser Frage werde ich in den nachfolgenden Abschnitten nachgehen.

Quellenangabe: Wie schon im vorigen Kapitel sind auch hier die Arbeiten [Rud90], [HP08] und [Man86] wichtig, sowie die Arbeit [HI09].

KONVENTION. In diesem Kapitel bestehen alle exzeptionellen Folgen aus Geradenbündeln. Alle Flächen sind glatt und projektiv, sowie mindestens rationale \mathbb{C}^* -Flächen, wenn nicht sogar torisch.

9. Exzeptionelle Folgen unter T -Degeneration

Sei $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{A}^1$ eine T -Deformation von rationalen \mathbb{C}^* -Flächen mit Fasern $X_t = \pi^{-1}(t)$, das heißt, $X_0 \rightsquigarrow X_t$. Für $t \neq 0$ induziert diese T -Deformation einen Isomorphismus $\text{Pic}(X_t) \rightarrow \text{Pic}(X_0)$, den ich auch mit ϖ bezeichne. Sei $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_n)$ ein torisches System auf X_t , dann schreibe ich $\varpi(\mathcal{A}) = (\varpi(A_1), \dots, \varpi(A_n))$.

PROPOSITION 4.1. *Seien ϖ und \mathcal{A} wie eben. Dann ist $\varpi(\mathcal{A})$ ein torisches System auf X_0 mit $\text{TV}(\mathcal{A}) = \text{TV}(\varpi(\mathcal{A}))$. Außerdem gilt für eine Aufblasung π' der T -Degeneration (siehe Proposition 2.15)*

$$\text{Aug}_i \varpi(\mathcal{A}) = \varpi'(\text{Aug}_i(\mathcal{A})),$$

das heißt, Augmentation kommutiert mit T -Degeneration.

Diese Proposition ist eine direkte Konsequenz aus der Propositionen 2.22, daß ϖ die Schnittpaarung und den kanonischen Divisor erhält, und der Proposition 2.25, daß ϖ mit dem Aufblasen kommutiert.

Schon allein dadurch, daß ϖ ein Isomorphismus der Picardgruppen ist, gilt die Aussage von Proposition 4.1 auch für Deformation unter Verwendung von ϖ^{-1} . Allerdings gilt nicht nur aufgrund der Halbstetigkeitstheoreme für die Kohomologie flacher Familien ([Har77, Kapitel 12]) im Falle der Deformation wesentlich mehr.

PROPOSITION 4.2. *Sei $X_0 \rightsquigarrow X_s$ eine T -Deformation rationaler \mathbb{C}^* -Flächen und \mathcal{A} ein torisches System auf X_0 . Dann ist $\varpi^{-1}(\mathcal{A})$ wieder ein torisches System mit $\mathrm{TV}(\varpi^{-1}(\mathcal{A})) = \mathrm{TV}(\mathcal{A})$. Falls \mathcal{A} zusätzlich (streng) exzeptionell oder konstruierbar ist, dann auch $\varpi^{-1}(\mathcal{A})$.*

BEWEIS. Es bleibt nur noch die Aussage zu zeigen, daß Konstruierbarkeit unter ϖ^{-1} erhalten bleibt. Das ist aber eine recht direkte Konsequenz daraus, daß das Abblasen der speziellen Faser X_0 eine eindeutige Deformation der Abblasing induziert, siehe Proposition 2.15, ((c)). Damit kann diese Aussage induktiv gezeigt werden. \square

Die exzeptionellen Folgen und torischen Systeme auf Hirzebruchflächen sind uns aus Abschnitt 7.2 bekannt, es ist $\mathcal{A}_{r,i} = (P_n, iP_n + Q_n, P_n, -(r+i)P_n + Q_n)$ für $i \in \mathbb{Z}$, und falls zusätzlich $r = 2a$ gerade ist, $\tilde{\mathcal{A}}_{r,i} = (-aP_n + Q_n, P_n + (a+i)(-aP_n + Q_n), -aP_n + Q_n, P_n - (a+i)(-aP_n + Q_n))$ für $i \in \mathbb{Z}$. Die Gestalt dieser Folgen läßt sich mittels Mutation, wie sie in Abschnitt 6 definiert wurden, gut erklären. Doch zunächst werde ich noch ein paar allgemeinere Punkte klären, da sich Mutation und Geradenbündel im Allgemeinen nicht gut vertragen.

Sei \mathcal{E} eine exzeptionelle Folge von Geradenbündeln und $L_i\mathcal{E}$ die mutierte Folge. Zwar ist $L_i\mathcal{E}$ exzeptionell, muß aber nicht mehr aus Geradenbündeln bestehen. Eine Mutation, die Geradenbündel erhält, nenne ich *konservativ*.

PROPOSITION 4.3 ([Rud90]). *Falls $\mathrm{Hom}^i(E, F) = 0$ für $i > 0$ und can surjektiv sind, dann ist $L_E F = \ker(\mathrm{can})$.*

Insbesondere ist $L_E F$ zumindest torsionsfrei für lokal freies E und F (da $L_E F$ Untergarbe eine lokal freien Garbe). Für unsere Zwecke ist die Frage, wann eine Mutation konservativ ist, recht interessant. Ausreichend wird hierfür folgendes Lemma sein.

LEMMA 4.4. *Seien E und F Geradenbündel auf einer glatten, projektiven Fläche X mit $\mathrm{Hom}^i(E, F) = 0$ für $i > 0$ und can surjektiv. Falls $\dim \mathrm{Hom}(E, F) = 2$ ist, dann ist $L_E F = 2E - F$ ein Geradenbündel (einprägsamer: $L - E = E - F$).*

BEWEIS. Da $H := \mathrm{Hom}(E, F)$ zwei-dimensional ist, können wir $\mathrm{can} : E \oplus E \rightarrow F$ schreiben. Der Kern $L := L_E F = \ker(\mathrm{can})$ ist dann lokal frei und vom Rang 1, also ein Geradenbündel. Die exakte Sequenz $0 \rightarrow L \rightarrow E \oplus E \rightarrow F \rightarrow 0$ führt über die Determinante zum Isomorphismus

$$L + F = \wedge^2(E \oplus E) = 2E,$$

siehe [Liu02, Corollary 6.4.2], daraus folgt die Aussage. \square

KOROLLAR 4.5. *Wegen $\mathrm{Hom}^i(L_E F, E) = \mathrm{Hom}^i(2E - F, E) = \mathrm{Hom}^i(E, F)$ erfüllt das Paar $(L_E F, E)$ die Voraussetzungen von Lemma 4.4, wenn sie das Paar (E, F) erfüllt.*

Falls es also möglich ist, eine exzeptionelle Folge von Geradenbündeln an einer Stelle i konservativ zu mutieren, dann gilt das auch für die mutierte Folge.

BEMERKUNG 4.6 (konservative Mutation torischer Systeme). Ich möchte noch Lemma 4.4 für torische Systeme umformulieren. Sei $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$ eine exzeptionelle Folge, die an der Stelle i konservativ mutiert werden kann, sowie $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_n)$ das zugehörige torische System.

Es ist $\text{Hom}^j(E_i, E_{i+1}) = H^j(E_{i+1} - E_i) = H^j(A_i)$. Damit muß neben der Surjektivität von can noch

$$\dim H^j(A_i) = \begin{cases} 2 & j = 0 \\ 0 & j > 0 \end{cases}$$

gelten. Das konservativ mutierte, torische System ist dann

$$L_i \mathcal{A} = (A_1, \dots, A_{i-2}, A_{i-1} - A_i, A_i, A_{i+1} + A_i, A_{i+2}, \dots, A_n),$$

was in meinen Augen symmetrischer als die Mutation exzeptioneller Folgen aussieht.

Aber auch die Surjektivität von can läßt sich vereinfacht feststellen. Wenn $\dim H^j(A_i) = 0$ für $j > 0$ ist, dann benötigen wir die Surjektivität von

$$\text{can} : \text{Hom}(E_i, E_{i+1}) \otimes E_i \rightarrow E_{i+1}.$$

Da \otimes rechtsexakt ist, dürfen wir diese Abbildung zur Überprüfung der Surjektivität mit einem beliebigem Geradenbündel tensorieren, beispielsweise mit $-E_i$. Somit reicht es für $A_i = E_{i+1} - E_i$ mit obigen Eigenschaften, die Surjektivität von

$$H^0(A_i) \rightarrow A_i$$

nachzuweisen, mit anderen Worten, A_i muß *global erzeugt* sein.

Nun wende ich mich der Situation auf der Hirzebruchfläche zu.

BEISPIEL 4.7 (Mutation auf Hirzebruchflächen). Aufgrund Bemerkung 4.6 kommen nur P_n bzw. im Falle, daß $r = 2a$ gerade ist, auch $-aP_n + Q_n$ als mögliche Stellen für eine konservative Mutation in Frage, da $\chi(P_n) = 2 = \chi(-aP_n + Q_n)$.

Zwar ist $H^j(P_n) = \begin{cases} 2 & j = 0 \\ 0 & j > 0 \end{cases}$, aber für $-aP_n + Q_n$ gilt das nur im Falle, daß

$a = 0, 1$ ist (speziell der Fall $a = 0$ ist hier nicht so spannend, eher noch $a = 1$).

Der Nachweis, ob ein Geradenbündel auf einer torischen Varietät global erzeugt ist, kann folgendermaßen geführt werden. Sei $D = \sum a_\rho D_\rho$ ein Divisor auf $X = \text{TV}(\Sigma)$. Dann gibt es zu $\sigma \in \Sigma(n)$ ein $m_\sigma \in M$ mit $\langle m_\sigma, v_\rho \rangle = a_\rho$ für $\rho \in \sigma(1)$ mit primitivem Erzeuger v_ρ . Diese m_σ können auch als lineare Funktionen auf $\sigma \in N_{\mathbb{Q}}$ aufgefaßt werden: $v \mapsto \langle m_\sigma, v \rangle$. Diese setzen sich zu einer stetigen, stückweise linearen Funktion h_D auf N zusammen. Wenn h_D eine konvexe Funktion ist, genau dann ist D global erzeugt.

Es sind h_{P_n} sowie $h_{-aP_n+Q_n}$ für $a = 0$ (da P_n und Q_n auf \mathcal{F}_0 vertauschbar sind) konvex und damit die entsprechenden Geradenbündel global erzeugt. Hingegen ist $h_{-aP_n+Q_n}$ für $a > 0$ nicht mehr konvex.

Damit können wir die exzeptionellen torischen Systeme konservativ mutieren. Ich werde im folgenden mein Hauptaugenmerk auf torische Systeme $\mathcal{A}_{r,i}$ lege, da die torischen Systeme $\tilde{\mathcal{A}}_{r,i}$ nur in Spezialfällen exzeptionell sind.

Sei also $\mathcal{A}_{r,i} = (P_n, iP_n + Q_n, P_n, -(r+i)P_n + Q_n)$ auf \mathcal{F}_r . Dann ist nach Bemerkung 4.6

$$L_1 \mathcal{A}_{r,i} = (P_n, (i-1)P_n + Q_n, P_n, -(r+i-1)P_n + Q_n) = \mathcal{A}_{r,i-1}$$

Diese konservative Mutation können wir an derselben Stelle wiederholt anwenden. Unter Verwendung der Rechtsmutation als Inverses läßt sich so

$$L_1^k \mathcal{A}_{r,i} = (P_n, (i-k)P_n + Q_n, P_n, -(r+i-k)P_n + Q_n) = \mathcal{A}_{r,i-k} \text{ für } k \in \mathbb{Z}$$

schreiben. Insbesondere lassen sich alle exzeptionellen, torischen Systeme aus dem torischen Standardsystem $\mathcal{A}_{r,0}$ durch Mutation gewinnen.

BEMERKUNG 4.8. Die vorangegangene Beobachtung läßt sich auch allgemeiner, das heißt, ohne die Beschränkung auf Geradenbündel, stellen. In dem Artikel [KN98] werden Fälle behandelt, in denen sich *alle* vollen, exzeptionellen Folgen aus einer beliebigen vollen, exzeptionellen Folge durch sukzessives Mutieren gewinnen lassen.

PROPOSITION 4.9. *Gegeben sei eine T -Deformation $\mathcal{F}_{r+2\alpha} \rightsquigarrow \mathcal{F}_r$ mit $r > 0$. Dann ist*

$$\varpi(\mathcal{A}_{r,i}) = \mathcal{A}_{r+2\alpha,i-\alpha} \text{ und } \varpi(\tilde{\mathcal{A}}_{r,i}) = \tilde{\mathcal{A}}_{r+2\alpha,i-\alpha}.$$

Insbesondere degenerieren exzeptionelle, torische Systeme zu exzeptionellen, torischen Systemen.

Sei $\mathcal{F}_{2\alpha} \rightsquigarrow \mathcal{F}_0$ eine T -Deformation. Dann gilt entweder

$$\varpi(\mathcal{A}_{0,i}) = \mathcal{A}_{2\alpha,i-\alpha} \text{ und } \varpi(\tilde{\mathcal{A}}_{0,i}) = \tilde{\mathcal{A}}_{2\alpha,i-\alpha}$$

oder

$$\varpi(\mathcal{A}_{0,i}) = \tilde{\mathcal{A}}_{2\alpha,i-\alpha} \text{ und } \varpi(\tilde{\mathcal{A}}_{0,i}) = \mathcal{A}_{2\alpha,i-\alpha}.$$

Erstere Degeneration nenne ich kompatible Degeneration von Hirzebruchflächen. Eine kompatible Degeneration läßt sich auch dadurch charakterisieren, daß $\varpi(P_n) = P_n$ ist.

Sei nun $\mathcal{F}_{r+2\alpha} \rightsquigarrow \mathcal{F}_r$ mit r beliebig, welche für $r = 0$ kompatibel sein soll. Dann gilt

$$\varpi(L_1^{-\alpha} \mathcal{A}_{r,i}) = \mathcal{A}_{r+2\alpha,i}.$$

Insbesondere ist die Degeneration des α -mal konservativ mutierten, torischen Standardsystems von \mathcal{F}_r das torische Standardsystem von $\mathcal{F}_{r+2\alpha}$.

BEMERKUNG 4.10. Sei $\mathcal{F}_{2\alpha} \rightsquigarrow \mathcal{F}_0$ eine T -Deformation, sodaß ϖ nicht kompatibel ist. Dann ist $\varpi(P) = -aP_n + Q_n$, und wegen $\varpi(\mathcal{A}_{0,i}) = \tilde{\mathcal{A}}_{2\alpha,i-\alpha}$ bleibt die Exzeptionalität nicht erhalten, siehe auch Proposition 3.25.

Mittels Augmentation kann diese Aussage induktiv verallgemeinert werden. Gegeben sei dafür eine T -Deformation $Y \rightsquigarrow X$ einer torischen Fläche Y zu einer rationalen Fläche X . Diese Deformation kann nach Proposition 2.15 zu einer T -Deformation $\mathcal{F}_{r+2\alpha} \rightsquigarrow \mathcal{F}_r$ abgeblasen werden. Damit können wir das torische Standardsystem \mathcal{A}_Y auf Y schreiben als $\text{Aug}_{i_n \dots i_1} \mathcal{A}_{r+2\alpha,0}$. Damit erhalten wir die

PROPOSITION 4.11. *Seien $Y \rightsquigarrow X$ und $\mathcal{A}_Y = \text{Aug}_{i_n \dots i_1} \mathcal{A}_{r+2\alpha,0}$ wie vorhin. Sei $\varpi : \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(Y)$ der Isomorphismus der Picardgruppen von X und Y . Dann gilt für das exzeptionelle, torische System*

$$\mathcal{A} = \text{Aug}_{i_n \dots i_1} L_1^{-\alpha} \mathcal{A}_{r,0},$$

daß $\varpi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_Y$ ist.

Allgemeiner gilt, dass das folgende Diagramm für $\mathcal{A}_{r,i} \in \text{Pic}(\mathcal{F}_r)^4$ und beliebige Augmentationsstellen j_1, \dots, j_n kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(X)^{n+4} & \xrightarrow{\varpi} & \text{Pic}(Y)^{n+4} \\ \uparrow \text{Aug}_{j_n \dots j_1} & & \uparrow \text{Aug}_{j_n \dots j_1} \\ \text{Pic}(\mathcal{F}_r)^4 & \xrightarrow{\varpi} & \text{Pic}(\mathcal{F}_{r+2\alpha})^4 \end{array}$$

Nach Proposition 4.2 bleibt die Exzeptionalität von torischen Systemen unter Deformation mittels ϖ^{-1} erhalten. Dasselbe Ergebnis können wir für T -Degeneration mittels ϖ nicht erwarten, beispielsweise gilt das nicht für die Degeneration von Hirzebruchflächen $\mathcal{F}_0 \rightsquigarrow \mathcal{F}_{2\alpha}$, siehe Proposition 4.9. Im folgenden stellen wir allerdings ein hinreichendes Kriterium vor, wann die Exzeptionalität von konstruierbaren, torischen Systemen erhalten bleibt.

DEFINITION 4.12. Sei $X_0 \rightsquigarrow X_s$ eine T -Deformation von \mathbb{C}^* -Flächen und \mathcal{A} ein konstruierbares, torisches System auf X_s . Sei weiters $\varpi : \text{Pic}(X_s) \rightarrow \text{Pic}(X_0)$ der zugehörige Isomorphismus der Picardgruppen. Wir nennen \mathcal{A} kompatibel mit dieser T -Deformation, falls

- (1) X_s eine Hirzebruchfläche ist und $\varpi(\mathcal{A})$ exzeptionell ist, oder
- (2) $X_0 \rightsquigarrow X_s$ zu einer T -Deformation $Y_0 \rightsquigarrow Y_s$ abgeblasen werden kann, sodaß \mathcal{A} die Augmentation eines damit kompatiblen, torischen Systems \mathcal{A}' auf Y_s ist.

Eine nahezu direkte Konsequenz dieser induktiven Definition ist folgende Proposition.

PROPOSITION 4.13. Sei $X_0 \rightsquigarrow X_s$ eine T -Deformation und $\varpi : \text{Pic}(X_s) \rightarrow \text{Pic}(X_0)$ der zugehörige Isomorphismus der Picardgruppen. Sei weiters \mathcal{A} ein konstruierbares, torisches System auf X_s . Genau dann ist \mathcal{A} kompatibel mit dieser Deformation, wenn $\varpi(\mathcal{A})$ auch ein konstruierbares, torisches System ist.

10. Alle exzeptionellen Folgen sind im Falle $\rho = 3, 4$ konstruierbar

Ausgehend von torischen Systemen auf Hirzebruchflächen, kann ich für Picardrang $\rho = 3, 4$ zeigen, daß alle exzeptionellen Folgen dort konstruierbar sind. Dafür untersuche ich zunächst torische Systeme auf der del Pezzo Fläche

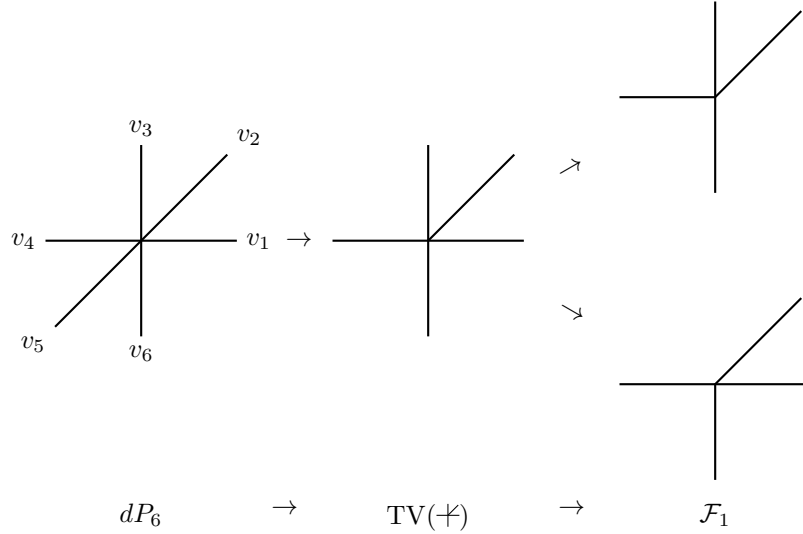
$$dP_6 = \text{TV}(-1, -1, -1, -1, -1, -1) = \text{TV}(\star),$$

welche Picardrang 4 hat.

Aus Beispiel 3.24 kenne ich alle zwölf Automorphismen der Picardgruppe, die den kanonischen Divisor und das Schnittprodukt erhalten, das heißt, die K -Isometrien. Diese entsprechen gerade den zwölf verschiedenen Möglichkeiten dP_6 zur \mathcal{F}_1 abzublasen, wodurch ich aber auch zwölf verschiedene, gute Basen von $\text{Pic}(dP_6)$ erhalte. Zwei Möglichkeiten des Abblasens sind in Abbildung 15 dargestellt.

Zunächst die zwei guten Basen auf $\text{TV}(\dagger) = \text{TV}(-1, -1, -1, 0, 0)$. Die Strahlen von $\text{TV}(\dagger)$ sind $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (1, 1)$, $v_3 = (0, 1)$, $v_4 = (-1, 0)$ und $v_6 = (0, -1)$ (man beachte, daß ich v_5 übergangen habe, das wird der Aufblasungsstrahl). $\text{TV}(\dagger)$ kann durch Entfernen von v_1 oder v_3 zu \mathcal{F}_1 aufgeblasen werden: $\text{TV}(\dagger) \rightarrow \text{TV}(\dagger)$

⁴Hier handelt sich um keine Fußnote.

ABBILDUNG 15. Das Abblasen der dP_6 zu \mathcal{F}_1

und $\text{TV}(+) \rightarrow \text{TV}(-)$. Nach Beispiel 1.21 sind die nef-Basis P_n, Q_n und die gute Basis P, R_1 dieser beiden Hirzebruchflächen von folgender Form:

	$\text{TV}(+)$	$\text{TV}(-)$
P_n	D_4	D_6
Q_n	D_6	D_4
P	D_6	D_4
R_1	$D_6 - D_4$	$D_4 - D_6$

Durch die Aufblasungen können die guten Basen von $\text{Pic TV}(+)$ und $\text{Pic TV}(-)$ im Sinne von Proposition 1.29 zu einer guten Basis P, R_1, R_2 von $\text{Pic TV}(+)$ fortgesetzt werden:

	$\text{TV}(+) \rightarrow \text{TV}(+)$	$\text{TV}(+) \rightarrow \text{TV}(-)$
(1) P	$D_6 + D_1 \sim D_4 + D_3$	$D_4 + D_3$
R_1	$D_6 + D_1 - D_4 \sim D_3$	$D_4 + D_3 - D_6 \sim D_1$
R_2	D_1	D_3

Damit sind die beiden guten Basen von $\text{Pic TV}(+)$ gerade $B_1 = (P, D_3, D_1)$ und $B_2 = (P, D_1, D_3)$ mit $P = D_3 + D_4$.

Das Einfügen des Strahls $v_5 = (-1, -1)$ führt zur Aufblasung $\text{TV}(+) \rightarrow \text{TV}(+)$ und die beiden guten Basen (unter Benutzung der Relation $D_4 + D_5 = D_1 + D_2$):

	$\text{TV}(+) \rightarrow \text{TV}(+)$	$\text{TV}(+) \rightarrow \text{TV}(-)$
P	$D_1 + D_2 + D_3$	$D_1 + D_2 + D_3$
R_1	D_3	D_1
R_2	D_1	D_3
R_3	D_5	D_5

Nun kann $\text{TV}(\neq)$ zu sechs verschiedenen $\text{TV}(\neq)$ abgeblasen werden, was den sechs verschiedenen Arten, die Strahlen von \neq im Gegenuhrzeigersinn durchnummerieren, entspricht. Die beiden obigen Basen sind auch über einen Wechsel der Numerierung verbunden, dabei ist aber nicht nur eine Rotation sondern auch ein Wechsel des Zeigersinns nötig.

Wir haben also zwölf Basen der Form

$$(2) \quad \begin{array}{c|c|c} \circ & & \circ \\ \hline P & D_i + D_{i+1} + D_{i+2} & D_i + D_{i+1} + D_{i+2} \\ R_1 & D_{i+2} & D_i \\ R_2 & D_i & D_{i+2} \\ R_3 & D_{i+4} & D_{i+4} \end{array} \quad \text{für } i \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{1, \dots, 6\}.$$

Ich bezeichne diese Basen mit B_i° bzw. B_i° . Aufgrund ihrer Exzeptionalität sind je zwei verschiedene Divisoren D_i nicht zueinander äquivalent. Somit liegen tatsächlich 12 verschiedene Basen vor. Die Basiswechselformen habe ich schon in Beispiel 3.24 festgehalten. Ich möchte nun zeigen, wie sich diese Basiswechsel auf eine dieser Basen auswirkt. Nach Beispiel 3.24 gibt es Basiswechsel vom Typ W_1 , die Permutationen der Divisoren R_1, R_2 und R_3 entsprechen, ich werde im folgenden deshalb statt einer Matrix von diesem Typ einfach diese Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_3$ anschreiben. Des weiteren dürfen die Matrizen vom Typ W_1 noch mit der Matrix W_2 kombiniert werden, dafür schreibe ich dann $\bar{\sigma}$ (was auch durch $W_2^2 = \text{id}$ gerechtfertigt ist). Damit erhalte für die Basis $(P, R_1, R_2, R_3) = B_1^\circ$ folgende Tabelle. In den beiden ersten Spalten stehen dabei die Elemente W der Weylgruppe \mathcal{W}_3 und das Bild der Basis unter diesem Element. In der letzten Spalte halte ich noch fest, welcher der Basen $B_i^{\circ, \circ}$ dieses Bild entspricht.

$W \in \mathcal{W}_3$	$W(B_1^\circ)$	$W(B_1^\circ) \sim ?$
id	(P, R_1, R_2, R_3)	B_1°
$(1\ 2\ 3)$	(P, R_3, R_1, R_2)	B_3°
$(3\ 2\ 1)$	(P, R_2, R_3, R_1)	B_5°
$(1\ 2)$	(P, R_2, R_1, R_3)	B_1°
$(2\ 3)$	(P, R_1, R_3, R_2)	B_3°
$(3\ 1)$	(P, R_3, R_2, R_1)	B_5°
$\bar{\text{id}}$	(P', R'_1, R'_2, R'_3)	B_4°
$\overline{(1\ 2\ 3)}$	(P', R'_3, R'_1, R'_2)	B_6°
$\overline{(3\ 2\ 1)}$	(P', R'_2, R'_3, R'_1)	B_2°
$\overline{(1\ 2)}$	(P', R'_2, R'_1, R'_3)	B_4°
$\overline{(2\ 3)}$	(P', R'_1, R'_3, R'_2)	B_6°
$\overline{(3\ 1)}$	(P', R'_3, R'_2, R'_1)	B_2°

wobei $(P', R'_1, R'_2, R'_3) = (P, R_1, R_2, R_3) \cdot W_2$ ist, das heißt,

$$\begin{aligned} P' &= 2P - R_1 - R_2 - R_3 & R'_2 &= P - R_1 - R_3 \\ R'_1 &= P - R_2 - R_3 & R'_3 &= P - R_1 - R_2 \end{aligned}$$

Mit diesen Überlegungen komme ich nun zu folgendem Lemma:

SATZ 4.14. *Auf dP_6 und $dP_7 = \text{TV}(-1, -1, -1, 0, 0) = \text{TV}(\neq)$ sind alle torischen Systeme konstruierbar.*

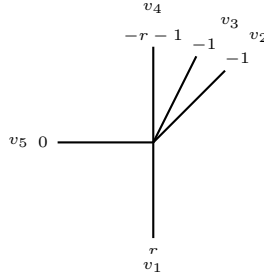


ABBILDUNG 16. Torische Fläche vom Picardrang 3.

BEWEIS. Es genügt die Aussage für dP_6 zu zeigen (ein torisches System auf dP_7 , welches nicht konstruierbar ist, behält diese Eigenschaft(en) bei einer Augmentation zu einem torischen System auf dP_6 , siehe Lemma 3.33). Sei also \mathcal{A} ein torisches System auf dP_6 . Mittels Gale-Dualität (siehe Abschnitt 7.1) können wir zu \mathcal{A} eine torische Varietät $Y = \text{TV}(\mathcal{A})$ assoziieren. Nach Lemma 3.37 gibt es ein konstruierbares, torisches System \mathcal{A}_Y auf dP_6 mit $\text{TV}(\mathcal{A}_Y) = \text{TV}(\mathcal{A})$. Nun besagt Gale-Dualität, daß sich \mathcal{A} und \mathcal{A}_Y nur durch einen Gitterautomorphismus unterscheiden, der wegen $\text{TV}(\mathcal{A}_Y) = \text{TV}(\mathcal{A})$ und $\sum \mathcal{A}_{Y,i} = K_{dP_6} = \sum \mathcal{A}_i$ Schnittprodukt und kanonischen Divisor erhält. Aufgrund der vorangegangenen Berechnungen kennen wir alle K -Isometrien und wissen, daß nur konstruierbare, torische Systeme auftreten können. \square

LEMMA 4.15. *Sei X eine torische Fläche vom Picardrang 3 bzw. 4. Dann kann X aus dP_7 bzw. dP_6 durch sukzessives T -Degenerieren gewonnen werden.*

BEWEIS. Nach Proposition 2.20 ist X schon durch eine Kette von T -Degenerationen und T -Deformationen mit einer der beiden del Pezzo Flächen verbunden. Hier zeigen wir, daß T -Degenerationen ausreichen.

In Proposition 2.18 sind gewissen T -Deformationen über die Schnittzahlen beschrieben worden. Ich werde diese Proposition sowie die dortige Notationen hier verwenden.

Jede torische Fläche X vom Picardrang 3 kann durch Aufblasen aus einer Hirzebruchfläche gewonnen werden. Mit Lemma 1.23 folgt daraus, daß

$$X_r := \text{TV}(r, -1, -1, -r - 1, 0) \text{ für ein } r \geq 0$$

ist, siehe Abbildung 16.

Für die T -Deformationen aus Proposition 2.18 wird eine positive Selbstschnittzahl $a_1 = r$ vorausgesetzt, sei also $r > 0$. Nebenbei bemerkt ist X für $r = 0$ gerade dP_7 . Für den Strahl $v_4 = (0, 1)$ gilt $-v_1 = v_4$, also ist die Zahl $\gamma = (-1 + 3) + (-1 + 3) - 3 = 1$. Damit gibt es eine T -Deformation

$$X_r \rightsquigarrow X_{r-1-2\alpha} = \text{TV}(r-1-2\alpha, -1, -1, -r+2\alpha, 0) \text{ für } 0 \leq \alpha \leq r.$$

Für ungerades r wählen wir $\alpha = \frac{r-1}{2}$ (ist ≤ 0 wegen $r > 0$) und erhalten so $X_0 = \text{TV}(0, -1, -1, -1, 0) = dP_7$. Für gerades r wählen wir $\alpha = r/2$ und erhalten ebenfalls $X_{-1} = \text{TV}(-1, -1, -1, 0, 0) = dP_7$.

Beide Fälle zusammengenommen bedeuten, daß wir dP_7 zu jeder torischen Fläche X_r vom Picardrang 3 degenerieren können.

Sei nun X eine torische Fläche vom Picardrang 4. Dann entsteht X durch Aufblasen einer torischen Fläche $\text{TV}(r, -1, -1, -r-1, 0)$ mit $r \geq 0$. Hier spielt der Ort der Aufblasung eine Rolle, sodaß wir drei verschiedene Familien erhalten:

Durch Ausblasen zwischen viertem und fünftem Strahl bzw. zwischen fünftem und erstem Strahl erhalten wir die Familie

$$X_r^A = \text{TV}(r-1, -1, -1, -r-1, -1) \text{ für } r \geq 0.$$

Für $r > 1$ und mit $\gamma = 1$ ergeben sich die Deformationen

$$X_r^A \rightsquigarrow X_{r-1-2\alpha}^A = \text{TV}(r-2-2\alpha, -1, -1, -r+2\alpha, -1) \text{ für } 0 \leq \alpha \leq r-1.$$

Für beliebiges r gelangen wir also durch sukzessives Deformieren zu $X_0^A = dP_6$.

Durch Aufblasen zwischen erstem und zweitem Strahl bzw. zwischen drittem und viertem Strahl erhalten wir die Familie

$$X_r^B = \text{TV}(r-1, -1, -2, -1, -r-1, 0) \text{ für } r \geq 0.$$

Um im Sinne von Proposition 2.18 zu deformieren, muß $r > 1$ sein. Die einander gegenüberliegenden Strahlen sind v_1 und v_5 . Damit ist $\gamma = 2$. Also können wir

$$X_r^B \rightsquigarrow X_{r-2-2\alpha}^B = \text{TV}(r-3-2\alpha, -1, -2, -1, -r+1+2\alpha, 0) \text{ für } 0 \leq \alpha \leq r-1$$

deformieren. Somit können wir stets für $r > 1$ stets von X_r^B zu X_{r-2}^B deformieren. Für gerades r gelangen wir dann schlußendlich zu $X_0^B = X_1^A$. Für ungerades r hingegen endet diese Degenerationskette bei X_1^B .

Durch Aufblasen zwischen zweitem und drittem Strahl erhalten wir die Familie

$$X_r^C = \text{TV}(r, -2, -1, -2, -r-1, 0) \text{ für } r \geq 0.$$

Für $r > 0$ erhalten wir, da $\gamma = 1$ ist, T -Deformationen

$$X_r^C \rightsquigarrow X_{r-1-2\alpha}^C = \text{TV}(r-1-2\alpha, -2, -1, -2, -r+2\alpha, 0) \text{ für } 0 \leq \alpha \leq r.$$

Damit gelangen wir nach endlich vielen Deformationen von X_r^C zu $X_0^C = X_1^B$.

Nun bleibt zu zeigen, daß $dP_6 = X_0^A$ zu X_0^B und X_0^C degeneriert werden kann. Das kann mittels T -Degeneration folgendermaßen geschehen: $dP_6 \leftarrow X_0^B \leftarrow X_0^C$, für die Degenerationsdiagramme siehe Abbildung 17. \square

BEMERKUNG 4.16. Die Deformation $X \rightsquigarrow Y$ die in Proposition 2.18 konstruiert und hier ausgiebig verwendet wurde, induziert wie jede T -Degeneration einen Isomorphismus $\varpi : \text{Pic}(Y) \rightarrow \text{Pic}(X)$ der Picardgruppen.

In dem Lemma sind die Deformationen von jener Form, daß die einander gegenüberliegenden Strahlen, wie sie in Proposition 2.18 benötigt werden, gerade zu jenen Divisoren gehören, deren Selbstschnittzahl mit dem Parameter r variiert.

Außerdem entsprechen diese Divisoren im Degenerationsdiagramm genau jenen beiden Punkten, von denen mehrere Kanten ausgehen. Damit gilt aber insbesondere für exzeptionelle Divisoren, die *nicht* diesen beiden Punkten entsprechen, daß sie vermöge ϖ wieder auf einen exzeptionellen Divisor abgebildet werden.

Abschließend möchte ich noch darauf hinweisen, daß diese beiden speziellen Punkte nur für ausgewählte Werte von r einem exzeptionellem Divisor entsprechen können.

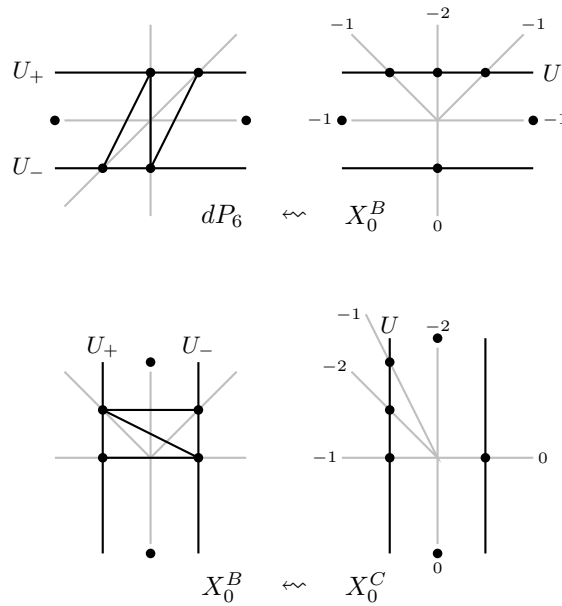


ABBILDUNG 17. Die T -Degenerationen von $dP_6 = X_0^A$ zu X_0^B und weiter zu X_0^C .

	generische Anzahl exzeptioneller Divisoren	Ausnahmen
X_r^A	4	6 (für $r = 0$)
X_r^B	2	4 (für $r = 0$)
X_r^C	1	2 (für $r = 0$)

Im folgenden möchte ich untersuchen, ob nun alle exzeptionellen, torischen Systeme konstruierbar sind. Es wird sich herausstellen, daß dies nur für kleine Picardränge gilt, aber in diesen Fällen können wir diesen Sachverhalt recht leicht untersuchen.

Zunächst läßt sich diese Untersuchung auf die Frage reduzieren, ob ein exzeptioneller Divisor unter Degeneration ein exzeptioneller Divisor bleibt. Ich werde zunächst diese Reduktion erläutern.

Auf dP_7 und dP_6 wissen wir nach Satz 4.14, daß alle torischen Systeme auf diesen del Pezzo Flächen konstruierbar sind. Nun können wir mittels (eventuell mehreren hintereinandergeschalteten) T -Degenerationen von diesen Flächen zu allen anderen torischen Flächen gelangen, wie in Lemma 4.15 gezeigt wurde.

Sei $X \rightsquigarrow Y$ eine dieser T -Degenerationen und \mathcal{A} ein konstruierbares, torisches System auf X . Sei E_X der exzeptionelle Divisor auf X , mit welchem augmentiert wurde. Das Bild von E_X unter $\varpi : \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(Y)$ kann nun entweder wieder ein exzeptioneller Divisor E_Y sein oder eben nicht.

Falls die Degeneration abgeblasen werden kann, dann ist $\varpi(E_X) = E_Y$. Ich möchte nun zeigen, daß damit $\varpi(\mathcal{A})$ als die Augmentierung eines torischen Systems auf Y'' mittels des exzeptionellen Divisors E_Y geschrieben werden kann. Zunächst

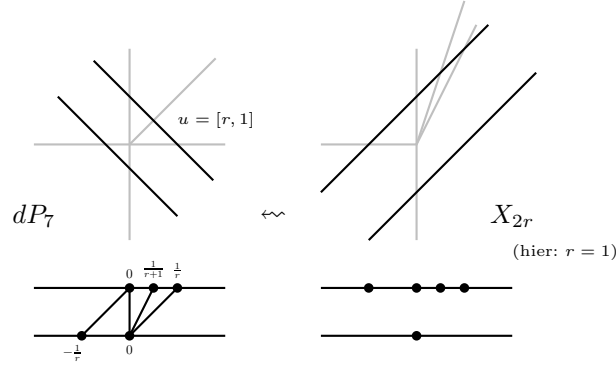


ABBILDUNG 18. Eine T -Degeneration von dP_7 zu X_{2r} .

schreiben wir $\varpi(\mathcal{A})$ in der Form

$$(\dots, \varpi(A_{i-1}), \varpi(A_i) - E_Y, E_Y, \varpi(A_{i+1}) - E_Y, \varpi(A_{i+2}), \dots).$$

Es ist zu zeigen, daß $\varpi(A_j)$ zurückgezogene Divisoren von $\text{Pic}(Y'')$ sind. Nun kann über den Rückzug $\text{Pic}(Y'')$ als Unterraum von $\text{Pic}(Y)$ aufgefaßt werden, dieser Unterraum ist gerade das orthogonale Komplement von E_Y bezüglich der Schnittpaarung. Da ϖ die Schnittpaarung erhält, ist $\varpi(\text{Pic}(X'')) = \text{Pic}(Y'')$. Also impliziert die Konstruierbarkeit von \mathcal{A} die selbe Eigenschaft für $\varpi(\mathcal{A})$.

Jetzt betrachte ich den Fall, daß $\varpi(E_X)$ kein exzeptioneller Divisor ist. Nach Bemerkung 4.16 kann das nur unter ganz speziellen Umständen eintreten. Damit kann aber die Degeneration auch nicht abgeblasen werden und es ist zunächst unklar, ob $\varpi(\mathcal{A})$ konstruierbar ist, sodaß eine genauere Untersuchung lohnend ist.

10.1. Konstruierbare, torische Systeme für Picardrang 3.

THEOREM 4.17. *Sei X eine torische Fläche vom Picardrang 3. Dann sind alle exzeptionellen Folgen auf X konstruierbar.*

BEWEIS. Eine torische Fläche vom Picardrang 3 kann stets mittels der Schnittzahlen als $X_r = \text{TV}(-1, -1, -r - 1, 0, r)$ für ein $r \geq 0$ geschrieben werden.

Bereits in Lemma 4.15 wurde gezeigt, daß von dP_7 mittels T -Degeneration jede Fläche X_r erreicht werden kann. Nun werde ich diese Degenerationen genauer betrachten, um eine genaue Beschreibung vom induzierten Isomorphismus der Picardgruppen zu erhalten. Anschließend kann ich damit das Verhalten der torischen Systeme unter Degeneration untersuchen.

Zunächst betrachte ich die Beschreibung von dP_7 mittels des Multidivisors zu $u = [r, 1]$ mit $r > 0$, dieser besteht aus den Unterteilungen $U_+ = U(0, \frac{1}{r+1}, \frac{1}{r})$ und $U_- = U(-\frac{1}{r}, 0)$. Für diese Unterteilung ist ein Degenerationsdiagramm möglich (ist für $r > 1$ sogar eindeutig), welche die Degeneration zur torischen Fläche zur Unterteilung $U(-\frac{1}{r}, 0, \frac{1}{r+1}, \frac{1}{r})$ beschreibt. Diese Fläche hat die Strahlen

$$(0, \pm 1), (1, r + 1), (1, r) \text{ und } (-1, r).$$

Nach dem Basiswechsel $e_1 \mapsto e_1 + re_2$ und $e_2 \mapsto e_2$ läßt sich diese Fläche leichter als X_{2r} erkennen. Ich habe die dieser Berechnung zugrundeliegenden Überlegungen in Abbildung 18 festgehalten.

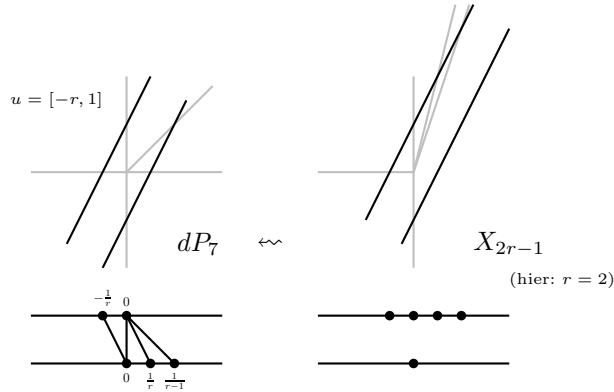


ABBILDUNG 19. Eine T -Degeneration von dP_7 zu X_{2r-1} .

Auf $dP_7 = X_0$ gibt es drei exzeptionelle Divisoren D_1^0, D_2^0 und D_3^0 . Aufgrund des Degenerationsdiagramms ist $\varpi(D_i^0) = D_i^{2r}$ wieder ein exzeptioneller Divisor für $i = 1, 2$ und die Degeneration kann abgeblasen werden. Für den dritten exzeptionellen Divisor ist $\varpi(D_3^0) = D_3^{2r} + rD_4^{2r}$, welcher auf X_{2r} kein exzeptioneller Divisor ist.

Als nächstes betrachte ich den Multidivisor zu $u = [-r, 1]$ mit $r > 1$. Hier besteht der Multidivisor aus den Unterteilungen $U_+ = U(-1/r, 0)$ und $U_- = U(0, 1/r, \frac{1}{r-1})$. Analog zu vorhin ergibt sich die Degeneration zur Fläche X_{2r-1} , siehe Abbildung 19.

Für die Divisoren D_i^0 für $i = 1, 2$ läßt sich die Degeneration wiederum abblasen. Der Divisor D_3^0 wird diesmal auf $\varpi(D_3^0) = D_3 + rD_2 + (r-1)D_1 = D$ abgebildet.

Es fehlt noch eine Degeneration, nämlich $dP_7 \leftarrow X_1$, welche wir über $u = [-1, 1]$ erreichen. Dieser Fall ist weitgehend analog zum vorigen Fall, nur daß $U_- = U(0, 1)$ und $m_{>} = \bullet$ ist. Auch in diesem Fall ist $\varpi(D_3^0) = D_3^1 + D_2^1 = D$ kein exzeptioneller Divisor.

Auf dP_7 gibt es zwei gute Basen der Picardgruppe: $B_i = (P, R_1^j, R_2^j)$ für $j = 1, 2$. Es gibt zwei K -Isometrien der Picardgruppe $\text{Pic}(dP_7)$. Das ist zum einen die Identität und der andere Automorphismus vertauscht die beiden guten Basen. Da $\varpi : \text{Pic}(dP_7) \rightarrow \text{Pic}(X_r)$ ein Isomorphismus ist, der auch Schnittprodukt und kanonischen Divisor erhält, sind $\varpi(B_j) = (\varpi(P), \varpi(R_1^j), \varpi(R_2^j))$ mit $j = 1, 2$ gute Basen von $\text{Pic}(X_r)$.

Nun ist $\varpi(R_2^1)$ wieder ein exzeptioneller Divisor auf X_r , sodaß ein torisches System auf dP_7 , das bezüglich R_2^1 augmentiert wurde, unter ϖ auf ein konstruierbares, torisches System auf X_r abgebildet wird. Allerdings ist $\varpi(R_2^2)$ kein exzeptioneller Divisor auf X_r mit $r > 0$, wie im vorigen gezeigt wurde.

Ich werde nun zeigen, daß jene torischen Systeme auf dP_7 , welche bezüglich R_2^2 augmentiert wurden, unter ϖ auf torische Systeme abgebildet werden, die *nicht* exzeptionell sind (bzw. mit torischen Systemen, die bezüglich R_2^1 augmentiert wurden, übereinstimmen). Dafür betrachte ich die (konstruierbaren) torischen Systeme auf dP_7 . Diese entstehen durch Augmentation eines torischen Systems $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{1,i}$

auf \mathcal{F}_1 (siehe Proposition 3.25), das heißt, sie sind von folgender Form:

$$\begin{aligned} \text{Aug}_1 \mathcal{A}^j(i) &= (P - R_1^j - R_2^j, R_2^j, (i+1)P - iR_1^j - R_2^j, P - R_1^j, -iP + (i+1)R_1^j) \\ \text{Aug}_2 \mathcal{A}^j(i) &= (P - R_1^j, (i+1)P - iR_1^j - R_2^j, R_2^j, P - R_1^j - R_2^j, -iP + (i+1)R_1^j) = \\ &= (\overline{\text{Aug}_1 \mathcal{A}^j(i)})[1] \\ \text{Aug}_3 \mathcal{A}^j(i) &= (P - R_1^j, (i+1)P - iR_1^j, P - R_1^j - R_2^j, R_2^j, -iP + (i+1)R_1^j - R_2^j) \\ &= \text{Aug}_1 \mathcal{A}^j(-i-1)[2] \\ \text{Aug}_4 \mathcal{A}^j(i) &= (P - R_1^j - R_2^j, (i+1)P - iR_1^j, P - R_1^j, -iP + (i+1)R_1^j - R_2^j, R_2^j) = \\ &= (\overline{\text{Aug}_1 \mathcal{A}^j(-i-1)})[1] \end{aligned}$$

Nun betrachte ich das Bild dieser torischen Systeme unter ϖ für $j = 2$. Sei $\mathcal{A}_j(i) = \varpi(\text{Aug}_1 \mathcal{A}^j(i))$. Nach Bemerkung 3.13 ist ein solches torisches System exzeptionell, falls $H^\bullet(\sum_{j=k}^l -A_j) = 0$ für $1 \leq k \leq l < n$ ist. In jedem dieser torischen Systeme kommt als $\sum_{j=k}^l -A_j$ stets

$$E_1^{(i)} = -(i+1)\varpi(P) + i\varpi(R_1^2) + \varpi(R_2^2) = \sum_{j=3}^3 -(\mathcal{A}_2(i))_j$$

und

$$E_2^{(i)} = -(i+2)\varpi(P) + (i+1)\varpi(R_1^2) = \sum_{j=2}^4 -(\mathcal{A}_2(i))_j$$

vor.

In folgender Tabelle halte ich das Verhalten der Geradenbündel unter den Degenerationen $dP_7 \leftarrow X_{2r}$ und $dP_7 \leftarrow X_{2r-1}$ fest.

Divisor	ϖ_{2r}	ϖ_{2r-1}
D_1	D_1	D_2
D_2	D_2	D_1
D_3	$D_3 + rD_4$	$(r-1)D_1 + rD_2 + D_3$
D_4	D_4	D_4
D_5	$rD_1 + (r+1)D_2 + D_3$	$D_3 + rD_4$
$P^2 = D_4 + D_3$	$D_3 + (r+1)D_4$	$(r-1)D_1 + rD_2 + D_3 + D_4$
$R_1^2 = D_1$	D_1	D_2
$R_2^2 = D_3$	$D_3 + rD_4$	$(r-1)D_1 + rD_2 + D_3$
$E_1^{(i)}$	$iD_1 - iD_3 -$ $-(i(r+1)+1)D_4 \sim$ $\sim -iD_2 - D_3 - (ir+1)D_4$	$i(1-r)D_1 + i(1-r)D_2 -$ $-iD_3 - (i+1)D_4 \sim$ $\sim -iD_3 - (ir+1)D_4$
$E_2^{(i)}$	$(i+1)D_1 - (i+2)D_3 -$ $-(i+2)(r+1)D_4$	$-(i+2)(r-1)D_1 +$ $+(i+1-(i+2)r)D_2 -$ $-(i+2)D_3 - (i+2)D_4 \sim$ $D_1 - (i+2)D_3 - ((i+2)r+1)D_4$

Nun ist $H^0(E_1^{(i)}) \neq 0$ für $i < 0$, da in diesem Fall der Divisor effektiv ist. Auf X_{2r} mit $r > 0$ ist

$$\begin{aligned} K_{2r} - E_2^{(i)} &= (\sum_k -D_k) - (i+1)D_1 + (i+2)D_3 + (i+2)(r+1)D_4 = \\ &= -(i+2)D_1 - D_2 + (i+1)D_3 + ((i+2)(r+1)-1)D_4 - D_5 \sim \\ (D_5 = 2rD_1 + (2r+1)D_2) &\sim -(2r+i+2)D_1 - (2r+2)D_2 + iD_3 + (ir+i+2r+1)D_4. \end{aligned}$$

Da $ir + i + 2r + 1 \geq 2r + i + 2$ und $\geq 2r + 2$ für $i > 0$ ist, zeigt sich unter Verwendung der Relation $D_4 = D_1 + D_2$, daß dieser Divisor effektiv ist. Somit ist mit Serre-Dualität $H^2(E_2^{(i)}) \neq 0$ für $i > 0$.

Auf X_{2r-1} mit $r > 0$ ist

$$\begin{aligned} K_{2r-1} - E_2^{(i)} &= (\sum_k -D_k) - D_1 + (i+2)D_3 + ((i+2)r+1)D_4 = \\ &= -2D_1 - D_2 + (i+1)D_3 + (i+2)rD_4 - D_5 \sim \\ (D_5 = (2r-1)D_1 + 2rD_2) &\sim -(2r+1)D_1 - (2r+1)D_2 + (i+1)D_3 + (i+2)rD_4. \end{aligned}$$

Wegen $(i+2)r = ir + 2r > 2r + 1$ für $i > 0$ gilt analog zu vorhin, daß $H^2(E_2^{(i)}) \neq 0$ für $i > 0$.

Somit sind die torischen Systeme $\mathcal{A}_2(i)$ für $i \neq 0$ nicht exzeptionell.

Für $i = 0$ ist die Situation anders. Für die beiden Basen gilt ja, daß $R_1^1 = R_2^2 = D_3$ und $R_2^1 = R_1^2 = D_1$. Damit ist das torische System $\mathcal{A}_2(0)$ nichts anderes als das gespiegelte und verschobene torische System $\mathcal{A}_1^1(0)$, welches konstruierbar ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2(0) &= (P - R_1^2 - R_2^2, R_2^2, P - R_2^2, P - R_1^1, R_1^1) = \\ &= (P - R_1^1 - R_2^1, R_1^1, P - R_1^1, P - R_2^1, R_2^1) = -(\mathcal{A}_1(0)[1]) \end{aligned}$$

Damit ist jedes exzeptionelle, torische System auf X auch konstruierbar. \square

BEMERKUNG 4.18. In (3) wurde eine Basis (P^2, R_1^2, R_2^2) von $\text{Pic } X_r$ mit $r > 0$ festgehalten, die allerdings nicht gut ist. Die gute Basis kommt gerade durch Vertauschen von R_1^2 und R_2^2 zustande, das heißt

	X_{2r}	X_{2r+1}
P	$D_3 + (r+1)D_4$	$rD_1 + (r+1)D_2 + D_3 + D_4$
R_1	D_1	D_2
R_2	$D_3 + rD_4$	$rD_1 + (r+1)D_2 + D_3$

ist die gute Basis einer torischen Fläche vom Picardrang 3, die nicht isomorph zu dP_7 ist.

10.2. Konstruierbare, torische Systeme für Picardrang 4. Das Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis von

THEOREM 4.19. *Sei X eine torische Fläche vom Picardrang 4. Dann sind alle exzeptionellen Folgen auf X konstruierbar.*

Das Degenerationsverhalten. Wie schon im Beweis von Lemma 4.15 festgestellt wurde, können Flächen vom Picardrang 4 in drei Familien aufgeteilt werden. Da sich diese drei Familien im Zuge der Degenerationen überschneiden, nehme ich hier eine Ummumerung vor, damit die Divisorenbezeichnungen konsistent bleiben ($r \geq 0$):

$$\begin{aligned} X_r^A &= \text{TV}(\quad D_1 \quad D_2 \quad D_3 \quad D_4 \quad D_5 \quad D_6 \\ &\quad -1, \quad -1, \quad -r-1, \quad -1, \quad -1, \quad r-1 \quad) \\ X_r^B &= \text{TV}(\quad r-1, \quad -1, \quad -2, \quad -1, \quad -r-1, \quad 0 \quad) \\ X_r^C &= \text{TV}(\quad 0, \quad -r-1, \quad -2, \quad -1, \quad -2, \quad r \quad) \end{aligned}$$

Die zugehörigen Strahlen zu drei wichtigen Flächen:

$$\begin{aligned} dP_6 = X_0^A &: \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad v_5 \quad v_6 \\ X_0^B = X_1^A &: \quad (1,0) \quad (1,1) \quad (0,1) \quad (-1,0) \quad (-1,-1) \quad (0,-1) \\ X_0^C = X_1^B &: \quad (1,0) \quad (1,1) \quad (0,1) \quad (-1,1) \quad (-1,0) \quad (0,-1) \\ X_0^C = X_1^C &: \quad (0,-1) \quad (1,0) \quad (1,1) \quad (1,2) \quad (0,1) \quad (-1,0) \end{aligned}$$

Exzeptionelle Divisoren

$$\begin{array}{rcl}
 dP_6 = X_0^A & & 6 \\
 \downarrow & & \\
 X_0^B = X_1^A \leftarrow X_2^A \leftarrow X_3^A & & 4 \\
 \swarrow \quad \searrow & & \\
 \rightsquigarrow X_4^B \rightsquigarrow X_2^B & & X_0^C = X_1^B \leftarrow X_3^B \leftarrow & 2 \\
 & & \swarrow \\
 \rightsquigarrow X_3^C \rightsquigarrow X_2^C \rightsquigarrow X_1^C & & & 1
 \end{array}$$

 ABBILDUNG 20. Mögliche T -Degenerationen von torischen Flächen mit Picardrang 4.

Desweiteren wurden dort mögliche T -Degenerationen zwischen diesen Flächen anhand der Schnittzahlen bestimmt. Das Ergebnis dieser Überlegungen fasse ich in Abbildung 20 zusammen. Im vorigen Abschnitt zum Picardrang 3 wurde schon festgestellt, daß besonders T -Degenerationen zwischen torischen Flächen problematisch sind, wo sich die Anzahl der möglichen Abblasungsorte ändert. Deswegen sind die Flächen in Abbildung 20 nach dieser Anzahl sortiert.

Nach Bemerkung 4.16 reicht es, jene Degenerationen zu betrachten, wo sich die Anzahl der exzeptionellen Divisoren ändert. Davon gibt es vier, welche auch in Abbildung 21 festgehalten sind:

	Degeneration	Änderung der Anzahl
(I)	$dP_6 \leftarrow X_1^A = X_0^B$	$6 > 4$
(II)	$X_0^B \leftarrow X_1^B = X_0^C$	$4 > 2$
(III)	$X_0^B \leftarrow X_2^B$	$4 > 2$
(IV)	$X_0^C \leftarrow X_1^C$	$2 > 1$

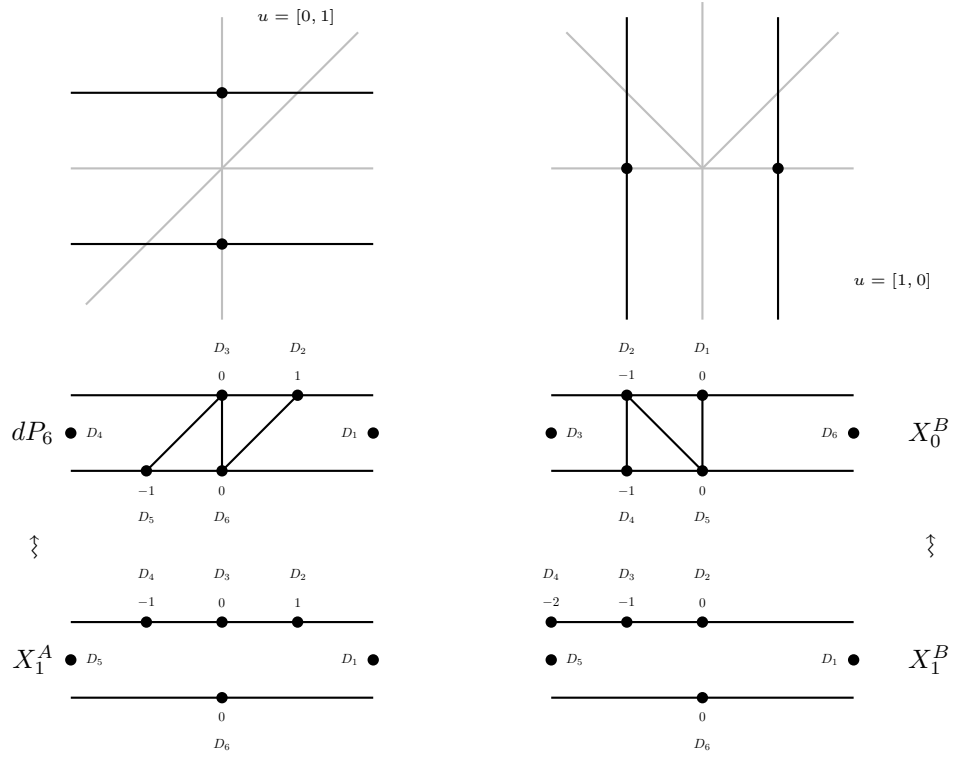
Ich werde das Verhalten der torischen Systeme unter diesen Degenerationen untersuchen. Dafür betrachte ich nun die torischen Systeme auf Flächen vom Picardrang 4 genauer.

Torische Systeme und gute Basen. Auf einer Fläche vom Picardrang 3 gibt es bezüglich einer gegebenen guten Basis P, R_1, R_2 der Picardgruppe nur ein torisches System:

$$\mathcal{A}^{(3)} = (P - R_1 - R_2, R_2, (i + 1)P - iR_1 - R_2, P - R_1, -iP + (i + 1)R_1)$$

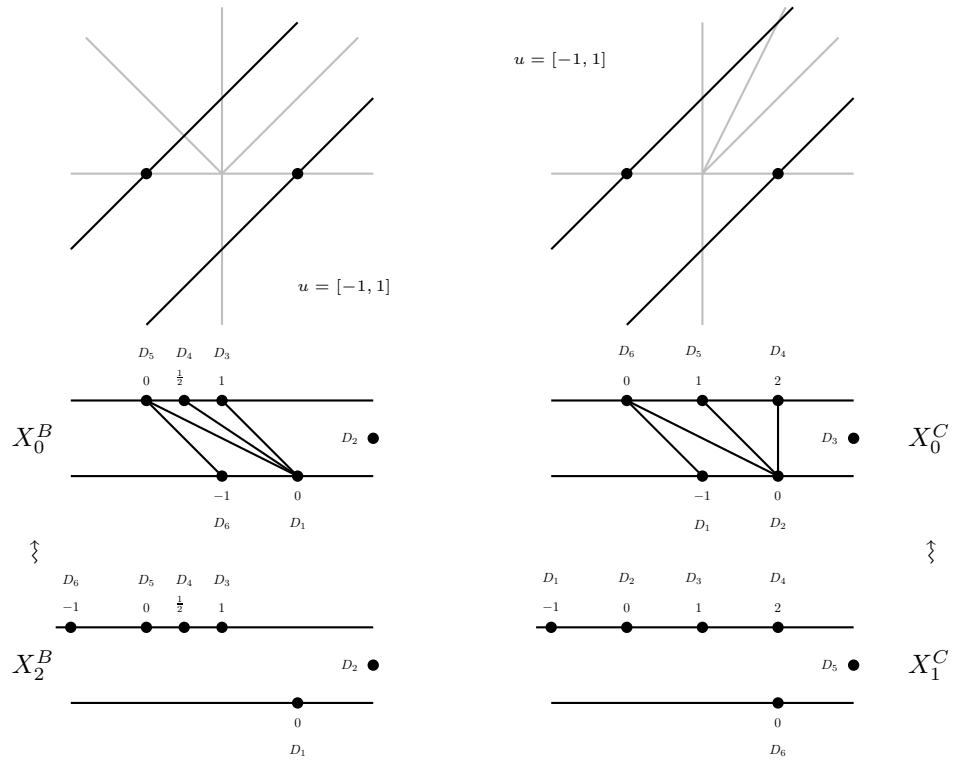
Dieses System können wir an fünf verschiedenen Stellen augmentieren und erhalten bezüglich einer guten Basis P, R_1, R_2, R_3 der Picardgruppe einer Fläche vom Picardrang 4:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_1^{(4)} &= (P - R_1 - R_2 - R_3, R_3, R_2 - R_3, (i + 1)P - iR_1 - R_2, P - R_1, -iP + (i + 1)R_1) \\
 \mathcal{A}_2^{(4)} &= (P - R_1 - R_2, R_2 - R_3, R_3, (i + 1)P - iR_1 - R_2 - R_3, P - R_1, -iP + (i + 1)R_1) \\
 \mathcal{A}_3^{(4)} &= (P - R_1 - R_2, R_2, (i + 1)P - iR_1 - R_2 - R_3, R_3, P - R_1 - R_3, -iP + (i + 1)R_1) \\
 \mathcal{A}_4^{(4)} &= (P - R_1 - R_2, R_2, (i + 1)P - iR_1 - R_2, P - R_1 - R_3, R_3, -iP + (i + 1)R_1 - R_3) \\
 \mathcal{A}_5^{(4)} &= (P - R_1 - R_2 - R_3, R_2, (i + 1)P - iR_1 - R_2, P - R_1, -iP + (i + 1)R_1 - R_3, R_3)
 \end{aligned}$$



(a) Degeneration (I): $dP_6 \leftarrow X_1^A$

(b) Degeneration (II): $X_0^B \leftarrow X_1^B$



(c) Degeneration (III): $X_0^B \leftarrow X_2^B$

(d) Degeneration (IV): $X_0^C \leftarrow X_1^C$

ABBILDUNG 21. Die T -Degenerationen (I) - (IV).

Desweiteren sind noch die möglichen guten Basen von dP_6, X_0^B und X_0^C wichtig.

Wie schon in (2) festgestellt wurde, gibt es auf dP_6 die Basen

$$B_j^\circ = (P, R_1, R_2, R_3) = (D_j + D_{j+1} + D_{j+2}, D_{j+2}, D_j, D_{j+4})$$

und $B_j^\circ = (P, R_2, R_1, R_3)$, wobei $j \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{1, \dots, 6\}$ ist.

Mit Bemerkung 4.18 können wir auch die guten Basen von X_0^B und X_0^C bestimmen.

Auf $X_0^B = \text{TV}(-1, -1, -2, -1, -1, 0)$ kann durch Abblasen von D_2 oder D_4 zu dP_7 abgeblasen werden. Durch Abblasen von der Divisoren D_1 bzw. D_5 erhalten wir $\text{TV}(0, -2, -1, -1, -1, 1)$ bzw. isomorphe Fläche $\text{TV}(-1, -1, -2, 0, 1)$. Im folgenden werden jene guten Basen, die durch Abblasen von D_4 entstehen, nicht von Bedeutung sein, sodaß ich sie hier nicht weiter betrachte. Zunächst zum Abblasen von D_2 . Aus (1) sind die guten Basen auf dP_7 bekannt. Daraus ergeben sich die beiden, guten Basen

$$(D_5 + D_6, D_5, D_2 + D_3, D_2) \text{ und } (D_5 + D_6, D_2 + D_3, D_5, D_2).$$

Durch Abblasen von D_1 bzw. D_5 erhalten wir mit Bemerkung 4.18 die beiden, guten Basen

$$(D_1 + D_2 + D_3 + D_4, D_3 + D_4, D_4, D_1) \text{ und } (D_2 + D_3 + D_4 + D_5, D_2 + D_3, D_2, D_5).$$

Auf $X_0^C = \text{TV}(0, -1, -2, -1, -2, 0)$ wird nur die gute Basis die durch Abblasen von D_2 interessant sein, was die Fläche $\text{TV}(1, -1, -1, -2, 0)$ zur Folge hat. Damit erhalten wir die gute Basis

$$(D_4 + D_5 + D_6, D_4 + D_5, D_4, D_2).$$

Nun haben wir genug Vorarbeit geleistet, um die einzelnen Fälle (I) - (IV) zu betrachten.

Dabei werde ich weitgehend analog zum Fall von Picardrang 3 vorgehen. Interessant sind dabei jene Fälle, wo unter der Abbildung ϖ der Picardgruppen ein exzeptioneller Divisor *nicht* wieder auf einen exzeptionellen Divisor abgebildet wird. Damit kann nämlich die Degeneration nicht abgeblasen werden.

Die Erwartung ist, daß in diesen Fällen das torische System $\varpi(\mathcal{A})$ nicht exzeptionell ist, welche in einer Vielzahl der Fälle auch erfüllt wird. Allerdings kommt es durchaus vor, daß $\varpi(\mathcal{A})$ exzeptionell ist. Es bedarf dann des Nachweises, daß $\varpi(\mathcal{A})$ in diesem Fall bezüglich eines anderen exzeptionellen Divisors augmentiert ist. Zwar ist dieser Nachweis auch händisch möglich, aber die große Zahl der zu untersuchenden Fälle wird durch einen Rechner wesentlich erleichtert. Für den Nachweis habe ich ein Skript für Maple [MGH⁺05] geschrieben, das im Appendix A.1 beschrieben und festgehalten ist.

(I) Die Degeneration von $dP_6 = X_0^A$ zu X_1^A . Die T -Degeneration von $dP_6 = X_0^A$ zu $X_1^A = X_0^B$ habe ich in der Abbildung 21(a) festgehalten. Diese Degeneration induziert folgende Abbildung ϖ auf Divisoren-Niveau:

$$\begin{array}{ll} D_1 \mapsto D_1 & D_4 \mapsto D_5 \\ D_2 \mapsto D_2 & D_5 \mapsto D_4 \\ D_3 \mapsto D_3 + D_4 & D_6 \mapsto D_3 + D_2 \end{array}$$

Dabei werden von den sechs exzeptionellen Divisoren auf dP_6 die vier Divisoren D_1, D_2, D_4 und D_5 wieder auf einen exzeptionellen Divisor abgebildet. Da die Punkte im Degenerationsgraphen, die diesen Divisoren entsprechen, Grad eins haben (nur

Gitterpunkte dürfen höheren Grad haben), kann die Degeneration in diesem Fall abgeblasen werden.

Die Divisoren D_3 und D_6 werden allerdings nicht auf einen exzeptionellen Divisor abgebildet. Ich werde nun das Bild eines torischen Systems, das bezüglich dieser Divisoren augmentiert wurde, genauer untersuchen. Es kommt D_3 in $B_5^{\circ, \circ}$ und D_6 in $B_2^{\circ, \circ}$ vor.

Damit ein torisches System \mathcal{A} exzeptionell ist, müssen die Kohomologien von $H^\bullet(-\sum A_i)$ verschwinden. Ich brauche im folgenden nicht alle Divisoren der Form $-\sum A_i$ zu untersuchen, ich kann mich auf die folgenden beschränken.

	\mathcal{A}_1	\mathcal{A}_2	\mathcal{A}_3	\mathcal{A}_4	\mathcal{A}_5
$E_1 = (-i-1)P + iR_1 + R_3$	$\sum_{i=3}^4 -A_i$	$\sum_{i=2}^4 -A_i$	$\sum_{i=2}^3 -A_i$		
$E_2 = (-i-1)P + iR_1$				$\sum_{i=2}^3 -A_i$	$\sum_{i=2}^3 -A_i$
$E_3 = (-i-2)P + (i+1)R_1 + R_2$	$\sum_{i=4}^5 -A_i$	$\sum_{i=3}^5 -A_i$	$\sum_{i=1}^4 -A_i$		
$E_4 = (-i-3)P + (i+2)R_1 + R_2$				$\sum_{i=1}^5 -A_i$	
$E_5 = iP - (i+1)R_1 + R_3$					$\sum_{i=5}^5 -A_i$
$E_6 = -R_2 + R_3$	$\sum_{i=3}^3 -A_i$	$\sum_{i=2}^2 -A_i$			

Ich betrachte zuerst die Bilder von E_i bezüglich der beiden Basen $B_5^{\circ, \circ}$ mit D_3 . Die Elemente E_i sind hier nur Koeffizienten, sobald ich eine der beiden Basen gewählt habe, schreibe ich für den entsprechenden Divisor E_i° oder E_i° . ($K = -3P + R_1 + R_2 + R_3$) Zunächst ist das Bild dieser Basen unter ϖ

$$B_5^{\circ} = (D_3 + 2D_4 + D_5, D_1, D_4, D_3 + D_4) \text{ bzw. } B_5^{\circ} = (D_3 + 2D_4 + D_5, D_4, D_1, D_3 + D_4).$$

Damit sind die Divisoren E_i von der Form:

D	$\varpi(D^{\circ})$	$\varpi(D^{\circ})$
K		$D_1 - 2D_3 - 4D_4 - 3D_5 \sim \sum -D_i$
E_1		$-iD_3 - (i+1)D_4 - (i+1)D_5$
E_2		$-(i+1)D_3 - (i+2)D_4 - (i+1)D_5$
E_3		$D_1 - (i+2)D_3 - (i+3)D_4 - (i+2)D_5$
$K - E_3$		$iD_3 + (i-1)D_4 + (i-1)D_5$
E_4		$D_1 - (i+3)D_3 - (i+4)D_4 - (i+3)D_5$
$K - E_4$		$(i+1)D_3 + iD_4 + iD_5$
E_5		$(i+1)D_3 + iD_4 + iD_5$
E_6	D_3	

Damit ist $\varpi(E_6^{\circ})$ stets effektiv, was zur Folge hat, daß sowohl \mathcal{A}_1 als auch \mathcal{A}_2 nicht exzeptionell sind. Es bleibt noch $\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$ und \mathcal{A}_5 zu klären, diese sind aber konstruierbar.

Bezüglich Basis $\varpi(B_5^{\circ})$ ist $\varpi(E_1^{\circ})$ für $i < 0$ effektiv und $\varpi(E_2^{\circ})$ für $i < -1$. Das Serre-Dual von $\varpi(E_3^{\circ})$ ist für $i > 0$ effektiv, sowie von $\varpi(E_4^{\circ})$ für $i > -1$. Schlußendlich ist $\varpi(E_5^{\circ})$ für $i > -1$ effektiv. Zusammengenommen sind $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ und

\mathcal{A}_3 für $i \neq 0$ nicht exzeptionell, sowie \mathcal{A}_4 und \mathcal{A}_5 für $i \neq -1$. In diesen Spezialfällen sind diese torischen Systeme konstruierbar.

Nun zu den Bildern der E_i bezüglich der Basis $B_2^{\circ, \circ}$ mit D_6 . Das Bild dieser Basen unter ϖ ist

$$B_2^{\circ} = (D_2 + D_3 + D_4 + D_5, D_5, D_2, D_2 + D_3)$$

$$\text{bzw. } B_2^{\circ} = (D_2 + D_3 + D_4 + D_5, D_2, D_5, D_2 + D_3).$$

Damit sind die E_i von der Gestalt:

D	$\varpi(D^{\circ})$	$\varpi(D^{\circ})$
K		$-D_2 - 2D_3 - 3D_4 - 2D_5$
E_1		$-iD_3 - (i+1)D_4 - (i+1)D_5$
E_2		$-D_2 - (i+1)D_3 - (i+1)D_4 - (i+1)D_5$
E_3		$-D_2 - (i+2)D_3 - (i+2)D_4 - (i+1)D_5$
$K - E_3$		$iD_3 + (i-1)D_4 + (i-1)D_5$
E_4		$-D_2 - (i+3)D_3 - (i+3)D_4 - (i+2)D_5$
$K - E_4$		$(i+1)D_3 + iD_4 + iD_5$
E_5		$(i+1)D_3 + iD_4 + iD_5$
E_6	D_3	

Es sind hier genau dieselben Werte für i , für welche diese Divisoren bzw. deren Serre-Dual effektiv sind, wie vorhin. In den restlichen Fällen sind die torischen Systeme konstruierbar.

(II) Die Degenerationen von X_0^B zu X_1^B . Es gibt T -Degenerationen von X_0^B zu $X_1^B = X_0^C$, wie ich sie in Abbildung 21(b) festgehalten habe. Für die Picardgruppen ergibt sich folgende Abbildung

$$\begin{array}{ll} D_1 \mapsto D_2 & D_4 \mapsto D_4 \\ D_2 \mapsto D_3 + D_4 & D_5 \mapsto D_2 + D_3 \\ D_3 \mapsto D_5 & D_6 \mapsto D_1 \end{array}$$

Auf X_0^B sind die Divisoren D_1, D_2, D_4 und D_5 exzeptionelle Divisoren. Zwar bleiben D_1 und D_4 unter dieser Abbildung exzeptionell (werden auf die exzeptionellen Divisoren D_2 und D_4 abgebildet), das trifft allerdings nicht auf D_2 und D_5 zu.

Das Abblasen bezüglich D_2 führt zu $\text{TV}(\neq)$. Damit gibt es zwei Basen auf X_0^B , deren letztes Element D_2 ist. Die Bilder dieser Basen unter $\varpi : \text{Pic}(X_0^B) \rightarrow \text{Pic}(X_1^B)$ sind

$$B_1 = (D_1 + D_2 + D_3, D_2 + D_3, D_3 + D_4 + D_5, D_3 + D_4) \text{ bzw.}$$

$$B_2 = (D_1 + D_2 + D_3, D_3 + D_4 + D_5, D_2 + D_3, D_3 + D_4).$$

In den torischen Systemen \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 kommt stets $P - R_1 - R_2 - R_3$ vor. Bezüglich dieser beiden Basen, zeigt sich, daß $E = -(P - R_1 - R_2 - R_3) = -D_1 + 2D_3 + 2D_4 + D_5$ effektiv ist ($D_1 \sim D_3 + 2D_4 + D_5$) und damit \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_5 nicht exzeptionell. Die torischen Systeme $\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$ und \mathcal{A}_5 sind allesamt konstruierbar.

Das Abblasen von D_5 führt zu $\text{TV}(-1, -1, -2, 0, 1)$. Dort gibt es nur eine gute Basis, die unter ϖ zu

$$B = (D_2 + 2D_3 + 2D_4 + D_5, D_3 + D_4 + D_5, D_3 + D_4, D_2 + D_3)$$

abgebildet wird. Auch hier ist $E = -(P - R_1 - R_2 - R_3) = D_3$ effektiv und damit \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_5 exzeptionell. Die torischen Systeme $\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$ und \mathcal{A}_5 sind konstruierbar.

(III) Die Degenerationen von X_0^B zu X_2^B . Die T -Degeneration von X_0^B zu X_2^B ist in Abbildung 21(c) festgehalten. Die entsprechende Abbildung von Divisoren ist somit:

$$\begin{array}{ll} D_1 \mapsto D_3 + 2D_4 + D_5 & D_4 \mapsto D_4 \\ D_2 \mapsto D_2 & D_5 \mapsto D_5 + D_6 \\ D_3 \mapsto D_3 & D_6 \mapsto D_6 \end{array}$$

Hier werden wieder die exzeptionellen Divisoren D_2 und D_4 auf exzeptionelle Divisoren abgebildet, die exzeptionellen Divisoren D_1 und D_5 hingegen nicht.

Das Abblasen bezüglich D_1 führt zu $\text{TV}(-1, -1, -2, 0, 1)$, damit gibt es eine gute Basis, die als letztes Element D_1 hat. Das Bild dieser Basis unter ϖ ist

$$B_1 = (D_2 + 2D_3 + 3D_4 + D_5, D_3 + D_4, D_4, D_3 + 2D_4 + D_5).$$

Auch das Abblasen bezüglich D_5 führt zur selben Fläche, das entsprechende Bild der Basis ist dann

$$B_2 = (D_2 + D_3 + D_4 + D_5 + D_6, D_2 + D_3, D_2, D_5 + D_6).$$

Ich betrachte nun spezielle Divisoren, die als $\sum -A_i$ auftreten können.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$E_1 = -(i+3)P + (i+2)R_1 + R_2$				$\sum_{i=1}^5 -A_i$	
$E_2 = -(i+1)P + iR_1 + R_2 + R_3$			$\sum_{i=3}^3 -A_i$		
$E_3 = iP - (i+1)R_1 + R_3$					$\sum_{i=5}^5 -A_i$
$E_4 = -R_2 + R_3$	$\sum_{i=3}^3 -A_i$	$\sum_{i=2}^2 -A_i$			
$E_5 = -(i+1)P + iR_1 + R_2$				$\sum_{i=3}^3 -A_i$	$\sum_{i=3}^3 -A_i$
$E_6 = -(i+2)P + (i+1)R_1 + R_2$			$\sum_{i=1}^4 -A_i$		

Bezüglich dieser Basen B_1 und B_2 ergibt sich dann unter Verwendung von $D_2 + D_3 + D_4 \sim D_6$:

	B_1	B_2
E_1	$-(i+3)D_2 - (i+4)D_3 -$ $-(2i+6)D_4 - (i+3)D_5$	$-D_3 - (i+3)D_4 -$ $-(i+3)D_5 - (i+3)D_6$
$K - E_1$	$iD_2 + iD_3 +$ $+(2i+1)D_4 + (i+1)D_5$	$-D_2 - D_3 + iD_4 +$ $+(i+1)D_5 + (i+1)D_6 \sim$ $\sim (i+1)D_4 + (i+1)D_5 + iD_6$
E_2	$-(i+1)D_2 - (i+1)D_3 -$ $-2iD_4 - iD_5$	$-D_3 - (i+1)D_4 - iD_5 - iD_6 \sim$ $\sim D_2 - iD_4 - iD_5 - (i+1)D_6$
E_3	$iD_2 + iD_3 +$ $+(2i+1)D_4 + (i+1)D_5$	$-D_2 - D_3 + iD_4 +$ $+(i+1)D_5 + (i+1)D_6 \sim$ $\sim (i+1)D_4 + (i+1)D_5 + iD_6$
E_4	$D_3 + D_4 + D_5$	$-D_2 + D_5 + D_6 \sim$ $\sim D_3 + D_4 + D_5$
E_5	$-(i+1)D_2 - (i+2)D_3 -$ $-(2i+2)D_4 - (i+1)D_5$	$-D_3 - (i+1)D_4 -$ $-(i+1)D_5 - (i+1)D_6 \sim$ $\sim D_2 - iD_4 - (i+1)D_5 - (i+2)D_6$
E_6	$-(i+2)D_2 - (i+3)D_3 -$ $-(2i+4)D_4 - (i+2)D_5$	$-D_3 - (i+2)D_4 -$ $-(i+2)D_5 - (i+2)D_6$
$K - E_6$	$(i-1)D_2 + (i-1)D_3 +$ $+(2i-1)D_4 + iD_5$	$-D_2 - D_3 + (i-1)D_4 + iD_5 + iD_6 \sim$ $\sim iD_4 + iD_5 + (i-1)D_6$

Nun ist E_4 stets effektiv und damit \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 nicht exzeptionell. Für $i \geq 0$ ist $K - E_1$ bzw. E_3 effektiv, sowie für $i \leq 2$ der Divisor E_5 . Also sind \mathcal{A}_4 bzw. \mathcal{A}_5 für $i \neq -1$ nicht exzeptionell. Für $i > 0$ ist $K - E_6$ bzw. für $i < 0$ der Divisor E_2 effektiv, damit ist für $i \notin \emptyset$ das torische System \mathcal{A}_3 nicht exzeptionell.

Das torische System \mathcal{A}_3 ist für $i = 0$ bzw. die Systeme \mathcal{A}_4 und \mathcal{A}_5 sind für $i = -1$ konstruierbar.

(IV) Die Degeneration von X_0^C zu X_1^C . Die T -Degeneration von X_0^C zu X_1^C ist in Abbildung 21(d) festgehalten. Für die Picardgruppen ergibt sich die Abbildung:

$$\begin{array}{ll}
 D_1 \mapsto D_1 & D_4 \mapsto D_4 \\
 D_2 \mapsto D_2 + D_3 + D_4 & D_5 \mapsto D_3 \\
 D_3 \mapsto D_5 & D_6 \mapsto D_1 + D_2
 \end{array}$$

Von den beiden exzeptionellen Divisoren D_2 und D_4 bleibt hier nur D_4 exzeptionell.

Durch das Abblasen von D_2 wird aus X_0^C die Fläche $\text{TV}(1, -1, -1, -2, 0)$. Die entsprechende gute Basis wird unter ϖ zu

$$B = (D_1 + D_2 + D_3 + D_4, D_3 + D_4, D_4, D_2 + D_3 + D_4).$$

Hier sind die selben Divisoren E_1, \dots, E_6 wie im vorigen Abschnitt wichtig, bezüglich der Basis B sind diese von der Gestalt (unter Benutzung von $D_1 \sim D_3 + D_5 +$

$2D_6$):

	B
E_1	$-(i+3)D_1 - (i+3)D_2 - D_3$
$K - E_1$	$iD_1 + (i+1)D_2$
E_2	$-(i+1)D_1 - iD_2 + D_4$
E_3	$iD_1 + (i+1)D_2$
E_4	$D_2 + D_3$
E_5	$-(i+1)D_1 - (i+1)D_2 - D_3 \sim$ $\sim -(i+2)D_1 - (i+1)D_2 + D_5 + 2D_6$
E_6	$-(i+2)D_1 - (i+2)D_2 - D_3$
$K - E_6$	$(i-1)D_1 + iD_2$

Diese Divisoren bzw. deren Serre-Dual ist für die selben Werte von i effektiv, sodaß \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 stets nicht exzeptionell sind, sowie \mathcal{A}_3 für $i \neq 0$ und $\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5$ für $i \neq -1$ nicht exzeptionell sind.

Für $i = 0$ bzw. $i = -1$ sind \mathcal{A}_3 bzw. \mathcal{A}_4 und \mathcal{A}_5 konstruierbar.

11. Gegenbeispiel für $\rho = 5$

Für Picardrang $\rho = 5$ steht uns nicht mehr dieselbe Technik wie vorhin zur Verfügung, da die entsprechende del Pezzo Fläche dP_5 nicht torisch ist (auch keine rationale \mathbb{C}^* -Fläche).

Allerdings ist die Situation sogar ganz anders.

SATZ 4.20. *Sei X jene torische Fläche, die durch einmaliges Aufblasen aus dP_6 entsteht, das heißt,*

$$X = \text{TV}(\ast) = \text{TV}(-2, -1, -2, -1, -1, -1, -1).$$

Dann existiert eine exzeptionelle Folge auf X , die nicht konstruierbar ist.

BEWEIS. Die Idee des Beweises ist es, die Bilder eines konstruierbaren, torischen Systems auf X , beispielsweise dem torischen Standardsystem \mathcal{A}_X , unter den K -Isometrien aus Beispiel 3.24 zu betrachten. Es wird sich dabei herausstellen, daß es unter diesen Bildern ein torisches System gibt, das zwar exzeptionell ist, aber unter seinen Elementen keinen exzeptionellen Divisor aufweist, also nicht konstruierbar ist.

Zunächst lege ich eine Numerierung der Strahlen fest:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
D_i^2	-2	-1	-2	-1	-1	-1	-1
v_i	(0, -1)	(1, -1)	(1, 0)	(1, 1)	(0, 1)	(-1, 0)	(-1, -1)

Als Basis von $\text{Pic}(\text{TV}(\ast))$ wähle ich zunächst die exzeptionellen Divisoren D_2, D_4, D_5, D_6 und D_7 . Es ist

$$D_1 \sim D_4 + D_5 - D_2 - D_7 \text{ und } D_3 \sim D_6 + D_7 - D_2 - D_4.$$

Die Suche nach einem solchen torischen Systems unter Verwendung eines Rechners [MGH⁺05] förderte folgendes System zu Tage:

$$\mathcal{A} = (D_2 - D_6, -D_2 + D_5 + D_6, D_2 - D_5, -D_2 + D_4 + 4D_5 + 3D_6, \\ -D_4 + D_6 + D_7, D_4 + D_5 - D_7, -D_2 - 3D_5 - 2D_6 + D_7)$$

Der Wechsel zur Basis aus exzeptionellen Divisoren ergibt

$$\mathcal{A} = (D_2 - D_6, -D_2 + D_5 + D_6, D_2 - D_5, -D_2 + D_4 + 4D_5 + 3D_6, \\ -D_4 + D_6 + D_7, D_4 + D_5 - D_7, -D_2 - 3D_5 - 2D_6 + D_7)$$

Da sich nirgends ein exzeptioneller Divisor findet, kann \mathcal{A} nicht durch Augmentation zustande gekommen sein.

Es bleibt nun zu testen, ob dieses System dennoch exzeptionell ist. Es bedarf also einer genaueren Untersuchung von $H^\bullet(\sum_{k=i}^j -\mathcal{A}_k)$ für $1 \leq i \leq j < 7$, das sind insgesamt 21 verschiedene Divisoren.

Für die Kohomologieberechnung greife ich auf die elektronische Hilfe eines Rechners zurück. Für die Berechnung verwende ich die in [HP06, 2.2] vorgestellte Methode, die ich für Maple umgesetzt habe, siehe Appendix A.2. Damit ist dieses torische System exzeptionell. \square

Kawamata, Borisov, Chen und Smith

Eingangs möchte ich [BH09, Remark 5.3] in leicht abgewandelter Form zitieren:

[The results in this chapter have] been already settled in [Kaw06],
but we have treated it here nonetheless, to give a unified picture
of our approach.

Im Artikel [BCS05] wurde die Beschreibung torischer Varietäten über die Cox-Konstruktion, wie sie in [CLS11, Kapitel 5] dargestellt ist, erweitert, um damit auch torische Stacks zu beschreiben. Diese Verallgemeinerung ist insofern sehr natürlich, weil in ihrem Zuge nur zwei Bedingungen an den Fächer abgeschwächt werden. Zum einen muß N kein Gitter mehr sein, sondern darf eine beliebig, endlich erzeugte, abelsche Gruppe sein. Zum anderen wurde in den früheren Kapiteln oft auf die primitiven Erzeuger der Strahlen zurückgegriffen. Nach [BCS05] werden diese Erzeuger auch als Datum begriffen und die Verallgemeinerung entsteht dadurch, daß auf die Primitivität verzichtet wird.

Dieses Kapitel stellt den Versuch eines Nachweises dar, nämlich daß diese natürliche Verallgemeinerung das Verständnis torischer Stacks erleichtert. Ich möchte dies anhand eines Ausschnitts des Artikels [Kaw06] zeigen, wo mithilfe des torischen MMPs eine volle, exzeptionelle Folge auf einer beliebigen, projektiven, torischen Orbifaltigkeit konstruiert wird. Diese Konstruktion geschieht induktiv. Zunächst wird eine volle, exzeptionelle Folge auf einer solchen Orbifaltigkeit vom Picardrang 1 hergeleitet. Anschließend kann diese Folge über die Untersuchung von Mori-Faserung, divisoriieller Kontraktion und Flip auf jede dieser torischen Orbifaltigkeiten ausgeweitet werden.

Ich werde hier den Induktionsbeginn der Orbifaltigkeit vom Picardrang 1 und die Mori-Faserung vorstellen.

Wie schon das eingangs erwähnte Zitat andeutet, stellt keines der Ergebnisse in diesem Kapitel eine Neuigkeit dar. Meine Absicht ist es, zum einen ein wenig Werbung für die Beschreibung torischer Stacks über die Cox-Konstruktion zu machen. Diese Absicht ist mit der Hoffnung verbunden, daß dadurch der Artikel [Kaw06] ein wenig zugänglicher wird.

Quellenangabe: Grundlagen sind der Artikel von Y. Kawamata: *Derived Categories of Toric Varieties* [Kaw06], sowie alle Referenzen in diesem Artikel auf weitere von Kawamata. Das Fundament für torische Stacks, wie ich sie hier verwende, ist der Artikel von L. Borisov, L. Chen und G. Smith: *The orbifold Chow ring of toric Deligne-Mumford stacks* [BCS05]. Für das allgemeine Verständnis empfehle ich das Buchprojekt von K. Behrend, B. Conrad, D. Edidin, W. Fulton, B. Fantechi, L. Göttsche und A. Kresch: *Algebraic Stacks*. Für den Spezialfall des stacky, quasi-gewichteten, projektiven Raums fand ich den Artikel von A. Canonaco: *A Beilinson-type theorem for coherent sheaves on weighted projective spaces* [Can00]

und besonders zur Kohomologieberechnung den Artikel von D. Baer: *Tilting sheaves in representation theory of algebras* [Bae88] und L. Borisov und Z. Hua: *On the conjecture of King for smooth toric Deligne-Mumford stacks* [BH09] hilfreich.

11.1. Überblick: torische Stacks. Wie schon angedeutet wird die Verallgemeinerung zu torischen Stacks durch den Übergang zu einer allgemeinen, abelschen, endlich erzeugten Gruppe (statt dem Gitter) und der Wahl von Strahlerzeugern erreicht. Diese Daten lassen sich folgendermaßen zusammenfassen.

DEFINITION 5.1. Ein *stacky Fächer* ist ein Tripel $\Sigma = (\Sigma, N, \beta)$ mit

- (1) endlich erzeugter, abelscher Gruppe N ,
- (2) vollständig und simplizialen Fächer Σ in $N_{\mathbb{Q}} = N \otimes \mathbb{Q}$,
- (3) und $\beta : \mathbb{Z}^{\Sigma(1)} \rightarrow N$, wobei das Bild $\beta(e_{\rho})$ unter der kanonischen Abbildung $N \rightarrow N_{\mathbb{Q}}$ in ρ für jeden Strahl $\rho \in \Sigma(1)$ liegt.

BEMERKUNG 5.2 (+ Konvention). Im folgenden werde ich mich auf den Fall, daß $N \cong \mathbb{Z}^n$ ein Gitter ist, beschränken, da ich die volle Allgemeinheit dieser Konstruktion nicht benötige. Denn im Falle einer allgemeineren Gruppe N lassen sich Stacks beschreiben, deren allgemeiner Punkt eine nicht-triviale Standgruppe aufweist. Das führt beispielsweise zu einer recht kompakten Beschreibung des Modulstacks elliptischer Kurven, siehe [BCS05, Beispiel 3.5].

Die Abbildung β soll als Wahl eines Erzeugers in N für die Strahlen des Fächers Σ betrachtet werden. Der Fall torischer Varietäten kann dann als Spezialfall dieser Stacks betrachtet werden, wenn die primitiven Erzeuger der Strahlen gewählt werden.

Bevor ich auf die Konstruktion nach [BCS05] eingehe, möchte ich die klassische Cox-Konstruktion kurz wiederholen. Für Details verweise ich auf [CLS11, Kapitel 5].

Torische Varietäten als Quotient. Eine torische Varietät $X = X(\Sigma)$ zu einem vollständigen, simplizialen Fächer kann als ein guter Quotient

$$X(\Sigma) = \mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z // G$$

geschrieben werden. Dabei soll $\mathbb{C}^{\Sigma(1)}$ heißen, daß es zu jedem Strahl $\rho \in \Sigma(1)$ eine Kopie von $\mathbb{C} = \text{Spec } k[x_{\rho}]$ gibt. Mit diesen Koordinaten kann Z als das so-genannte irrelevante Ideal $V(I)$ geschrieben werden, wobei I ein monomiales Ideal ist, das von den Monomen

$$x(\sigma) := \prod_{\rho \neq \sigma} x_{\rho} \text{ für } \sigma \in \Sigma$$

erzeugt wird. Da wir den Fächer als vollständig annehmen, reichen bereits jene Monome $x(\sigma)$, für die der Kegel $\sigma \in \Sigma(n)$ volldimensional ist. Da I ein Monomialideal ist, kann Z als Vereinigung von Koordinaten-Unterräumen geschrieben werden.

Die Gruppe G und ihre Wirkung auf $\mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z$ erhalten wir folgendermaßen. Zunächst betrachten wir eine der wichtigen, exakten Sequenzen der torischen Geometrie:

$$(4) \quad 0 \rightarrow M \rightarrow \bigoplus_{\rho \in \Sigma(1)} \mathbb{Z} \cdot D_{\rho} \rightarrow \text{Cl}(X) \rightarrow 0.$$

Auf diese Sequenz wende ich den Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{C}^*)$ an. Da es sich bei \mathbb{C}^* um eine teilbare Gruppe handelt, bleibt dabei die Sequenz exakt:

$$1 \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Cl}(X), \mathbb{C}^*) \xrightarrow{(*)} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^{\Sigma(1)}, \mathbb{C}^*) \rightarrow \mathrm{Hom}(M, \mathbb{C}^*) \rightarrow 1$$

$$\qquad\qquad\qquad = (\mathbb{C}^*)^{\Sigma(1)} \qquad\qquad\qquad = \mathbb{T}$$

Wir setzen $G := \mathrm{Hom}(\mathrm{Cl}(X), \mathbb{C}^*)$. Da bereits $(\mathbb{C}^*)^{\Sigma(1)}$ auf $\mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z$ wirkt, erhalten wir über die Einbettung $(*)$ eine Wirkung von G auf $\mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z$. Nach [CLS11, Theorem 5.1.11] ist der Quotient dieser Wirkung gut:

$$X(\Sigma) = \mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z // G.$$

Die Verallgemeinerung zu torischen Stacks. Sei nun ein stacky Fächer Σ gegeben. Wir werden in analoger Weise den Stack

$$\mathcal{X}(\Sigma) = \left[\mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z / G \right]$$

erhalten. Dabei sind $\mathbb{C}^{\Sigma(1)}$ und Z in der selben Weise wie vorhin definiert, nur G erfordert ein wenig Vorsicht.

Für die Definition von G fließt die Abbildung $\beta : \mathbb{Z}^{\Sigma(1)} \rightarrow N$ ein.

Da in [BCS05] N nicht notwendigerweise ein Gitter sein muß, würde das Dualisieren von β , um eine Sequenz wie in (4) zu erhalten, sämtliche Torsionsinformationen von N vernichten. Zwar ist hier N torsionsfrei, nichtsdestotrotz möchte ich den Weg, wie er in [BCS05] beschrieben ist, einschlagen.

Für den allgemeinen Fall ist es von Vorteil, statt einer kurzen, exakten Sequenz das entsprechende, exakte Dreieck in der derivierten Kategorie - hier: von \mathbb{Z} -Moduln - zu betrachten. Die Rolle des Kokerns wird vom Abbildungskegel übernommen:

$$\mathbb{Z}^{\Sigma(1)} \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathrm{Cone}(\beta) \rightarrow \mathbb{Z}^{\Sigma(1)}[1].$$

Da in unserem Fall N bereits ein freier \mathbb{Z} -Modul ist, besteht nicht viel Bedarf nach Auflösung. Ich schreibe das exakte Dreieck expliziter:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^{\Sigma(1)} & & \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z}^{\Sigma(1)} \\ & \downarrow \beta & \\ \mathbb{Z}^{\Sigma(1)} & \xrightarrow{\beta} N & \xrightarrow{\mathrm{id}} N \end{array}$$

$$\mathbb{Z}^{\Sigma(1)} \rightarrow N \rightarrow \mathrm{Cone}(\beta) \rightarrow \mathbb{Z}^{\Sigma(1)}[1].$$

Selbst wenn im obigen, exakten Dreieck ein allgemeines N stünde, welches durch eine freie Auflösung ersetzt worden wäre, ist es hier möglich zu dualisieren, ohne einen Informationsverlust zu erleiden:

$$\begin{array}{ccc} & & (\mathbb{Z}^{\Sigma(1)})^* \xleftarrow{\mathrm{id}^*} (\mathbb{Z}^{\Sigma(1)})^* \\ & & \uparrow \beta^* \\ (\mathbb{Z}^{\Sigma(1)})^* & \xleftarrow{\beta^*} M & \xleftarrow{\mathrm{id}^*} M \end{array}$$

$$(\mathbb{Z}^{\Sigma(1)})^* \leftarrow M \leftarrow \mathrm{Cone}(\beta)^* \leftarrow (\mathbb{Z}^{\Sigma(1)})^* .$$

Ich bin hier an der entsprechenden, langen, exakten Kohomologiesequenz interessiert, vorallem an ihrem Ende:

$$H^0 \mathrm{Cone}(\beta)^* \rightarrow M \xrightarrow{\beta^*} (\mathbb{Z}^{\Sigma(1)})^* \xrightarrow{\beta^\vee} H^1 \mathrm{Cone}(\beta)^* \rightarrow \mathrm{Ext}^1(N, \mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

Da N frei ist, verschwindet $\text{Ext}^1(N, \mathbb{Z})$. Wir setzen $\text{DG}(\beta) := H^1 \text{Cone}(\beta)^* = \text{coker}(\beta^*)$. Ich möchte anmerken, daß $\beta^\vee : (\mathbb{Z}^{\Sigma(1)})^* \rightarrow \text{DG}(\beta)$ surjektiv ist.

Da der Fächer Σ vollständig ist, hat $\beta : \mathbb{Z}^{\Sigma(1)} \rightarrow N$ nur einen endlichen Kokern. Damit ist aber $H^0 \text{Cone}(\beta)^* = \ker(\beta^*) = \text{coker}(\beta)^* = 0$ und wir erhalten die exakte Sequenz

$$(5) \quad 0 \rightarrow M \xrightarrow{\beta^*} (\mathbb{Z}^{\Sigma(1)})^* \xrightarrow{\beta^\vee} \text{DG}(\beta) = \text{coker}(\beta^*) \rightarrow 0.$$

In analoger Weise wenden wir den exakten Funktor $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{C}^*)$ an. Somit ist

$$G = \text{Hom}(\text{DG}(\beta), \mathbb{C}^*) = \text{Hom}(\text{coker}(\beta^*), \mathbb{C}^*).$$

Über $\text{Hom}(\beta^\vee, \mathbb{C}^*) : G \hookrightarrow \text{Hom}((\mathbb{Z}^{\Sigma(1)})^*, \mathbb{C}^*) = \mathbb{T}$ wird G in den Torus eingebettet. Die Wirkung von \mathbb{T} auf $\mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z$ können wir damit auf G einschränken. Das erlaubt uns die Definition des Stacks $\mathcal{X}(\Sigma)$.

BEMERKUNG 5.3. Seien v_ρ die primitiven Erzeuger der Strahlen $\rho \in \Sigma(1)$, dann ist $\beta(e_\rho) = n_\rho v_\rho$ für $n_\rho \in \mathbb{N}$. Wenn wir nun die Abbildung β^* aus (5) explizit anschreiben, dann zeigt sich die Verallgemeinerung im Vergleich zur ersten Abbildung aus (4):

$$\begin{aligned} M &\xrightarrow{\beta^*} \text{Hom}(\mathbb{Z}^{\Sigma(1)}, \mathbb{Z}) & M &\rightarrow \bigoplus_{\rho \in \Sigma(1)} \mathbb{Z} \cdot D_\rho \\ w &\mapsto [e_\rho \mapsto \langle w, \beta(e_\rho) \rangle = \langle w, n_\rho \cdot v_\rho \rangle] & w &\mapsto \sum_{\rho \in \Sigma(1)} \langle w, v_\rho \rangle D_\rho \end{aligned}$$

Geradenbündel auf torischen Stacks. Die Konstruktion eines torischen Stacks kann als Spezialfall eines Quotientenstacks $[U/G]$ gesehen werden. Dort sind (quasi-/kohärente) Garben auf dem Stack per Definition Garben auf U , die G -äquivariant sind, ich schreibe dafür $\text{Sh}_G(U)$, $\text{QCoh}_G(U)$ bzw. $\text{Coh}_G(U)$.

Im Falle torischer Stacks lassen sich (quasi-) kohärente Garben leicht hinschreiben. Denn hier ist $U = \mathbb{C}^n \setminus Z \subset \mathbb{C}^n$ und die G -Wirkung auf U läßt sich zu einer G -Wirkung auf \mathbb{C}^n fortsetzen. Auf \mathbb{C}^n können (quasi-) kohärente Garben als (endlich erzeugte) Moduln über $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ mit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ beschrieben werden. Die Äquivarianz bezüglich der Gruppe $G = \text{Hom}(\text{DG}(\beta), \mathbb{C}^*)$ übersetzt sich dabei zu einer Graduierung von $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ bezüglich der endlich erzeugten, abelschen Gruppe $\text{DG}(\beta)$. Der Grad eines Elements $\mathbf{x}^m \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ ist gerade $\beta^\vee(m) \in \text{DG}(\beta)$, siehe die exakte Sequenz (5).

BEMERKUNG 5.4. Die Divisorenklassengruppe $\text{Cl}(\mathcal{X})$ eines torischen Stacks $\mathcal{X} = [U/G]$ ist wie im Falle der Cox-Konstruktion isomorph zu $\text{DG}(\beta)$, siehe [IU09, Abschnitt 2].

In völliger Analogie zu [CLS11, Abschnitt 5.3] entspricht die Strukturgarbe von \mathcal{X} gerade dem $\text{Cl}(\mathcal{X})$ -graduierten Modul $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$. Ein Geradenbündel $\mathcal{O}(\alpha)$ für ein $\alpha \in \text{Cl}(\mathcal{X})$ entspricht dann dem geschifteten, graduierten Modul $\mathbb{C}[\mathbf{x}](\alpha)$.

11.2. Überblick: Mori. Das Ziel des Minimal Model Program (kurz: MMP) nach Mori ist es, durch birationale Operationen eine gegebene Varietät so weit wie möglich zu vereinfachen. Anders formuliert wird innerhalb einer birationalen Äquivalenzklasse ein möglichst einfacher Vertreter gesucht. Dieser Vertreter wird dadurch ausgezeichnet, daß der kanonische Divisor nef ist. Allerdings kann ein solcher Vertreter nicht immer erreicht werden, man erwartet, daß in diesem Fall der

Vertreter eine Mori-Faserung $X \rightarrow Y$ mit $\dim Y < \dim X$ sein wird. Eine weitere Erwartung ist, daß diese beiden Fälle durch nur zwei Operationen erreicht werden können: durch divisorielle Kontraktionen und Flips.

Während das MMP für beliebige Varietäten noch nicht ganz umgesetzt wurde, konnte das MMP für torische Varietäten vollständig geklärt werden. Für Details verweise ich auf [Mat02, Kapitel 14] und [CLS11, Kapitel 15]. Ich folge in meiner Darstellung [CLS11, Kapitel 15].

Innerhalb der torischen Geometrie läßt sich das MMP ungemein vereinfachen. Zunächst gibt es neben dem Punkt kein minimales Modell. Die Mori-Faserung $X \rightarrow Y$ weist als Faser einen quasi-gewichteten projektiven Raum auf. Das Y ist wiederum eine torische Varietät und läßt sich ebenfalls mit divisoriiellen Kontraktionen und Flips zu einer Mori-Faserung $Y \rightarrow Z$ vereinfachen. Schlußendlich erhalten wir eine Mori-Faserung der Form $\mathbb{P} \rightarrow \text{pt}$, wobei \mathbb{P} ein quasi-gewichteter projektiver Raum ist. Zusammengefaßt liegt also die Mori-Essenz für torische Varietäten im Verständnis von quasi-gewichteten projektiven Räumen und den drei „Operationen“: Mori-Faserung, divisorielle Kontraktion und Flip.

Ich zähle Mori-Faserung bewußt auch zu den schon oben genannten Operationen der divisoriiellen Kontraktion und des Flip, denn alle drei lassen sich als extreme Kontraktion beschreiben (auch im allgemeinen Fall).

Als Maß, wie kompliziert nun eine Varietät ist, dient der Mori-Kegel:

$$\overline{\text{NE}}(X) = \overline{\text{Nef}}(X)^\vee \subset N_1(X) = \{1\text{-Zykel auf } X \text{ modulo numerischer Äquivalenz}\},$$

wobei $\text{Nef}(X)$ die Kegel der numerisch effektiven Divisoren ist. Im Torischen ist der Mori-Kegel ein rationaler, polyedrischer Kegel der Gestalt

$$\overline{\text{NE}}(X) = \text{NE}(X) = \sum_{\tau \in \Sigma(n-1)} \mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot [V(\tau)].$$

Die Strahlen des Mori-Kegels heißen *extremal*. Die Anzahl der Strahlen ist jene Invariante, die im Verlauf des MMPs geringer wird.

Sei $\tau \in \Sigma(n-1)$, sodaß $R = [V(\tau)]$ ein extremaler Strahl von $\text{NE}(X)$ ist. Dann gibt es genau zwei volldimensionale Kegel σ_1 und σ_2 die τ als gemeinsame Seite haben. Zwischen den $n+1$ Erzeugern v_ρ der Strahlen $\rho \in \sigma_1(1) \cup \sigma_2(1)$ gibt es bis auf Multiplikation mit einem Skalar genau eine nicht-triviale Relation $\sum a_\rho v_\rho = 0$. Dabei beachte man, daß a_ρ für $\rho \in (\sigma_1(1) \cup \sigma_2(1)) \setminus \tau(1)$ nicht nur ungleich Null sind sondern auch dasselbe Vorzeichen aufweisen. In Übereinstimmung mit der Literatur fordern wir deshalb, daß diese Koeffizienten positiv sind.

Zu diesem extremalen R können wir eine torische Varietät definieren. Dazu sei $J_- = \{\rho \mid a_\rho < 0\}$ bzw. $J_+ = \{\rho \mid a_\rho > 0\}$. Wir definieren das Gitter

$$N_R = \mathbb{Q}\langle v_\rho \mid \rho \in J_- \cup J_+ \rangle \cap N / \mathbb{Q}\langle v_\rho \mid \rho \in J_- \rangle \cap N.$$

Nach [CLS11, Lemma 15.4.2] definiert der Fächer $\Sigma_R = \{\bar{\sigma}_J \mid J \subsetneq J_+\}$ in N_R einen quasi-gewichteten projektiven Raum X_R der Dimension $|J_+| + 1$.

Nach [CLS11, Proposition 15.4.5] gibt es eine Abbildung $\phi : X \rightarrow Y$, die anhand von J_- unterschieden werden kann:

Mori-Faserung: Hier sind alle $a_\rho \geq 0$, das heißt, $|J_-| = 0$. Dann ist $\dim Y < \dim X$ und ϕ eine Faserung mit Faser X_R .

Divisorielle Kontraktion: $|J_-| = 1$. Dann ist ϕ eine Abblasing, deren Einschränkung auf den exzeptionellen Divisor $V(\sigma_{J_-})$ eine Mori-Faserung mit Faser X_R ist.

Flip: $|J_-| > 1$. Dann hat der exzeptionellen Ort $V(\sigma_{J_-})$ Kodimension $|J_-|$, und die Einschränkung von ϕ darauf ist eine Mori-Faserung mit Faser X_R .

Aufgrund der Konstruktion wird ϕ extremale Kontraktion genannt.

11.3. Überblick: Kawamata. In [Kaw06] gewinnt Kawamata eine volle exzeptionelle Folge auf einer beliebigen torischen Varietät mithilfe des torischen MMPs.

Im wesentlichen müssen zwei Punkte geklärt werden. Es wird eine volle, exzeptionelle Folge für einen quasi-gewichteten Raum benötigt. Anschließend muß nur noch für die drei verschiedenen extremalen Kontraktionen der Form $X \rightarrow Y$ geklärt werden, wie sich eine exzeptionelle Folge auf Y zu einer auf X „erweitern“ läßt.

Sei $X \rightarrow Y$ eine Mori-Faserung. Falls diese lokal trivial ist, dann kann eine exzeptionelle Folge auf Y recht einfach zu einer auf X erweitert werden. Im allgemeinen Fall bedient sich Kawamata eines Tricks. Durch den Übergang von Y zu einem torischen Stack \mathcal{Y} kann die lokale Trivialität der Faserung erreicht werden.

Damit erscheint es sinnvoll, statt eine torische Varietät X gleich einen torischen Stack \mathcal{X} zu betrachten. Zu unserem Glück läßt sich die zusätzliche stacky Struktur auf \mathcal{X} mit einem \mathbb{Q} -Divisor D auf X fassen. Interessanterweise kommt dann das log MMP für das Paar (X, D) zum Zuge.

Aufgrund dieser Überlegung bedürfen wir einer vollen, exzeptionellen Folge auf einem beliebigen, quasi-gewichteten, projektiven Stack. So ein Stack läßt sich von einem projektiven Raum überlagern. Die schon bekannte, exzeptionelle Folge aus Geradenbündeln darauf kann dann auf diesen Stack vorschoben werden. Diese vorgeschobenen Objekte zerfallen dort wieder in Geradenbündel. Richtig angeordnet bilden diese eine volle, exzeptionelle Folge.

Auf die Mori-Faserung bin ich aus Stack-Gründen schon eingegangen, ich möchte noch auf die Besonderheiten der beiden anderen Operationen eingehen.

Zunächst sei $f : X \rightarrow Y$ eine divisorielle Kontraktion. Die Einschränkung von f auf den exzeptionellen Divisor $f|_E : E \rightarrow f(E)$ ist eine Mori-Faserung. Also können wir induktiv eine exzeptionelle Folge auf \mathcal{E} berechnen. Im Allgemeinen gibt es keine Abbildung zwischen den Stacks \mathcal{X} und \mathcal{Y} , sodaß wir einen Umweg über eine Überlagerung des Faserprodukts $\mathcal{X} \times_Y \mathcal{Y}$ gehen müssen, um die exzeptionelle Folge auf \mathcal{Y} in eine exzeptionelle Folge auf \mathcal{X} zu verwandeln. Schlußendlich wird diese exzeptionelle Folge mit der exzeptionellen Folge auf \mathcal{E} kombiniert, um eine volle exzeptionelle Folge auf \mathcal{X} zu erhalten. Dabei wird die exzeptionelle Folge auf \mathcal{E} nach \mathcal{X} vorgeschoben, sodaß diese stets Träger auf E haben wird, das heißt, deren Elemente sind von der Form $\mathcal{O}_E(\dots)$. Spätestens hier verlassen wir also die Welt der exzeptionellen Folgen aus Geradenbündeln.

Es kann durchaus vorkommen, daß weder eine divisorielle Kontraktion noch eine Mori-Faserung möglich ist. In diesem Falle bedienen wir uns einer endlichen Folge von Flips, bis wir in einem dieser beiden obigen Fälle landen (das garantiert uns die Mori-Theorie für torische Varietäten). Erstaunlicherweise ist der Flip vom Wesen her der divisoriellen Kontraktion recht ähnlich, es wird im wesentlichen die selbe Konstruktion durchgeführt. Der Unterschied ist, daß der „exzeptionelle“ Ort von höherer Kodimension ist.

12. Der Vorschub auf torischen Stacks

Bevor ich mich mit [Kaw06] auseinandersetze, benötige ich noch die Definition des Vorschubs auf Quotientenstacks (insbesondere für torische Stacks).

Ich werde mich nun ein wenig allgemeiner halten. Sei $[\phi] : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ eine Abbildung von Quotientenstacks der Form

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} = [U/G] & \xrightarrow{[\phi]} & \mathcal{Y} = [V/H] \\ U & \xrightarrow{\phi} & V \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ G & \xrightarrow{\pi} & H \end{array}$$

Damit $[\phi]$ eine Stackabbildung ist, muß ϕ mit π verträglich sein, das heißt, $\phi(g \circ u) = \pi(g) \circ \phi(u)$.

Quasikohärenten Garben auf \mathcal{X} bzw. \mathcal{Y} entsprechen nun G - bzw. H -äquivariante quasikohärente Garben auf U bzw. V . Die Gruppen G und H sollen hier reductive abelsche lineare algebraische Gruppen sein. Da die Charakteristik hier stets 0 ist, ist das Invarianten-nehmen bezüglich dieser Gruppen ein exakter Funktor.

Sei $[\mathcal{F}]$ eine kohärente Garbe auf \mathcal{X} und \mathcal{F} die entsprechende Garbe auf U . Das Ziel ist es, $R^i[\phi]_*[\mathcal{F}]$ zu definieren.

Für eine Allgemeine Definition des Vorschubs lautet das Stichwort *induzierte Darstellungen*.

DEFINITION 5.5. Seien $G \subseteq H$ Gruppen wobei die Menge der Linksnebenklassen H/G endlich ist. Wähle ein Repräsentatensystem $h_1, \dots, h_l \in H$ des Quotienten. Angenommen G wirkt auf dem Vektorraum L .

Dann ist die *induzierte Darstellung* von H

$$\mathrm{Ind}_G^H(L) := L \otimes_{\mathbb{C}[G]} \mathbb{C}[H],$$

wobei $\mathbb{C}[G]$ bzw. $\mathbb{C}[H]$ der jeweilige Gruppenring ist. Die Darstellung L läßt sich über $v \mapsto v \otimes e_H$ einbetten.

Eine explizitere Darstellung ist

$$\mathrm{Ind}_G^H(L) = \bigoplus_{1 \leq i \leq l} L \cdot h_i,$$

wobei h_1, \dots, h_l ein Repräsentantensystem von H/G ist. Die Wirkung von H ist hier folgendermaßen definiert. Sei $h \in H$. Dann liegt hh_i in genau einer Restklasse h_jG , das heißt, wir können in eindeutiger Weise $hh_i = h_jg$ schreiben. Dann wirkt h durch

$$h \circ (v \cdot h_i) := (g \circ v) \cdot h_j.$$

Wir wenden nun diese Definition auf $\mathcal{F}(W)$ an, für eine offene, affine, äquivariante Teilmenge W von U . In den Anwendungen ist $\mathcal{F}(W)$ stets ein \mathbb{C} -Vektorraum, aber die Definition hängt nicht davon ab, daß L tatsächlich ein Vektorraum ist.

Allerdings ist in unserem Fall π im Allgemeinen keine Injektion. Aber wir können π aufspalten:

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{\phi} & V & \xrightarrow{\text{id}} & V \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ G & \xrightarrow{p} & G/\ker \pi & \cong \text{im } \pi \hookrightarrow & H \end{array}$$

Zunächst können wir \mathcal{F} mittels ϕ_* nach V verschieben. Dabei wirkt G weiterhin auf $\phi_*\mathcal{F}$. Indem wir Invarianten bezüglich $\ker \pi$ nehmen, wird $(\phi_*\mathcal{F})^{\ker \pi}$ zu einer Garbe mit $G/\ker \pi$ -Wirkung. Nun ist $G/\ker \pi \cong \text{im } \pi \subseteq H$. Mittels der induzierten Darstellung erhalten wir eine H -äquivalente Garbe auf V :

DEFINITION 5.6. Mit den vorangegangenen Notationen definieren wir die höheren direkten Bilder von $[\phi]$ als

$$R^i[\phi]_*([\mathcal{F}]) := [R^i\phi_* (\mathcal{F}^{\ker \pi}) \otimes_{\mathbb{C}[\text{im } \pi]} \mathbb{C}[H]] = \left[\text{Ind}_{\text{im } \pi}^H R^i\phi_* (\mathcal{F}^{\ker \pi}) \right]$$

BEMERKUNG 5.7. Noch ein Wort zur induzierten Darstellung. Diese ist so behutsam, daß Invarianten davon unberührt bleiben, das heißt,

$$(\text{Ind}_G^H \mathcal{F})^H = \mathcal{F}^G,$$

wobei \mathcal{F}^G über die Einbettung $\mathcal{F} \hookrightarrow \text{Ind}_G^H \mathcal{F}$ verglichen werden kann.

BEMERKUNG 5.8. Sie \mathcal{F} eine G -äquivalente Garbe für eine reductive Gruppe G . Dann gilt $R^i\phi_*(\mathcal{F}^G) = (R^i\phi_*\mathcal{F})^G$.

BEWEIS. Für eine reductive Gruppe G ist $(-)^G$ ein exakter Funktor (sofern der Grundkörper, wie in unserem Fall \mathbb{C} , algebraisch abgeschlossen und von Charakteristik 0 ist). Nach [Huy06, Proposition 2.58] reicht es somit, $f_*(\mathcal{F}^G) = (f_*\mathcal{F})^G$ nachzuprüfen.

Sei $f : U \rightarrow V$. Wir können V durch offene, affine und H -invariante Mengen $\{V_i\}$ überdecken. Da f von einer torischen Abbildung kommt, können wir auch $f^{-1}(V_i)$ durch offene, affine und G -invariante Mengen $\{U_{ij}\}$ überdecken.

Damit ist \mathcal{F}^G auf den offenen Mengen U_{ij} durch $\mathcal{F}^G(U_{ij}) = (\mathcal{F}(U_{ij}))^G$ festgelegt, insbesondere ist $\mathcal{F}^G \subset \mathcal{F}$ (gilt für alle offenen Mengen von U). Der Vorschub von \mathcal{F}^G ist klar.

Umgekehrt, für V_i ist $(f_*\mathcal{F})^G(V_i) = \{m \in \mathcal{F}(f^{-1}(V_i)) \mid m \text{ } G\text{-invariant}\}$. Nun entsteht ein solches m durch Verkleben von G -invarianten $m_j \in \mathcal{F}(U_{ij})$, das heißt, $m_{ij} \in \mathcal{F}(U_{ij})^G$. Insbesondere ist damit aber die Bemerkung gezeigt. \square

BEMERKUNG 5.9. Die hier auftretenden Gruppen sind stets reaktiv, selbst die Kerne und Kokerne diverser Gruppenabbildung. Denn alle Gruppen hier werden als $\text{Hom}(\mathbb{Z}^e \oplus \mu, \mathbb{C}^*)$ realisiert, wobei μ eine endliche, abelsche Gruppe ist.

12.1. Vorschub auf Stacks und Kohomologie. Ein Spezialfall des Vorschubs ist die Kohomologie. Der Schnittfunktor Γ entspricht $[\phi]_*$ für

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\phi} & \text{pt} \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ G & \xrightarrow{\pi} & 1 \end{array}$$

Die Kohomologie ist aber schon bekannt (siehe beispielsweise [BH09, Proposition 4.1]):

$$H^i(\mathcal{X}, [\mathcal{F}]) = (H^i(U, \mathcal{F}))^G.$$

Da π surjektiv mit $\ker \pi = G$ ist, umfaßt die Definition des Vorschubs auf Stacks auch Garbenkohomologie auf Stacks.

12.2. Vorschub auf torischen Stacks und Varietäten. Hier möchte ich die Definition des Vorschubs auf torischen Stacks, falls die involvierten Stacks bereits glatte, torische Varietäten sind, mit dem gewöhnlichen Vorschub vergleichen.

SATZ 5.10. *Angenommen die Quotienten $U//G$ und $V//H$ sind geometrische Quotienten, wobei G bzw. H zusätzlich frei auf U bzw. V wirken. Dann ist folgendes Diagramm kommutativ*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{QCoh}\left(\left[U/G\right]\right) & \xrightarrow{\pi_{U*} \circ (-)^G} & \mathrm{QCoh}\left(U//G\right) \\ \downarrow [\phi]_* & & \downarrow \bar{\phi}_* \\ \mathrm{QCoh}\left(\left[V/H\right]\right) & \xrightarrow{\pi_{V*} \circ (-)^H} & \mathrm{QCoh}\left(V//H\right) \end{array}$$

BEWEIS. Nach [BL94, 0.3] gibt es zwischen der Kategorie der Garben auf $U//G$ und der Kategorie der G -äquivalenten Garben eine Äquivalenz:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{QCoh}\left(\left[U/G\right]\right) & \xlongequal{\quad} & \mathrm{QCoh}_G(U) \xleftarrow{\cong} \mathrm{QCoh}\left(U//G\right) \\ [\mathcal{F}] & \xlongequal{\quad} & \mathcal{F} \xrightarrow{\quad} \pi_{U*} \mathcal{F}^G = [\pi_U]_* [\mathcal{F}] \\ & & \pi_V^* \mathcal{F} \xleftarrow{\quad} \mathcal{F} \end{array}$$

Angesichts des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} \left[U/G\right] & \longleftarrow & U & \xrightarrow{\pi_U} & U//G \\ \downarrow [\phi] & & \downarrow \phi & & \downarrow \bar{\phi} \\ \left[V/H\right] & \longleftarrow & V & \xrightarrow{\pi_V} & V//H \end{array}$$

lautet nun die Frage, ob $\pi_{V*}([\phi]_*[\mathcal{F}])^H = \bar{\phi}_*(\pi_{U*}\mathcal{F}^G)$ ist. Gemäß der Definition ist

$$\pi_{V*}([\phi]_*[\mathcal{F}])^H = \pi_{V*}\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{im}\pi}^H \phi_* \mathcal{F}^{\ker \pi}\right)^H.$$

Da sich durch Induktion die Invarianten nicht ändern, ist

$$\pi_{V*}\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{im}\pi}^H \phi_* \mathcal{F}^{\ker \pi}\right)^H = \pi_{V*} \phi_* \left(\mathcal{F}^{\ker \pi}\right)^{\mathrm{im}\pi} = \pi_{V*} \phi_* \mathcal{F}^G.$$

Für die letzte Gleichheit verwende ich die allgemeinere Tatsache, daß für $0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 0$ und einer Darstellung L von G gilt:

$$L^G = \left(L^{G'}\right)^{G''}.$$

Da $\pi_V \phi = \bar{\phi} \pi_U$ ist, folgt die Behauptung. \square

BEMERKUNG 5.11. Nach [CLS11, Ex. 5.1.10] sind die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt, sobald U bzw. V von glatten, kompletten Fächern herrühren.

Noch eine kurze Bemerkung, wieso die Glattheit der torischen Varietäten erforderlich ist. Denn im Falle, daß einer der Fächer zwar simplizial aber nicht glatt ist, ist die Gruppenwirkung nur fast frei, das heißt, es treten Punkte mit endlichen Stabilisatoren auf. Zwar existieren weiterhin die geometrischen Quotienten, aber die Kategorie der Garben von Stack und Varietät sind verschieden. Das ist insofern nicht überraschend, daß die Varietät in diesem Fall Quotientensingularitäten in den Punkten mit endlichem Stabilisator aufweist, wohingegen der Stack unbeeindruckt davon glatt bleibt. Das ist auch der Ausgangspunkt des Buches [BL94], siehe [BL94, 0.4].

Wegen [Huy06, Proposition 2.58] gilt dieselbe Aussage auch für die höheren, direkten Bilder.

13. Quasi-gewichtete, projektive Räume

Ich werde zunächst auf eine Verallgemeinerung gewichteter, projektiver Räume, wie sie in [Dol82] definiert sind, eingehen.

Seien $v_0, \dots, v_n \in N$ mit folgenden Eigenschaften:

- Je n Vektoren $(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$ bilden eine \mathbb{Q} -Basis von $N_{\mathbb{Q}}$,
- es ist jeweils v_i nicht im Kegel $\langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle$ enthalten und
- der Kegel $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$ ist bereits ganz $N_{\mathbb{Q}}$.

Die Kegel $\langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle$ setzen sich dann zu einem vollständigen Fächer in $N_{\mathbb{Q}}$ zusammen. Die entsprechende torische Varietät definiere ich hier als *quasi-gewichteten, projektiven Raum* $\mathbb{P}(v_0, \dots, v_n)$.

Zwischen den Vektoren v_i gibt es eine (bis auf Vorzeichen) eindeutige Relation $\sum a_i v_i = 0$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$. Die Eindeutigkeit wird durch die Forderung, daß die $a_i > 0$ und $\text{ggT}(a_0, \dots, a_n) = 1$ sein sollen, erreicht. Eine solche Relation heißt *reduzierte Relation* der v_i .

Diese Relationen sagen viel über $\mathbb{P}(v_0, \dots, v_n)$ aus. Zwar ist diese Varietät dadurch nicht eindeutig bestimmt, aber die Mehrdeutigkeit ist von einem ganz speziellen Typ.

Sei N_v das Gitter, daß von den v_i in N erzeugt wird. Da die v_i den Vektorraum $N_{\mathbb{Q}}$ erzeugen, ist N/N_v eine endliche, abelsche Gruppe. Diese Gruppe tritt als der Torsionsanteil in $\text{Cl}(\mathbb{P}(v_0, \dots, v_n))$ auf, das heißt, $\text{Cl}(\mathbb{P}(v_0, \dots, v_n)) \cong \mathbb{Z} \oplus N/N_v$.

Sofern $\text{Cl}(\mathbb{P}(v_0, \dots, v_n))$ torsionsfrei ist, oder äquivalent $N = N_v$ ist, dann sprechen wir von einem *gewichteten, projektiven Raum*. In [Dol82] sind gewichtete, projektive Räume als Quotient $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*$ definiert, wobei die Wirkung des \mathbb{C}^* die Gestalt $(t, x) \mapsto (t^{a_0} x_0, \dots, t^{a_n} x_n)$ hat. Diese Gewichte a_i bilden gerade eine Relation zwischen den v_i , weswegen für einen gewichteten, projektiven Raum auch $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$ geschrieben wird.

Sei nun $\mathbb{P}(v_0, \dots, v_n)$ ein beliebiger quasi-gewichteter, projektiver Raum mit reduzierter Relation a_i . Sei N_v das von den v_i erzeugte Gitter. Der Fächer von $\mathbb{P}(v_0, \dots, v_n)$ kann natürlich auch als Fächer in $N' = N_v$ betrachtet werden. Dort kodiert dieser Fächer dann den gewichteten, projektiven Raum $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$. Außerdem erhalten wir durch die Gitterinklusion $N' \hookrightarrow N$ eine Überlagerung von $\mathbb{P}(v_0, \dots, v_n)$ durch $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$.

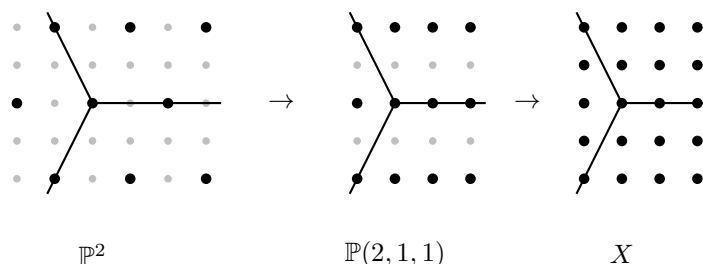


ABBILDUNG 22. Die Überlagerung eines quasi-gewichteten, projektiven Raums X durch einen (gewichteten) projektiven Raum.

Das vorhin gesagte möchte ich an folgendem Beispiel verdeutlichen.

BEISPIEL 5.12. Sei X jene vollständige, torische Fläche, dessen Fächer von den Strahlen $(1, 0)$, $(-1, 2)$ und $(-1, -2)$ erzeugt wird. Dann ist X nicht $\mathbb{P}(2, 1, 1)$, obwohl die Strahlen die Relation

$$2 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (-1, 2) + 1 \cdot (-1, -2) = (0, 0)$$

erfüllen. Die Divisorenklassengruppe $\text{Cl}(X)$ ist $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Allerdings läßt sich X von $\mathbb{P}(2, 1, 1)$ und \mathbb{P}^2 überlagern, siehe Abbildung 22.

Nach dieser Betrachtung eines quasi-gewichteten, projektiven Raums möchte ich nun zur Stack-Situation übergehen. In diesem Fall werde ich einen stacky quasi-gewichteten, projektiven Raum \mathcal{X} durch einen gewöhnlichen \mathbb{P}^n überlagern, um anschließend den Vorschub von Geradenbündeln des \mathbb{P}^n nach \mathcal{X} zu untersuchen.

Seien v_0, \dots, v_n die primitiven Erzeuger der Strahlen von \mathcal{X} und $\beta : \mathbb{Z}^n \rightarrow N$ mit $\beta(e_i) = r_i v_i = w_i$. Da \mathcal{X} kein stacky gewichteter projektiver Raum sein muß, werden die v_i hier im Allgemeinen nicht das Gitter N erzeugen (was nicht so schlimm ist, da es die $r_i v_i$ noch weniger machen werden). Nichtsdestotrotz gibt es eine reduzierte Relation $\sum a_i v_i = 0$. Für die Überlagerung von \mathcal{X} durch \mathbb{P}^n wählen wir ein *minimales* $r \in \mathbb{N}$, sodaß es zu jedem i ein $c_i \in \mathbb{N}$ mit $c_i r_i = r a_i$ gibt. Es kann leicht nachgerechnet werden, daß die c_i eine reduzierte Relation zwischen den w_i herstellen. Damit erhalten wir dann folgende Überlagerung $\sigma : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathcal{X}$:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{X} & & \mathbb{Z}^{n+1} \xrightarrow{\beta} N \\
 \uparrow \sigma & & \uparrow \psi \quad \downarrow \psi' \\
 \mathbb{P}^n & & \mathbb{Z}^{n+1} \xrightarrow{\beta_{\mathbb{P}}} \mathbb{Z}^n
 \end{array}$$

Dabei ist $\beta_{\mathbb{P}} = \begin{pmatrix} -1 & \dots & -1 \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, $\psi(e_i) = c_i e_i$ und $\psi'(f_i) = c_i w_i$, wobei e_0, \dots, e_n bzw.

f_1, \dots, f_n die Standardbasen von \mathbb{Z}^{n+1} bzw. \mathbb{Z}^n bezeichnen (die Indizierung der Basen sowie die Anordnung der Strahlen von \mathbb{P}^n wurden mit Bedacht so gewählt). Da $\psi' \circ \beta_{\mathbb{P}}(e_0) = \psi'(-\sum_{i>0} f_i) = -\sum_{i>0} c_i w_i = c_0 w_0 = \beta \circ \psi(e_0)$, kommutiert das Diagramm wie gewünscht.

Durch Dualisieren des obigen Diagramms und der Berechnung von Kernen und Kokernen, erhalten wir:

$$(6) \quad M : \begin{array}{c} \mathcal{X} \\ \sigma \uparrow \\ \mathbb{P}^n \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & \mu & & & \\ & \downarrow & & & \\ \text{Cl}(\mathcal{X}) & \xleftarrow{\beta^\vee} & \mathbb{Z}^{n+1} & \xleftarrow{\beta^*} & M \\ \bar{\phi} \downarrow & & \downarrow \phi & & \downarrow \\ \mathbb{Z} & \xleftarrow[\beta_{\mathbb{P}}^\vee]{(1, \dots, 1)} & \mathbb{Z}^{n+1} & \xleftarrow{\beta_{\mathbb{P}}^*} & \mathbb{Z}^n \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \bigoplus \mathbb{Z} / c_i \mathbb{Z} & & \mathbb{Z}^n / M \end{array}$$

Die Surjektivität von $\bar{\phi}$ ergibt sich aus der Minimalität von r . Aus Ranggründen läßt sich $\text{Cl}(\mathcal{X})$ als $\mathbb{Z} \oplus \mu$ mit μ Torsion schreiben. Damit muß die Abbildungsmatrix von $\bar{\phi}$ von der Form $(k, 0)$ sein (da $\text{Hom}(\mu, \mathbb{Z}) = 0$). Nach eventuellem Anwenden des Automorphismus $1 \mapsto -1$ können wir annehmen, daß $k > 0$ ist. Die Abbildung β^\vee ist als Abbildung nach \mathbb{Z} durch die Matrix (d_0, \dots, d_n) gegeben. Wegen $\bar{\phi} \circ \beta^\vee = \beta_{\mathbb{P}}^\vee \circ \phi$ muß $(kd_0, \dots, kd_n) = (c_0, \dots, c_n)$ gelten. Falls $k > 1$ sein sollte, wäre k ein nicht-trivialer gemeinsamer Teiler der c_i . Wegen $c_i r_i = r a_i$ und $\text{ggT}(a_0, \dots, a_n) = 1$ muß k aber auch ein Teiler von r sein, was der Minimalität von r widerspricht. Damit ist $\bar{\phi}$ surjektiv und durch die Matrix $(1, 0)$ gegeben. Außerdem ist die Abbildung β^\vee auf dem freien Anteil von $\text{Cl}(\mathcal{X})$ durch die Matrix (c_0, \dots, c_n) gegeben.

Mittels des Schlangenlemmas erhalten wir zusätzlich die exakte Sequenz $\mu \hookrightarrow \mathbb{Z}^n / M \rightarrow \bigoplus \mathbb{Z} / c_i \mathbb{Z}$:

Zu $p \in \mathbb{Z}$ möchte ich nun $\sigma_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(p)$ berechnen. Wie vorhin möchte ich den \mathbb{Z} -graduierten Cox-Ring \mathcal{S} von \mathbb{P}^n als $\text{Cl}(\mathcal{X})$ -graduierten \mathcal{S} -Modul verstehen (dabei ist \mathcal{S} der Cox-Ring von \mathcal{X}).

Identifizieren wir $\text{Cl}(\mathcal{X})$ mit $\mathbb{Z} \oplus \mu$, so ist die Abbildungsmatrix von $\bar{\phi}$ gerade $(1, 0)$. Das heißt, für $(q, t) \in \mathbb{Z} \oplus \mu$ ist $\phi(\mathcal{S}_{(q,t)}) \subseteq S_{\bar{\phi}(q,t)} = S_q$. Doch damit ist S_q noch nicht ausgeschöpft, selbst mit $\bigoplus_{t \in \mu} \phi(\mathcal{S}_{(q,t)})$ erhalten wir nur einen Teil von S_q , nämlich das Erzeugnis jener Monome $\mathbf{x}^{\mathbf{e}}$, deren Exponent \mathbf{e} von \mathbf{c} geteilt wird. Dabei verwende ich hier die Multiindexschreibweise, das heißt, Aussagen, in denen Fettgedrucktes enthalten ist, gelten komponentenweise.

Sei \mathbf{m} der Exponentenvektor eines beliebigen Monoms aus S_p . Wir dividieren in Multiindexschreibweise mit Rest $\mathbf{m} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{r}$ mit $\mathbf{0} \leq \mathbf{r} < \mathbf{c}$. Damit ist $\frac{\mathbf{x}^{\mathbf{m}}}{\mathbf{x}^{\mathbf{r}}} = \mathbf{x}^{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}} \in \bigoplus_{t \in \mu} \phi(\mathcal{S}_{(p-|\mathbf{r}|, t)})$. Anders ausgedrückt können wir

$$S_p = \bigoplus_{\mathbf{0} \leq \mathbf{r} < \mathbf{c}} \bigoplus_{t \in \mu} \mathbf{x}^{\mathbf{r}} \cdot \phi(\mathcal{S}_{(p-|\mathbf{r}|, t)})$$

schreiben. Damit ist

$$(7) \quad \sigma_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(p) = \bigoplus_{\mathbf{0} \leq \mathbf{r} < \mathbf{c}} \bigoplus_{t \in \mu} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(p - |\mathbf{r}|, t)$$

Man beachte, daß die Anzahl der vorkommenden Geradenbündel gerade der Gitterindex von M in \mathbb{Z}^n ist.

Sei $\mathcal{E}_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{O}(-n), \dots, \mathcal{O})$ eine exzeptionelle Folge auf \mathbb{P}^n . Dann erhalten wir aufgrund der vorangegangenen Überlegungen, daß sich der Vorschub der Elemente von \mathcal{E} mittels $\sigma : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathcal{X}$ in die Geradenbündel

$$\{\mathcal{O}(-|\mathbf{c}| + 1, t), \dots, \mathcal{O}(0, t) \mid t \in \mu\}$$

zerlegen läßt. Beispielsweise tritt $\mathcal{O}(-|\mathbf{c}| + 1, t)$ als Summand von $\sigma_*(\mathcal{O}(-n))$ auf. Dieses Vektorbündel zerfällt nämlich in Geradenbündel der Form $\mathcal{O}(-n - |\mathbf{r}|, t)$ mit $0 \leq \mathbf{r} < \mathbf{c}$. Der maximale Wert von $|\mathbf{r}|$ ist demnach $\sum(c_i - 1) = |\mathbf{c}| - (n + 1)$, was genau den Summanden $\sigma_*(\mathcal{O}(-n))$ zur Folge hat.

Im folgenden Unterabschnitt werde ich zeigen, daß hier eine volle, streng exzeptionelle Folge auf \mathcal{X} vorliegt. Davor möchte ich noch anmerken, daß $\omega_{\mathcal{X}} = \mathcal{O}(-\sum D_i) = \mathcal{O}(-\sum c_i, t) = \mathcal{O}(-|\mathbf{c}|, t)$ für ein $t \in \mu$ ist. Wie im Falle der exzeptionellen Standardfolge auf dem \mathbb{P}^n treten hier alle Geradenbündel auf, die in einem gewissen Sinne „zwischen“ der Strukturgarbe $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ und $\omega_{\mathcal{X}}$ sind.

13.1. Kohomologieverschwindung. Im vorigen Abschnitt wurde der Vorschub noch direkt ausgerechnet. Mithilfe der Definition des Vorschubs aus Abschnitt 12 läßt sich zwar nicht direkt zeigen, daß der Vorschub eines Geradenbündels wieder in Geradenbündel zerfällt, aber damit können wir die Exzeptionalität der Folge zeigen.

SATZ 5.13. *Sei $\mathbb{P}^n \rightarrow \mathcal{X}$ die obige Überlagerung und $\mathcal{O}(l)$ ein Geradenbündel auf \mathbb{P}^n ohne Kohomologie, das heißt, $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(l)) = 0$ für alle i . Dann ist auch der Vorschub $[\phi]_*\mathcal{O}(l)$ ohne Kohomologie.*

BEWEIS. Die Abbildung $\mathbb{P}^n \rightarrow \mathcal{X}$ sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{C}^* \times \text{Hom}(\mu, \mathbb{C}^*) \end{array} .$$

Dabei ist ϕ in Koordinaten durch $x_i \mapsto x_i^{c_i}$ gegeben, und π entsteht durch Anwenden des exakten Funktors $\text{Hom}(-, \mathbb{C}^*)$ auf $\mathbb{Z} \oplus \mu \rightarrow \mathbb{Z}$.

Ich verwende hier die Spektralsequenz von Leray:

$$H^p(\mathcal{X}, R^q[\phi]_*\mathcal{O}(l)) \Rightarrow H^{p+q}(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(l)).$$

Nun ist für ein Geradenbündel $\mathcal{O}(l)$ auf \mathbb{P}^n

$$(8) \quad R^i[\phi]_*\mathcal{O}(l) = \bigoplus_{t \in \mu} [R^i\phi_*\mathcal{O}(l) \cdot e_t]$$

Da aber $\phi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ endlich ist, verschwinden alle R^i für $i > 0$. Insbesondere degeneriert die Spektralsequenz zu Isomorphismen $H^p(\mathcal{X}, [\phi]_*\mathcal{O}(l)) \cong H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(l)) = 0$. \square

Es wurde ja schon nachgerechnet, daß $[\phi]_*\mathcal{O}(l)$ auf \mathcal{X} in eine direkte Summe von Geradenbündeln zerfällt. Nun gilt auch für diese Summanden, daß die Kohomologie verschwindet.

LEMMA 5.14. *Sei $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \oplus \mathcal{F}''$ eine Garbe auf \mathcal{Y} ohne Kohomologie. Dann gilt das auch für \mathcal{F}' und \mathcal{F}'' .*

BEWEIS. Die lange, exakte Kohomologiesequenz für $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ (bzw. die analoge exakte Sequenz mit \mathcal{F}' und \mathcal{F}'' vertauscht) liefert $H^0(\mathcal{F}') = 0 = H^0(\mathcal{F}'')$ und $H^i(\mathcal{F}') \cong H^{i-1}(\mathcal{F}'')$. Damit folgt das Lemma. \square

BEMERKUNG 5.15. Der Vorschub wurde auf zwei verschiedene Arten berechnet. Einerseits wurde im vorigen Abschnitt gezeigt, daß der Vorschub wieder in Geradenbündel zerfällt, während in diesem Abschnitt der Fokus auf der Kohomologie war. Ich möchte noch abschließend zeigen, daß die Ergebnisse in (7) und (8) dieselben sind. Das heißt, es ist zu zeigen, daß für $l \in \mathbb{Z}$ und $t \in \mu$ gilt:

$$\phi_* \mathcal{O}(l) \cdot e_t = \bigoplus_{0 \leq \mathbf{r} < \mathbf{c}} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(l - |\mathbf{r}|, t).$$

Die Abbildung $\phi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ kann zu affinen Abbildungen $\phi_i : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{x_i \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{x_i \neq 0\}$ eingeschränkt werden. Damit ist ϕ lokal über die Ringabbildungen

$$\phi_i^\sharp : \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n, x_i^{-1}] \rightarrow \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n, x_i^{-1}]$$

$$x_j \mapsto x_j^{c_j}$$

bestimmt. Die Garbe $\mathcal{O}(l)$ ist dann lokal der geschiftete Modul $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n, x_i^{-1}](l)$, wobei die Modulstruktur durch ϕ_i^\sharp induziert wird. Durch diese Übersetzung in die Modulsprache kann nun analog zum vorigen Abschnitt vorgegangen werden, was zur gewünschten Aussage führt.

Nun komme ich nun zum Ergebnis dieses Abschnitts.

13.2. Zusammenfassung. Die Divisorenklassengruppe eines stacky, quasi-gewichteten, projektiven Raums \mathcal{X} ist Teil einer exakten Folge

$$0 \rightarrow \mu \rightarrow \text{Cl}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

siehe das Diagramm (6). Wir wählen einen Schnitt $\text{Cl}(\mathcal{X}) \rightarrow \mu$, um einen Isomorphismus $\text{Cl}(\mathcal{X}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mu$ zu erhalten.

PROPOSITION 5.16 ([Kaw06, Theorem 3.5]). *Sei \mathcal{X} ein stacky, quasi-gewichteter, projektiver Raum gegeben durch $\beta(e_i) = w_i \in N$ für $0 \leq i \leq n$. Sei $\sum c_i w_i = 0$ die reduzierte Relation zwischen den w_i . Außerdem sei ein Isomorphismus $\text{Cl}(\mathcal{X}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mu$ mit $\mu = \{t_1, \dots, t_l\}$ Torsion wie vorhin gewählt. Dann ist*

$$\mathcal{E} = (\mathcal{O}(-|\mathbf{c}| + 1, t_1), \dots, \mathcal{O}(-|\mathbf{c}| + 1, t_l), \mathcal{O}(-|\mathbf{c}| + 2, t_1), \dots, \mathcal{O}(0, t_l))$$

eine volle, streng exzeptionelle Folge in $\mathcal{D}^b(\mathcal{X})$.

BEWEIS. Die strenge Exzeptionalität ergibt sich aus den obigen Überlegungen zur Kohomologieverschwindung. Es bleibt noch zu zeigen, daß diese Folge auch tatsächlich voll ist. Dafür reicht es zu zeigen, daß ein Objekt im orthogonalen Komplement der vollen, triangulierten Unterkategorie, die von \mathcal{E} erzeugt wird, isomorph zur Null ist. Sei dazu $F \in \mathcal{D}^b(\mathcal{X})$ mit $\text{Hom}(\mathcal{O}(i, t), F) = 0 = \text{Hom}(F, \mathcal{O}(i, t))$ für alle $-|\mathbf{c}| < i \leq 0$ und $t \in \mu$. Es reicht, als F eine quasikohärente Garbe zu betrachten.

Nun ist

$$0 = \bigoplus_{\text{gewisse } (i, t)} \text{Hom}(F, \mathcal{O}(i, t)) = \text{Hom}(F, \pi_* \mathcal{O}(j)) = \text{Hom}(\pi^* F, \mathcal{O}(j)),$$

dabei wird über jene (i, t) summiert, sodaß $\pi_*\mathcal{O}(j)$ in genau diese $\mathcal{O}(i, t)$ zerfällt. Da es auf \mathbb{P}^n einen Serre-Funktor gibt, folgt daraus, daß $\pi^*F = 0$ ist (siehe [Huy06, Aufgabe 1.48]).

Um zu zeigen, daß bereits $F = 0$ ist, betrachten wir die Abbildung $\pi : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathcal{X}$ als Abbildung

$$\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} //_{\mathbb{C}^*} \rightarrow [\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / G].$$

Die Garbe F ist dann eine G -äquivalente Garbe auf $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, und deren Rückzug eine \mathbb{C}^* -äquivalente Garbe π^*F ebenfalls auf $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Da die Abbildung $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ flach ist, folgt aber aus $\pi^*F = 0$ bereits $F = 0$. \square

BEMERKUNG 5.17. Die exzeptionelle Folge auf \mathcal{X} hängt von der Wahl des Schnittes $\text{Cl}(\mathcal{X}) \rightarrow \mu$ ab. Diese Wahl ist möglich, da es zwischen zwei Divisoren $\mathcal{O}(i, t)$ und $\mathcal{O}(i, t')$, die sich nur im Torsionsanteil unterscheiden, automatisch $\text{Hom}^k(\mathcal{O}(i, t), \mathcal{O}(i, t')) = 0$ ist. Damit können diese Elemente in der exzeptionellen Folge beliebig vertauscht werden.

Nach [Kaw06, Theorem 3.5(5)] treten in der exzeptionellen Folge jene Geradenbündel $\mathcal{O}(\sum k_i D_i)$ auf, für die

$$0 \geq \sum_i \frac{a_i k_i}{r_i} > - \sum_i \frac{a_i}{r_i}$$

ist, wobei die a_i die reduzierte Relation zwischen den *primitiven* Erzeuger der Strahlen ist. Man beachte, daß die rechte Summe dem kanonischen Divisor entspricht. Nach Multiplikation dieser Ungleichungen mit r werden diese wegen $c_i = \frac{r a_i}{r_i}$ zu

$$0 \geq \sum_i c_i k_i > - \sum_i c_i,$$

was die Äquivalenz zur obigen Proposition zeigt.

13.3. Anhang: Vergleich mit Geigle und Lenzing. Ich halte mich hier an die Übersicht aus [Bae88, Kapitel 2]. Es stellt sich im folgenden heraus, daß der dort verwendete Begriff des gewichteten, projektiven Raums in der hier verwendeten Sprache der torischen Stacks als stacky, projektiver Raum zu sehen ist. Das soll heißen, daß der Fächer stets der Fächer des gewöhnlichen \mathbb{P}^n sein wird, aber die Erzeuger nicht primitiv gewählt werden. Leider treten in der Literatur beide Bedeutungen von „gewichtet“ auf, was durchaus zu Verwirrung führen kann. Um diese Verwirrung gering zu halten, werde ich für den Begriff gewichtet wie in [Bae88] *GL-gewichtet* schreiben.

Für einen GL-gewichteten, projektiven Raum bedarf es eines Polynomrings $S = k[x_0, \dots, x_n]$ mit entsprechender Multigraduierung. Diese Graduierung wird folgendermaßen definiert.

Seien $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_n)$ natürliche, positive Zahlen. Dazu sei $L(\mathbf{p})$ die abelsche Gruppe, die von den Symbolen y_0, \dots, y_n erzeugt wird, wobei diese den Relationen $p_i y_i = p_j y_j$ genügen. Natürlich reichen in diesem Fall die n Relationen $p_i y_i = p_n y_n$ mit $0 \leq i < n$ aus, damit hat $L(\mathbf{p})$ den Rang 1.

Sei $c = p_i y_i$. Dann läßt sich jedes Element y von $L(\mathbf{p})$ in eindeutiger Weise als

$$y = \alpha c + \sum \beta_i y_i \text{ mit } \alpha, \beta_i \in \mathbb{Z} \text{ und } 0 \leq \beta_i < p_i$$

schreiben.

Die Graduierung auf S durch $L(\mathbf{p})$ kommt nun durch die Abbildung $\beta^\vee(x_i) = y_i$ zustande. Das Paar S mit Graduierung $L(\mathbf{p})$ wird mit $S(\mathbf{p})$ bezeichnet und der entsprechende stacky, projektive Raum mit $\mathcal{P}^n(\mathbf{p})$.

Diese Beschreibung läßt sich sehr leicht in die Cox-Beschreibung überführen.

$$M: \mathcal{P}^n(\mathbf{p}) \quad L(\mathbf{p}) \xleftarrow{\beta^\vee} \mathbb{Z}^{n+1} \xleftarrow{\beta^*} \mathbb{Z}^n$$

Die Abbildungsmatrix von β^* ist dabei $\begin{pmatrix} p_0 & & & -p_n \\ & \ddots & & \vdots \\ & & p_{n-1} & -p_n \end{pmatrix}$. Außerdem ist spätestens

hier klar, daß $L(\mathbf{p}) = \text{Cl}(\mathcal{P}^n(\mathbf{p}))$ ist.

In [Bae88, Abschnitt 2.6] wird die Kohomologie von Geradenbündeln auf $\mathcal{P}^n(\mathbf{p})$ beschrieben. Es ist

$$H^i(\mathcal{O}(y)) = \begin{cases} S_y & \text{falls } i = 0, \\ 0 & \text{falls } 0 < i < n, \\ (S_{-y+\omega})^* & \text{falls } i = n \end{cases}$$

mit $\omega = -\sum y_i$ dem kanonischen Divisor.

Ein großer Vorteil dieser Beschreibung ist, daß sich recht einfach sagen läßt, wann $S_y = 0$ ist (und im selben Zuge, wann $S_{-y+\omega} = 0$ ist). Dazu definieren wir

$$L(\mathbf{p})^+ = \{y = \alpha c + \sum \beta_i y_i \in L(\mathbf{p}) \mid \alpha, \beta_i \in \mathbb{N}\}$$

Genau dann ist $S_y = 0$, wenn $y \notin L(\mathbf{p})^+$ ist. Mit diesem Kriterium läßt sich einfach feststellen, wann ein Geradenbündel vorliegt, dessen Kohomologie verschwindet (wird beispielsweise in [Bae88, Proposition 4.1.1] angewandt, um eine Kippgarbe für $\mathcal{P}^n(\mathbf{p})$ hinzuschreiben).

Nun können wir die Ergebnisse von [Bae88, Proposition 4.1.1] mit der Proposition 5.16 vergleichen, wenn es darum geht, eine streng exzeptionelle Folge auf einem stacky \mathbb{P}^n zu beschreiben. Dieser ist also $\mathcal{P}(\mathbf{p}) = (\mathbb{P}^n, \beta)$ mit

$$\beta: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}^n, e_i \mapsto \begin{cases} p_i f_i & i > 0 \\ -p_0 \sum f_j & i = 0 \end{cases}.$$

und $p_i \in \mathbb{N}$.

Nach Bemerkung 5.17 wird $\mathcal{D}^b(\mathcal{P}(\mathbf{p}))$ von jenen $\mathcal{O}_{\mathcal{P}(\mathbf{p})}(\sum k_i D_i)$ mit

$$0 \geq \sum_i c_i k_i > -\sum c_i$$

erzeugt. Nehmen wir die Menge der Isomorphieklassen dieser $\mathcal{O}_{\mathcal{P}(\mathbf{p})}(\sum k_i D_i)$, dann können diese nach Proposition 5.16 solcherart angeordnet werden, daß eine streng exzeptionelle Folge vorliegt. Da die c_i teilerfremd sind, kann für $\sum c_i k_i$ jeder Wert zwischen 0 und $1 - \sum c_i$ auftreten (das sind $\sum c_i$ verschiedene Möglichkeiten).

Ich werde nun untersuchen, wieviele Äquivalenzklassen der Divisoren es hier gibt. Dafür halte ich nochmals fest, daß es eine Abbildung $\beta^\vee: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \text{Cl}(\mathcal{P}^n(\mathbf{p}))$ gibt. Diese können wir in ihren freien Anteil $\beta_{\mathbb{Z}}^\vee: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ und Torsionsanteil $\beta_{\mu}^\vee: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mu$ zerlegen. Seien $D = \sum k_i D_i$ und $D' = \sum k'_i D_i$ zwei Divisoren. Diese sind sicherlich nicht äquivalent, falls $\beta_{\mathbb{Z}}^\vee(D) = \sum c_i k_i \neq \sum c_i k'_i = \beta_{\mathbb{Z}}^\vee(D')$ ist. Für $\sum c_i k_i = \sum c_i k'_i$, können sich demnach D und D' lediglich durch Torsion unterscheiden.

Diese Überlegungen ergeben zusammen, daß die Anzahl der Elemente von \mathcal{E}_K gerade

$$K = \left(\sum c_i \right) \cdot \#\mu$$

ist. Das ist auch in Übereinstimmung mit [BH09, Remark 5.2].

Sowohl $\sum c_i$ als auch $\#\mu$ lassen sich in Abhängigkeit der p_i schreiben. Zum einen ist $c_i = \frac{\text{kgV}(p_0, \dots, p_n)}{p_i}$, wobei $\text{kgV}(p_0, \dots, p_n) = \frac{p_0 \cdots p_n}{\text{ggT}(p_0 \cdots \hat{p}_j \cdots p_n | 0 \leq j \leq n)}$ ist. Zum anderen ist $\#\mu$ gleich dem Produkt der Elementarteiler der Matrix

$$\begin{pmatrix} p_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & p_n & \\ -p_0 & \cdots & & -p_0 \end{pmatrix}.$$

Nach [Bosch, Kapitel 2.9, Satz 6] ist aber das Produkt der Elementarteiler gerade der ggT der $n \times n$ -Minoren, was wiederum $\text{ggT}(p_0 \cdots \hat{p}_j \cdots p_n | 0 \leq j \leq n)$ ist.

Zusammengenommen ist $K(n) = (\sum c_i) \#\mu = \sum_j p_0 \cdots \hat{p}_j \cdots p_n$.

Bei [Bae88] wird gleich über $\mathcal{O}_{\mathcal{P}(\mathbf{p})}(y)$ mit $y \in \text{Cl}(\mathcal{P}(\mathbf{p})) \cong L(\mathbf{p})$ argumentiert. Nach [Bae88, Proposition 4.1.1] bilden die Geradenbündel $\mathcal{O}_{\mathcal{P}(\mathbf{p})}(y)$ mit $0 \leq y \leq nc$ eine streng exzeptionelle Folge. Dabei ist c die Restklasse von $p_i D_i$ und $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in L(\mathbf{p})^+$.

Nun zur Anzahl der Elemente von \mathcal{E}_B nach [Bae88]. Wir schreiben $y = \alpha c + \sum \beta_i x_i$. Damit ist $0 \leq y$ genau dann, wenn $0 \leq \alpha$ und $0 \leq \beta_i < p_i$. Die Ungleichung $y \leq nc$ ist nicht ganz so einfach.

$$\begin{aligned} nc - y &= (n - \alpha)c + \sum_{\beta_i > 0} -\beta_i x_i = (n - \alpha)c + \sum_{\beta_i > 0} (-p_i + p_i - \beta_i)x_i \\ &= (n - \alpha - \sum_{\beta_i > 0} 1)c + \sum_{\beta_i > 0} (p_i - \beta_i)x_i \end{aligned}$$

Damit ist $y \leq nc$, falls $n - \alpha - \sum_{\beta_i > 0} 1 \geq 0$ ist.

Seien $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_k}$ jene Koeffizienten, die ungleich Null sind. Es gibt $\prod_j (p_{i_j} - 1)$ Möglichkeiten diese Koeffizienten solcherart zu wählen. Für α werden die möglichen Werte auf die Zahlen 0 bis $n - k$ eingeschränkt, das sind $n + 1 - k$ verschiedene Werte. Zusammengenommen ergibt sich so für die Ich schreibe im folgenden $P(i_1, \dots, i_k) = \prod (p_{i_j} - 1)$ und \mathbf{i}_k für i_1, \dots, i_k wobei stets $i_j < i_{j+1}$ ist. Anzahl der auftretenden Geradenbündel

$$B(n) = \sum_{k=0}^n B(n)_k \cdot (n+1-k) \text{ mit } B(n)_k = \begin{cases} \sum_{0 \leq \mathbf{i}_k \leq n} P(\mathbf{i}_k) & \text{für } k > 0 \\ 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k < 0 \text{ oder } k > n + 1 \end{cases}$$

Es gibt sicher elegante Wege, um $B(n) = K(n)$ zu zeigen. Da mir aber die kombinatorische Finesse fehlt, bleibt mir nur der Weg zu Fuß per Induktion. Für $n = 1$ ist die Gleichheit

$$\sum_{k=0}^n B(1)_k \cdot (n+1-k) = \sum_j p_0 \cdots \hat{p}_j \cdots p_n$$

nahezu offensichtlich (es bedarf schon des Ausschreibens). Der Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$ erfordert etwas mehr Konzentration. Für $k > 0$ ist

$$B(n+1)_k = \sum_{0 \leq i_k \leq n+1} P(\mathbf{i}_k) = \sum_{0 \leq i_k \leq n} P(\mathbf{i}_k) + \sum_{0 \leq i_{k-1} \leq n} P(\mathbf{i}_{k-1}, n+1),$$

wobei ich beim Aufspalten der Summe unterscheide, ob i_k kleiner als $n+1$ ist oder nicht. Also ist für $k > 0$ die Gleichung $B(n+1)_k = B(n)_k + B(n)_{k-1} \cdot (p_{n+1} - 1)$ erfüllt. Diese Gleichung gilt auch für $k = 0$.

Also ist

$$\begin{aligned} B(n+1) &= \sum_{k=0}^{n+1} B(n+1)_k \cdot (n+2-k) = \\ &= \sum_{k=0}^n B(n+1)_k \cdot (n+2-k) + B(n+1)_{n+1} = \\ &= \sum_{k=0}^n (B(n)_k + B(n)_{k-1} \cdot (p_{n+1} - 1)) \cdot (n+2-k) + B(n+1)_{n+1} = \\ &= \sum_{k=0}^n B(n)_k \cdot (n+1-k) + \sum_{k=0}^n B(n)_k + (p_{n+1} - 1) \cdot \sum_{k=0}^n B(n)_{k-1} \cdot (n+1-(k-1)) + \\ &\quad + B(n)_{n+1} + (p_{n+1} - 1) \cdot B(n)_n = \\ &= K(n) + \sum_{k=0}^{n+1} B(n)_k + (p_{n+1} - 1) \cdot K(n) = p_{n+1} \cdot K(n) + \sum_{k=0}^{n+1} B(n)_k \end{aligned}$$

Die Frage ist nun, ob $p_{n+1} \cdot K(n) + \sum_{k=0}^{n+1} B(n)_k = K(n+1)$ ist. Es soll also

$$\begin{aligned} K(n+1) - p_{n+1}K(n) &= \sum_{j=0}^{n+1} p_0 \cdots \hat{p}_j \cdots p_{n+1} - \sum_{j=0}^n p_0 \cdots \hat{p}_j \cdots p_n p_{n+1} = \\ &= p_0 \cdots p_n = \sum_{k=0}^{n+1} B(n)_k \end{aligned}$$

sein. Für $n = 0$ ist $B(0)_0 + B(0)_1 = 1 + (p_0 - 1) = p_0$ und somit das Fundament für eine Induktion gelegt. Für $n \mapsto n + 1$ ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+2} B(n+1)_k &= \sum_{k=0}^{n+2} (B(n)_k + (p_{n+1} - 1)B(n)_{k-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} B(n)_k + (p_{n+1} - 1) \sum_{k=1}^{n+2} B(n)_{k-1} = p_{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} B(n)_k = p_0 \cdots p_{n+1} \end{aligned}$$

und damit auch die zweite Induktion erfolgreich.

Somit ist die Anzahl der Elemente in den beiden exzeptionellen Folgen dieselbe.

14. Mori-Faserung

Auch wenn die Faser stets ein (stacky) quasi-gewichteter, projektiver Raum ist, muß die Faserung nicht lokal trivial sein. Erst durch den Übergang zu Stacks kann eine lokale Trivialität erreicht werden, wie folgenden Beispiel zeigt.

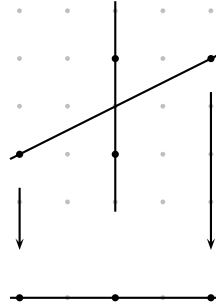


ABBILDUNG 23. Eine nicht-triviale Mori-Faserung

BEISPIEL 5.18 (Eine nicht-triviale Faserung). Sei X die torische Varietät mit den Strahlen $(2, -1)$, $(0, 1)$, $(-2, 1)$ und $(0, -1)$. Die Projektion $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ durch $N_X \rightarrow \mathbb{Z}, (n_1, n_2) \mapsto n_1$ ist nicht trivial. Die Faser über jedem der T -invarianten Fixpunkte ist nämlich ein \mathbb{P}^1 mit nicht reduzierter Struktur (lokal von der Form $\mathbb{C}[x, y]/y^2$). Erst indem wir \mathbb{P}^1 stackifizieren, indem wir die Erzeuger ± 2 wählen, wird diese trivial, siehe Abbildung 23.

In der Sprache von Cox-Ringen wird diese Konstruktion recht natürlich. Sei \mathcal{X} ein torischer Stack, definiert durch $\beta : \mathbb{Z}^m \rightarrow N \cong \mathbb{Z}^n$ mit $\beta(e_i) = w_i = r_i v_i$ (mit v_i primitiv). Angenommen es liegt eine Mori-Faserung vor, das heißt, nach eventuellem Ummumerieren der Strahlen gibt es eine reduzierte Relation

$$\sum_{i=0}^l c_i w_i = 0.$$

Wir erhalten nun ein Untergitter $N' = \mathbb{Q}\langle v_0, \dots, v_l \rangle \cap \mathbb{Z}^n$ von N . Die Kegel von Σ , die in N' liegen, bilden den Fächer Σ'' eines quasi-gewichteten, projektiven Raumes $\mathbb{P}(v_0, \dots, v_n)$, den wir durch Einschränken von β auf $\mathbb{Z}^{l+1} \subset \mathbb{Z}^m$ stackifizieren. Für diesen Stack schreibe ich im folgenden $\mathcal{P}(w_0, \dots, w_l)$.

Sei Σ' der Fächer, der durch die Faserung entsteht. Das heißt, die Kegel von Σ' sind $\{\pi(\sigma) \mid \sigma \in \Sigma\}$, wobei π die Projektion $N_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^n \twoheadrightarrow \mathbb{Q}^n / \mathbb{Q}\langle v_0, \dots, v_l \rangle$ ist.

Nun gibt es einen Unterfächer $\hat{\Sigma}$ von Σ , der unter der Projektion bijektiv auf den Fächer Σ' abgebildet wird, das heißt, zu jedem $\sigma' \in \Sigma'$ gibt es genau ein $\hat{\sigma} \in \hat{\Sigma}$, den π bijektiv auf σ' abbildet.

Des weiteren läßt sich damit jeder Kegel $\sigma \in \Sigma$ als Summe

$$\sigma = \sigma'' + \hat{\sigma} \text{ mit } \sigma'' \in \Sigma'' \text{ und } \hat{\sigma} \in \hat{\Sigma}$$

schreiben. Sei $Y = \text{TV}(\Sigma')$. Die Abbildung $\mathcal{X} \rightarrow Y$ ist zwar eine Faserung, muß aber, selbst wenn \mathcal{X} eine Varietät ist, nicht lokal-trivial sein, siehe Beispiel 5.18. Für die lokale Trivialität müssen die gewählten Erzeuger w_i der Strahlen $\rho_i \in \hat{\Sigma}(1)$ unter der Projektion π auf den primitiven Erzeuger des Strahls $\pi(\rho_i)$ abgebildet werden. Das genannte Beispiel zeigt, daß das selbst im Falle von Varietäten schief gehen kann.

Die Welt der Stacks erlaubt es uns, das Problem auf elegante und einfache Weise zu umgehen. Wir wählen als Erzeuger der Strahlen gerade $\pi(w_i)$. Diese Situation habe ich im folgenden Diagramm zusammengefaßt. Man beachte, daß ich im Falle des $\mathcal{P}(w_0, \dots, w_l)$ die Erzeuger w_i als Vielfache der primitiven Erzeuger v_i schreibe. Das ist im Falle von \mathcal{Y} nicht mehr gültig, das soll heißen, v_{l+1}, \dots, v_m sind im Gitter $\mathbb{Z}^n / \langle v_0, \dots, v_l \rangle \cap \mathbb{Z}^n$ im Allgemeinen keine primitiven Erzeuger (um eventuelle Verwirrungen zu vermeiden).

Die gesamte Situation läßt sich in folgendes Diagramm packen:

$$\begin{array}{ccccc}
 & \mathcal{P}(w_0, \dots, w_l) & & \mathbb{Z}^{l+1} & \xrightarrow{(w_0 \cdots w_l)} & \langle v_0, \dots, v_l \rangle \cap \mathbb{Z}^n \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{N:} & \mathcal{X} & & \mathbb{Z}^m & \xrightarrow{(w_0 \cdots w_m)} & \mathbb{Z}^n \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & \mathcal{Y} & & \mathbb{Z}^{m-(l+1)} & \xrightarrow{(w_{l+1} \cdots w_m)} & \mathbb{Z}^n / \langle v_0, \dots, v_l \rangle \cap \mathbb{Z}^n
 \end{array}$$

Sei $[\psi] : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ die Mori-Faserung mit Faser $[j] : \mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{X}$. Seien ρ_0, \dots, ρ_n die Strahlen des Fächers zu \mathcal{X} , die den Fächer von \mathcal{P} in \mathcal{X} aufspannen. Das heißt, es ist $\mathcal{L}_{\mathcal{X}} := [\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\sum_{i=0}^n k_i D_i)]$ und $\mathcal{L}_{\mathcal{P}} := [\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(\sum_{i=0}^n k_i D_i)]$ gleichermaßen sinnvoll. Sei $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$ exzeptionell. Ich möchte nun zeigen, daß $R^q[\psi]_* \mathcal{L}_{\mathcal{X}} = 0$ für alle q ist. Das Ziel wird sein, daß in dieser Stacksituation auch Kohomologie und Basiswechsel vertauschen und damit

$$R^q[\psi]_* \mathcal{L}_{\mathcal{X}} \otimes k(y) \cong H^q(\mathcal{X}_y, (\mathcal{L}_{\mathcal{X}})_y) = H^q(\mathcal{P}, \mathcal{L}_{\mathcal{Y}}) = 0$$

gilt, woraus die Behauptung folgen würde.

Sei $\mathcal{P} = [U/G]$, $\mathcal{X} = [V/H]$ und $\mathcal{Y} = [W/K]$:

$$\begin{array}{ccccc}
 U & \xrightarrow{\phi} & V & \xrightarrow{\psi} & W \\
 \circlearrowleft & & \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\
 G & \xrightarrow{\pi} & H & \xrightarrow{\tau} & K
 \end{array}$$

Um U, V, G und H besser zu verstehen, dualisieren wir obiges Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{P} & \text{Cl}(\mathcal{P}) & \longleftarrow & \mathbb{Z}^{l+1} & \longleftarrow & M_{\mathcal{P}} \\
 \downarrow & \uparrow \pi & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mathcal{X} & \text{Cl}(\mathcal{X}) & \longleftarrow & \mathbb{Z}^m & \longleftarrow & \mathbb{Z}^n \\
 \downarrow & \uparrow \tau & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{Y} & \text{Cl}(\mathcal{Y}) & \longleftarrow & \mathbb{Z}^{m-(l+1)} & \longleftarrow & M_{\mathcal{Y}}
 \end{array}$$

Das Schlangenlemma kann hier gleich zweimal erfolgreich angewendet werden, beachte dabei, daß die mittlere und rechte Spalte exakt sind. Zunächst für die oberen zwei Zeilen ergibt sich:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & M_{\mathcal{Y}} & \rightarrow & \mathbb{Z}^{m-(l+1)} & \rightarrow & \ker \pi \rightarrow \\
 & & & & & & \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \text{coker } \pi \rightarrow 0
 \end{array}$$

Wegen der Exaktheit der dritten Zeile ist $\ker \pi = \text{Cl}(\mathcal{Y})$, und da $\text{coker } \pi = 0$ sein muß, ist π surjektiv. Nun die Schlange zu den unteren zwei Zeilen:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \ker \tau \rightarrow \\ &\rightarrow M_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{Z}^{l+1} \rightarrow \text{coker } \tau \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Analog wie vorhin ergibt sich, daß τ injektiv und $\text{coker } \tau = \text{Cl}(\mathbb{P})$ ist. Als Konsequenz ist also $\text{Cl}(\mathcal{Y}) \hookrightarrow \text{Cl}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Cl}(\mathcal{P})$ exakt und ebenso $G \hookrightarrow H \rightarrow K$ (entsteht durch Anwenden von $\text{Hom}(-, \mathbb{C}^*)$).

Wir wissen schon, daß $U = \mathbb{C}^{l+1} \setminus \{0\}$ ist. Wie sehen aber V und W aus? Da $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ eine Mori-Faserung ist, gibt es einen Unterfächer $\Sigma_{\mathcal{X},0}$ vom Fächer $\Sigma_{\mathcal{X}}$ zu \mathcal{X} , der kombinatorisch isomorph zum Fächer $\Sigma_{\mathcal{Y}}$ von \mathcal{Y} ist. Außerdem wird jeder Kegel in $\Sigma_{\mathcal{X},0}$ unter der Abbildung $N_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} \rightarrow N_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$ bijektiv auf einen Kegel in $\Sigma_{\mathcal{Y}}$ abgebildet.

Die Kegel in $\Sigma_{\mathcal{X}}$ sind dann von der Form $\sigma_{\mathcal{P}} + \sigma_{\mathcal{Y}}$ mit $\sigma_{\mathcal{P}} \in \Sigma_{\mathcal{P}} \subset \Sigma_{\mathcal{X}}$ und $\sigma_{\mathcal{Y}} \in \Sigma_{\mathcal{X},0} \subset \Sigma_{\mathcal{X}}$. Damit gilt für die irrelevanten Ideale:

$$I_{\mathcal{X}} = \langle x^{\hat{\sigma}} \mid \sigma \in \Sigma_{\mathcal{X}} \rangle = \langle x^{\hat{\tau}} \cdot x^{\hat{\sigma}} \mid \tau \in \Sigma_{\mathcal{P}}, \sigma \in \Sigma_{\mathcal{X},0} \rangle$$

Damit ist $I_{\mathcal{X}}$ im wesentlichen von der Form „ $I_{\mathcal{P}} \cdot I_{\mathcal{Y}}$ “, somit gilt für die Projektion $V = \mathbb{C}^m \setminus V(I_{\mathcal{X}}) \rightarrow W = \mathbb{C}^{m-(l+1)} \setminus V(I_{\mathcal{Y}})$, daß die Faser über jedem Punkt gerade U ist.

Sei $D = \sum_{i=0}^l k_i D_i$, sodaß $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(D)$ ein exzeptionelles Geradenbündel auf \mathcal{P} ist. Ich möchte nun Halbstetigkeitsaussagen wie in [Har77, Abschnitt III.12] anwenden. Natürlich steht mir diese Aussagen nicht ohne weiteres für Stacks zur Verfügung. Auch auf die Abbildung auf Cox-Niveau $V \rightarrow W$ lassen sich diese Aussagen nicht anwenden, da die Abbildung aufgrund der Faser U im Allgemeinen weit davon entfernt ist, eigentlich zu sein.

Wie in [Liu02, Remark 3.30] bemerkt wird, ist in den Aussagen wie [Har77, Theorem III.12.11(a)]:

$$R^i f_* (\mathcal{F}) \otimes k(y) \rightarrow H^i(X_y, \mathcal{F}_y) \text{ surjektiv} \Rightarrow \text{Isomorphismus}$$

deswegen ein projektiv (oder allgemeiner: eigentlicher) Morphismus vorausgesetzt, da es für die Beweise der Endlichkeitsaussagen für die Kohomologie nach Serre ([Har77, Theorem III.5.2a]) bedarf. Diese lassen sich aber leicht auf Stack-Niveau übertragen.

Sei $p : \mathcal{X} \rightarrow X$ die Abbildung zum groben Modulraum. Nun gilt mithilfe der Spektralsequenz von Leray

$$H^i(X, R^j p_* \mathcal{F}) \Rightarrow H^{i+j}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$$

für eine kohärente Garbe \mathcal{F} auf \mathcal{X} . Da aber p eine endliche Abbildung ist, ist auch $R^j p_* \mathcal{F}$ kohärent. Somit gilt [Har77, Theorem III.5.2a] für $R^j p_* \mathcal{F}$, das heißt, daß alle $H^i(X, R^j p_* \mathcal{F})$ endlich dimensionale Vektorräume sind. Also muß auch $H^{i+j}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ endlich dimensional sein.

Damit läßt sich [Har77, Theorem III.12.11(a)] auf diese Stack-Situation ausweiten. Für eine Garbe $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D)$ auf \mathcal{X} ist die Abbildung

$$R^q [\psi]_* (\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D)) \otimes k_y \rightarrow H^q(\mathcal{P}, \mathcal{O}_{\mathcal{P}}(D)) = 0$$

offensichtlich surjektiv für alle q . Nach diesem Theorem ist die Abbildung ein Isomorphismus und somit $R^q [\psi]_* (\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D)) = 0$ für alle q .

Diese vorangegangene Aussage ist die Hauptzutat für exzeptionelle Folgen auf \mathcal{X} . Sei (L_1, \dots, L_k) die schon berechnete volle, exzeptionelle Folge aus Geradenbündeln auf \mathcal{P} . Dabei ist $L_i = \mathcal{O}_{\mathcal{P}}(\sum_{j=1}^l k_{ij} D_j)$. Ich schreibe \mathcal{L}_i für das Geradenbündel $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\sum_{j=1}^l k_{ij} D_j)$ auf \mathcal{X} . Dazu definieren wir

$$\mathcal{D}^b(\mathcal{Y})_i := [\psi]^* \mathcal{D}^b(\mathcal{Y}) \otimes \mathcal{L}_i.$$

PROPOSITION 5.19 ([Kaw06, Theorem 4.3]). *Die Folge von Unterkategorien $(\mathcal{D}^b(\mathcal{Y})_1, \dots, \mathcal{D}^b(\mathcal{Y})_k)$ bildet eine semi-orthogonale Zerlegung von $\mathcal{D}^b(\mathcal{X})$.*

Sei (E_1, \dots, E_m) eine volle, exzeptionelle Folge von \mathcal{Y} . Dann ist

$$([\psi]^* E_1 \otimes \mathcal{L}_1, \dots, [\psi]^* E_m \otimes \mathcal{L}_1, [\psi]^* E_1 \otimes \mathcal{L}_2, \dots, [\psi]^* E_m \otimes \mathcal{L}_k)$$

eine volle, exzeptionelle Folge von \mathcal{X} .

BEMERKUNG 5.20. Sei N ein Vektorbündel auf einer Varietät Y . Dann gilt eine analoge Aussage für $\mathcal{D}^b(\mathbb{P}(N))$ nach Orlov, siehe [Or192, Theorem 2.6, Corollary 2.7]. Diese Proposition ist somit im torischen Fall eine Verallgemeinerung auf Stacks.

BEWEIS. Ich folge hier im wesentlichen dem Beweis von Kawamata zu [Kaw06, Theorem 4.3], werde aber ausführlicher sein.

Sei $L[\psi]^* A \otimes \mathcal{L}_i$ und $L[\psi]^* B \otimes \mathcal{L}_j$ mit $A, B \in \mathcal{D}^b(\mathcal{Y})$ und $1 \leq j \leq i \leq k$. Sei zunächst $j < i$. Dann ist $\mathcal{L}_j - \mathcal{L}_i$ ein exzeptionelles Geradenbündel auf \mathcal{P} .

$$\begin{aligned} \text{Hom}(A, B) \otimes R[\psi]_*(\mathcal{L}_j - \mathcal{L}_i) &= \\ &= R[\psi]_*(L[\psi]^* \text{Hom}(A, B) \otimes (\mathcal{L}_j - \mathcal{L}_i)) && \text{Projektionsformel} \\ &= R[\psi]_*(\text{Hom}(L[\psi]^* A, L[\psi]^* B) \otimes (\mathcal{L}_j - \mathcal{L}_i)) && \text{[Huy06, (3.17)]} \\ &= R[\psi]_*(\text{Hom}(L[\psi]^* A, L[\psi]^* B \otimes (\mathcal{L}_j - \mathcal{L}_i))) && \text{[Huy06, (3.15)]} \\ &= R[\psi]_*(\text{Hom}(L[\psi]^* A \otimes \mathcal{L}_i, L[\psi]^* B \otimes \mathcal{L}_j)) \end{aligned}$$

Mithilfe von Leray erhalten wir daraus die Spektralsequenz:

$$H^p(\mathcal{Y}, \text{Hom}(A, B) \otimes R^q[\psi]_*(\mathcal{L}_j - \mathcal{L}_i)) \Rightarrow \text{Hom}^{p+q}(L[\psi]^* A \otimes \mathcal{L}_i, L[\psi]^* B \otimes \mathcal{L}_j)$$

Aus den Berechnungen, die dieser Proposition vorangehen, wissen wir aber, daß $R[\psi]_*(\mathcal{L}_j - \mathcal{L}_i) = 0$ ist. Daraus folgt die Semi-Orthogonalität. Insbesondere können wir uns bei der Suche nach einer exzeptionellen Folge in $\mathcal{D}^b(\mathcal{X})$ nun auf die Teile $\mathcal{D}^b(\mathcal{Y})_i$ beschränken.

Der Fall $i = j$ liefert auch einen wichtigen Punkt. Da zumindest $R^q[\psi]_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}} = 0$ für $i > 0$ ist, degeneriert die Spektralsequenz zum Isomorphismus

$$\text{Hom}^p(A, B \otimes [\psi]_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \cong \text{Hom}^p(L[\psi]^* A, L[\psi]^* B).$$

Die Faserung ist lokal trivial, also kann in Analogie zu [Har77, Ex. 8.4(a)] gezeigt werden, daß $[\psi]_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}} = \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ ist. Damit ist $[\psi]^*$ volltreu. Insbesondere ist $([\psi]^* E_1 \otimes \mathcal{L}_i, \dots, [\psi]^* E_m \otimes \mathcal{L}_i)$ eine exzeptionelle Folge in $\mathcal{D}^b(\mathcal{Y})_i$.

Abschließend kann über die aufspannende Klasse der Wolkenkratzergerben der Länge 1 nachgewiesen werden, daß eine semi-orthogonale Zerlegung von $\mathcal{D}^b(\mathcal{X})$ vorliegt, das heißt, die volle Unterkategorie, die von den $\mathcal{D}^b(\mathcal{Y})_i$ erzeugt wird, ist bereits $\mathcal{D}^b(\mathcal{X})$. Das ist auch die letzte Zutat, daß die exzeptionelle Folge in der Proposition auch tatsächlich voll ist.

Sei die Wolkenkratzergarbe A im Punkt $P \in \mathcal{X}$ konzentriert. Sei B die Wolkenkratzergarbe zum Punkt $[\psi](P)$. Dann liegt A in der Kategorie, die von den $[\psi]^* B \otimes \mathcal{L}_i$ erzeugt wird. \square

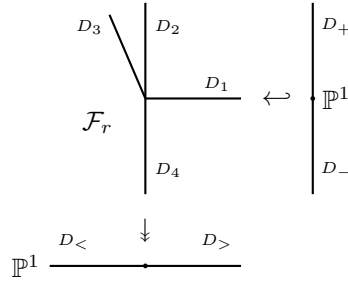


ABBILDUNG 24. Die Faserung einer Hirzebruchfläche.

BEMERKUNG 5.21. In [Kaw06, Theorem 4.3, (3)] wird für zwei Geradenbündel $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\alpha)$ und $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\alpha')$ unter anderem gefordert, daß $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\alpha - \alpha') \notin [\psi]^* \mathcal{D}^b(\mathcal{X})$ ist. Wie schon im Falle quasi-gewichteter Räume ist diese Forderung hier nicht notwendig, da diese Bedingung nur heißt, daß sich die entsprechenden Divisoren auf der Faser \mathcal{P} um Torsion unterscheiden.

Der Rückzug von Geradenbündeln ist hier sehr einfach, siehe [CLS11, Proposition 6.1.20] Sei $D = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} c_{\rho} D_{\rho}$ auf \mathcal{Y} . Dann ist D auch durch $m_{\sigma} \in M_{\mathcal{Y}, \mathbb{Q}}$ mit $\langle m_{\sigma}, \beta(e_{\rho}) \rangle = -c_{\rho}$ für $\rho \in \sigma(1)$ kodiert. Man beachte, im allgemeinen wird m_{σ} nicht in $M_{\mathcal{Y}}$ liegen, denn D ist hier als Weyldivisor nur \mathbb{Q} -Cartier. Die Abbildung $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ ist durch eine Gitterprojektion $\phi : N_{\mathcal{X}} \rightarrow N_{\mathcal{Y}}$ definiert. Das zurückgezogene Geradenbündel $[\psi]^* \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(D)$ ist dann $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D')$ mit

$$m_{\sigma'} = \phi^*(m_{\sigma}) \text{ für } \sigma' \text{ im Fächer von } \mathcal{X},$$

wobei $\phi^* : M_{\mathcal{Y}} \hookrightarrow M_{\mathcal{X}}$ die duale Abbildung zu ϕ , und σ der kleinste Kegel im Fächer von \mathcal{Y} ist, mit $\phi(\sigma') \subseteq \sigma$.

BEISPIEL 5.22. Sei \mathcal{F}_r die Hirzebruchfläche mit den Strahlen $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$, $v_3 = (-1, r)$ und $v_4 = (0, -1)$. Seien D_i die Divisoren zu v_i . \mathcal{F}_r ist eine Mori-Faserung über \mathbb{P}^1 mit Faser \mathbb{P}^1 . Die Randdivisoren auf den projektiven Geraden bezeichne ich mit D_{\geq} bzw. D_{\pm} , siehe Abbildung 24. Auf den projektiven Geraden können die volle, streng exzeptionelle Folge $(\mathcal{O}(-D_{>}), \mathcal{O})$ bzw. $(\mathcal{O}(-D_+), \mathcal{O})$ gewählt werden. Da der Rückzug $\pi^*(D_{>}) = D_1$ und die Einbettung $\iota_*(D_+) = D_2$ ist, setzen sich diese zur vollen, exzeptionellen Folge

$$(\mathcal{O}(-D_1 - D_2), \mathcal{O}(-D_2), \mathcal{O}(-D_1), \mathcal{O})$$

zusammen. Diese Folge ist aber nur für $r = 0$, das heißt, für $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, streng exzeptionell.

Rechnerhilfe

1. Nachweis der Konstruierbarkeit

Im folgenden ist der Quelltext jenes Maple-Programms zu finden, das ich in Kapitel 10.2 für den Nachweis der Konstruierbarkeit gewisser, torischer Systeme verwendet habe.

Zunächst möchte ich auf die grobe Struktur dieses Programms eingehen. Die zentrale Prozedur ist `searchForAugmentation` mit vier Eingabedaten:

- eine torische Fläche X ,
- eine Liste von ein Basen von $\text{Pic}(X)$, die sich als Bild einer guten Basen unter ϖ ergeben,
- die Koeffizienten der zu untersuchenden torischen Systeme \mathcal{A} bezüglich dieser Basis (möglicherweise mit Parameter) und
- eine Liste von Parameterwerte, bezüglich welcher diese Systeme untersucht werden sollen.

Nun wird für die einzelnen Kombinationen von Basis und Koeffizienten, die Funktion `isAug4` aufgerufen. Diese sucht zunächst nach einem exceptionellen Divisor in dem gegebenen torischen System \mathcal{A} . Sofern ein solcher Divisor gefunden wird, wird \mathcal{A} an dieser Stelle „de-augmentiert“ und mit zurückgezogenen torischen Systemen von Flächen vom Picardrang 3 verglichen, um die Konstruierbarkeit nachzuweisen.

Das Programm ist auch online unter

<http://page.mi.fu-berlin.de/hochen/degDP6-aug.mws>

verfügbar.

```
restart:
with(linalg):

#Gibt den i-ten T-invarianten Weildivisor zurueck
basisDiv := proc( i, n )
return [ seq( 'if'(i=j,1,0), j=1..n ) ]:
end proc:

#Sucht im torischen System nach exceptionellen Divisoren
#X ... Liste von Selbstschnittzahlen, die torische Flaeche kodiert
#TS .. torisches System, Liste von Weildivisoren
#Rueckgabe: Liste von Paaren [i,j], wobei
#i .. exceptioneller Divisor E_i
#j .. Stelle des torischen Systems, wo E_i auftritt
findExDivTS := proc ( X, TS )
local i,j,n,Result:
n:=nops(X):
Result:=[]:
```

```

for i from 1 to n do
  if X[i]=-1 then
    for j from 1 to n do
      if equiDiv(X,TS[j],basisDiv(i,n)) then
        Result:=[op(Result),[i,j]]:
      end if:
    end do:
  end if:
end do:
return Result:
end proc:

#De-Augmentiert ein torisches System
#TS .. torisches System A, Liste von Divisoren
#i .. Stelle an der de-augmentiert wird
#Rueckgabe:
#[ ..., A[i-1]+A[i], A[i+1]+A[i], ...]
degTS := proc( TS, i )
  if i=1 then
    return [TS[2]+TS[1],op(TS[3..-2]),TS[-1]+TS[1]]:
  elif i=nops(TS) then
    return [TS[1]+TS[-1],op(TS[2..-3]),TS[-2]+TS[-1]]:
  else
    return
    [op(TS[1..(i-2)]),TS[i-1]+TS[i],TS[i+1]+TS[i],op(TS[(i+2)..-1]]):
  end if:
end proc:

#Blaest X an Stelle i ab
#X .. Liste von Selbstschnittzahlen, die torische Flaechen kodiert
#i .. Stelle, an der abgeblasen wird (X[i] sollte -1 sein)
#Rueckgabe: Liste von Selbstschnittzahlen der abgeblasenen Flaechen
blowDownTV:=proc(X,i)
  if i=1 then
    return [X[2]+1,op(X[3..-2]),X[-1]+1]:
  elif i=nops(X) then
    return [X[1]+1,op(X[2..-3]),X[-2]+1]:
  else
    return [op(X[1..(i-2)]),X[i-1]+1,X[i+1]+1,op(X[(i+2)..-1]]):
  end if:
end proc:

#Verschiebt eine Liste um i Stellen
#TS .. Liste (zB torische Flaechen oder System)
#i .. Anzahl der Stellen
#Rueckgabe
#[ TS[i] .. TS[n], TS[1] .. TS[i-1] ]
shiftList:=proc(TS,i)
  if i=0 then
    return TS:
  elif i>0 then
    return shiftList([op(TS[2..-1]),TS[1]],i-1):
  else #i<0

```

```

    return shiftList([TS[-1],op(TS[1..-2])],i+1):
end if:
end proc:

#Verschiebt eine Liste um i Stellen
#TS .. Liste (zB torische Flaechе oder System)
#i .. Anzahl der Stellen
#Rueckgabe
#[ TS[n] .. TS[1] ]
mirrorList:=proc(TS)
return [seq(TS[-i],i=1..nops(TS))]:
end proc:

#Vergleicht zwei moeglicherweise geschachtelte Listen
#(Maple hatte da manchmal Probleme)
#L1, L2 ..Liste (zB torische Systeme oder Flaechе)
#Rueckgabe offensichtlich
equiList := proc( L1, L2 )
local i:
if type(L1,list) then
for i from 1 to nops(L1) do
if not equiList(L1[i],L2[i]) then
return false:
end if:
end do:
else
return is(L1=L2):
end if:
return true:
end proc:

#Stellt fest, ob zwei Liste (zB torische Flaechе oder System)
#nach Verschieben und/oder Spiegeln gleich sind
#X,Y .. Listen
#Rueckgabe
#[1 ,i] .. falls Y = X[i]
#[-1,i] .. falls Y = -(X[i])
#NULL .. sonst
howSM:=proc(X,Y)
local i:
for i from 0 to nops(X)-1 do
if equiList(shiftList(X,i),Y) then
return [1,i]:
elif equiList(mirrorList(shiftList(X,i)),Y) then
return [-1,i]:
end if:
end do:
return NULL:
end proc:

#wendet die Rueckgabe von howSM an, aus Y wird X
#Y .. Liste
#p .. Rueckgabe von howSM(X,Y)

```

```

#Rueckgabe: X
doSM:=proc(Y,p)
if p[1]<0 then
return shiftList(mirrorList(Y),-p[2]):
else
return shiftList(Y,-p[2]):
end if:
end proc:

#Berechnet gute Basen auf torischer Flaechе vom Picardrang 3
#X .. Liste von Selbstschnittzahlen, die torische Flaechе kodiert
#Rueckgabe:
#Liste von guten Basen (1 oder 2 Stueck)
goodBasis3 := proc(X)
local r,Y,how,base:
r:=max(op(X)):
Y:=[-1,-1,-r-1,0,r]:
how:=howSM(X,Y):
if r=0 then
base=[ [[0,0,1,1,0],[0,0,1,0,0],[1,0,0,0,0]] ,
[[0,0,1,1,0],[1,0,0,0,0],[0,0,1,0,0]] ]:
else
if irem(r,2)=0 then
base=[ [[0,0,1,r/2+1,0],[0,0,1,r/2,0],[1,0,0,0,0]] ]:
else
base:=
[[ (r+1)/2-1, (r+1)/2, 1, 1, 0 ], [ (r+1)/2-1, (r+1)/2, 1, 0, 0 ], [ 0, 1, 0, 0, 0 ] ]:
end if:
end if:
return map( b->map( doSM, b, how ), base):
end proc:

#X->Y Abblasung mit exzeptionellem Divisor D_i
#hier wird ein Divisor auf Y nach X zurueckgezogen
#Div .. Weildivisor
#i .. Aufblasungsort (der exzeptionelle Divisor auf X ist an Stelle i)
#Rueckgabe:
#zurueckgezogener Divisor auf X
pullbackDiv := proc(Div,i)
if i=1 then
return [Div[-1]+Div[1],op(Div[1..-1])]:
elif i=nops(Div)+1 then
return [op(Div[1..-1]),Div[-1]+Div[1]]:
else
return [op(Div[1..(i-1)]),Div[i-1]+Div[i],op(Div[i..-1])]:
end if:
end proc:

#Berechnet gute Basen fuer Flaechе vom Picardrang 4
#X .. torische Flaechе
#Rueckgabe: Liste von guten Basen
goodBasis4 := proc(X)
local i,n, gB3,gB4, Result:

```

```

Result:=[]:
n:=nops(X):
for i from 1 to n do
  if X[i]=-1 then
    gB3 := goodBasis3( blowDownTV(X,i) ):
    gB4 := op(map( b-> [op(map( pullbackDiv, b,i )),basisDiv(i,n) ],
gB3)):
    Result := [op(Result),gB4]:
  end if:
end do:
return Result:
end proc:

```

```

#Berechnet aus Schnitzzahlen die Strahlen des Faechers

```

```

#a .. Liste von Schnitzzahlen a_i
#Rueckgabe: Liste von Vektoren v_i
intNum2Toric := proc( a )
local i,l,n:
n:=nops(a):
l:=seq(0,i=1..n):
l[1]:=[1,0]:
l[2]:=[0,1]:
for i from 3 to n do
  l[i]:=-a[i-1]*l[i-1]-l[i-2]:
end do:
return l:
end proc:

```

```

#Berechnet, ob zwei Divisoren aequivalent sind

```

```

#X .. torische Flaechen
#D1,D2 .. Weildivisoren
equiDiv:=proc(X,D1,D2)
if linsolve(matrix(intNum2Toric(X)),vector(D1-D2))<>NULL then
  return true:
else
  return false:
end if:
end proc:

```

```

#Filtert aus einer Liste gB von Basen jene heraus,
#deren letztes Element ein vorgegebener Divisor Div ist

```

```

goodBasisWithD := proc(X,gB,Div)
local Result, g:
Result:=[]:
for g in gB do
  if equiDiv(X,g[-1],Div) then
    Result:=[op(Result),g]:
  end if:
end do:
return Result:
end proc:

```

```

#Berechnet, ob zwei torische Systeme gleich sein,

```

```

#wobei Parameter auftreten koennen (xx)
equiTSpara:=proc(A1,A2)
return solve({ seq( seq( A1[i][k]=A2[i][k],
                        k=1..nops(A1[i])),i=1..nops(A1)) }, {xx}):
end proc:

#Berechnet, ob zwei torische Systeme nach Drehung/Spiegelung gleich
sein,
#wobei Parameter auftreten koennen (xx)
sameTSpara := proc( TS1, TS2 )
local i, TS2M,e,em:
TS2M:=mirrorList(TS2):
for i from 0 to nops(TS2)-1 do
e:=equiTSpara( TS1, shiftList(TS2,i) ):
em:=equiTSpara( TS1, shiftList(TS2M,i) ):
if e<>NULL then
return e,[1,i]:
elif em<>NULL then
return em,[-1,i]:
end if:
end do:
return NULL:
end proc:

#Ueberprueft, ob ein torisches System TS auf X vom Picardrang 4 konstruierbar ist
#X ... Liste von Selbstschnittzahlen, die torische Flaechen kodiert
#TS .. torisches System, Liste von Weildivisoren
#X muss Picardrang 4 haben (dh. Liste hat Laenge 6)
isAug4 := proc ( X, TS )
local exwo, ex, wo, deTS,coeffTS,absTS3,i,j,sTS,gB3,pullgB3,mat,acTS:
#Bestimme die Positionen, an denen ein exzeptioneller Divisor steht
exwo := findExDivTS( X, TS ):
ex := [ seq( x[1], x=exwo ) ]:
wo := [ seq( x[2], x=exwo ) ]:
#de-augmentiere das torische System bzgl dieser Positionen
deTS := map2( degTS, TS, wo ):
#'abstraktes' TS fuer PicRg 3, 'abstrakt' heisst ohne konkrete Basis
absTS3 := [[1,-1,-1],[0,0,1],[xx+1,-xx,-1],[1,-1,0],[-xx,xx+1,0]];
#Fuer jede dieser Positionen, wird das torische System mit
#den zurueckgezogenen, konstruierbaren, torischen Systemen von
#den Flaechen vom Picardrang 3 verglichen
for i from 1 to nops(exwo) do
gB3 := goodBasis3( blowDownTV( X, ex[i] ) ):
pullgB3 := map( b->map( pullbackDiv, b, ex[i] ), gB3 );
printf(" isAug: de-augmentiere ex. Divisor E_%a an
        Stelle %a und erhalte\n",ex[i],wo[i]):
printf(" isAug: deTS: %a\n",deTS[i]):
for j from 1 to nops(pullgB3) do
printf(" isAug: teste bzgl Basis %a\n",pullgB3[j]):
mat:=augment(transpose(pullgB3[j]),matrix(intNum2Toric(X)));
coeffTS:=map( x->convert(x,'list')[1..3], map2(linsolve, mat,
deTS[i]));
printf(" isAug: deTS hat Koeffs: %a\n",coeffTS);

```



```

printf("  isAug: absTS hat Koeffs: %a\n",absTS3);
  sTS:=sameTSpara(coeffTS,absTS3):
  if sTS<>NULL then
printf("  isAug: Augmentationsbasis.\n"):
  return sTS:
  else
printf("  isAug: nicht die richtige Basis.\n"):
  end if:
  end do:
end do:
printf("  isAug: NICHT AUGMENTIERT!!!\n"):
return false:
end proc:

searchForAugmentation:=proc( X, badBase, TSs, missingJs )
local i,j,k, b, cTS, result:
for i from 1 to nops(badBase) do
  b:=badBase[i]:
  printf("Basis %a\n",b):
  for j from 1 to nops(TSs) do
    printf(" Teste tor Sys mit Koeff %a mit jj = %a\n",
      TSs[j], missingJs[i][j]);
    for k from 1 to nops(missingJs[i][j]) do
      cTS:=convert(evalm(
        matrix(subs(jj=missingJs[i][j][k],TSs[j]))&*matrix(b)
      ), 'listlist');
      printf(" ergibt konkret: %a\n",cTS);
      result:=isAug4(X,cTS):
      if result<>false then
        printf("  stimmen fuer %a ueberein, ",result[1]);
        if result[2][1]=1 then
          printf("nach Verschieben um %a.\n\n",result[2][2]):
        else
          printf("nach Spiegeln und Verschieben um %a.\n\n",result[2][2]):
        end if:
      end if:
    end do:
  end do:
end do:
end proc:
XA:=[-1,-1,-r-1,-1,-1,r-1]:
XB:=[r-1,-1,-2,-1,-r-1,0]:
XC:=[0,-r-1,-2,-1,-2,r]:

dP6:=subs(r=0,XA):
XB0:=subs(r=0,XB):
XB2:=subs(r=2,XB):
XC0:=subs(r=0,XC):
XC1:=subs(r=1,XC):

TS1 := [[1, -1, -1, -1], [0, 0, 0, 1], [0, 0, 1, -1], [jj+1, -jj, -1, 0],
        [1, -1, 0, 0], [-jj, jj+1, 0, 0]]:
TS2 := [[1, -1, -1, 0], [0, 0, 1, -1], [0, 0, 0, 1], [jj+1, -jj, -1, -1],

```

```

      [1, -1, 0, 0], [-jj, jj+1, 0, 0]]:
TS3 := [[1, -1, -1, 0], [0, 0, 1, 0], [jj+1, -jj, -1, -1], [0, 0, 0, 1],
      [1, -1, 0, -1], [-jj, jj+1, 0, 0]]:
TS4 := [[1, -1, -1, 0], [0, 0, 1, 0], [jj+1, -jj, -1, 0], [1, -1, 0, -1],
      [0, 0, 0, 1], [-jj, jj+1, 0, -1]]:
TS5 := [[1, -1, -1, -1], [0, 0, 1, 0], [jj+1, -jj, -1, 0], [1, -1, 0, 0],
      [-jj, jj+1, 0, -1], [0, 0, 0, 1]]:
TSs:=[TS1,TS2,TS3,TS4,TS5]:

matI:=[]
[1,0,0,0,0,0],
[0,1,0,0,0,1],
[0,0,1,0,0,1],
[0,0,1,0,1,0],
[0,0,0,1,0,0],
[0,0,0,0,0,0]
]:
matII:=[]
[0,0,0,0,0,1],
[1,0,0,0,1,0],
[0,1,0,0,1,0],
[0,1,0,1,0,0],
[0,0,1,0,0,0],
[0,0,0,0,0,0]
]:
matIII:=[]
[0,0,0,0,0,0],
[0,1,0,0,0,0],
[1,0,1,0,0,0],
[2,0,0,1,0,0],
[1,0,0,0,1,0],
[0,0,0,0,1,1]
]:
matIV:=[]
[1,0,0,0,0,1],
[0,1,0,0,0,1],
[0,1,0,0,1,0],
[0,1,0,1,0,0],
[0,0,1,0,0,0],
[0,0,0,0,0,0]
]:

gBA0:=goodBasis4(dP6):
gBB0:=goodBasis4(XB0):
gBC0:=goodBasis4(XC0):
goodBasisWithD(dP6,gBA0,basisDiv(3,6));
basisDiv(3,6);
badB0a:=map( x->
      convert(evalm(matrix(x)*transpose(matrix(matI))),'listlist'),
      goodBasisWithD(dP6,gBA0,basisDiv(3,6)));
missingjjB0a:=[[0], [0], [0], [-1], [-1]], [[], [], [jj], [jj], [jj]];
searchForAugmentation(XB0,badB0a,TSs,missingjjB0a);

```

```

badB0b:=map( x->
    convert(evalm(matrix(x)**transpose(matrix(matI))),'listlist'),
    goodBasisWithD(dp6,gBA0,basisDiv(6,6)));
missingjjB0b:=[[[]],[[]],[jj],[jj],[jj]],[[0],[0],[0],[-1],[-1]]];
searchForAugmentation(XB0,badB0b,TSs,missingjjB0b);

badC0a:=map( x->
    convert(evalm(matrix(x)**transpose(matrix(matII))),'listlist'),
    goodBasisWithD(XB0,gBBO,basisDiv(5,6)));
missingjjC0a:=[[[]],[jj],[jj],[jj],[[]]];
searchForAugmentation(XC0,badC0a,TSs,missingjjC0a);

badC0b:=map( x->
    convert(evalm(matrix(x)**transpose(matrix(matII))),'listlist'),
    goodBasisWithD(XB0,gBBO,basisDiv(2,6)));
missingjjC0b:=[[[]],[jj],[jj],[jj],[[]],[[]],[jj],[jj],[jj],[[]]];
searchForAugmentation(XC0,badC0b,TSs,missingjjC0b);

badB2a:=map( x->
    convert(evalm(matrix(x)**transpose(matrix(matIII))),'listlist'),
    goodBasisWithD(XB0,gBBO,basisDiv(1,6)));
missingjjB2a:=[[[]],[[]],[0],[-1],[-1]];
searchForAugmentation(XB2,badB2a,TSs,missingjjB2a);

badB2b:=map( x->
    convert(evalm(matrix(x)**transpose(matrix(matIII))),'listlist'),
    goodBasisWithD(XB0,gBBO,basisDiv(5,6)));
missingjjB2b:=[[[]],[[]],[0],[-1],[-1]];
searchForAugmentation(XB2,badB2b,TSs,missingjjB2b);

badC1:=map( x->
    convert(evalm(matrix(x)**transpose(matrix(matIV))),'listlist'),
    goodBasisWithD(XC0,gBC0,basisDiv(2,6)));
missingjjC1:=[[[]],[[]],[0],[-1],[-1]];
searchForAugmentation(XC1,badC1,TSs,missingjjC1);

```

2. Kohomologieberechnung

Hier findet sich der Quelltext eines Maple-Programm, um die Kohomologie von Geradenbündeln auf (glatten, projektiven) torischen Flächen zu berechnen. Damit kann die Exzeptionalität von Folgen nachgewiesen werden.

Die zentrale Funktion ist `DivCohom`. Dabei verwende ich die Methode zur Berechnung der Kohomologie, wie sie [HP06] zu finden ist. Mit dieser Methode läßt sich deren Berechnung auf folgende Frage reduzieren. Gegeben seien endlich viele, affine Geraden g in \mathbb{Q}^2 , die jeweils \mathbb{Q}^2 in zwei Halbräume unterteilen, wobei einer als negativ ausgezeichnet ist. Die Geraden unterteilen die Ebene polyedrisch. Für alle Gitterpunkte, die sich in einem Polytop dieser Unterteilung befinden, soll dann untersucht werden, in welchen der negativen Halbräume dieser Punkt liegt. Daraus läßt sich die Kohomologie bestimmen (für Details verweise ich auf [HP06]).

Die Bestimmung dieses polytopalen Bereichs ist etwas aufwendig, sodaß ich stattdessen die minimalen und maximalen Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden bestimme. Dann ist dieser polytopale Bereich sicherlich in dem Rechteck

enthalten, daß durch diese Minima und Maxima festgelegt ist. Das Programm untersucht nun alle Gitterpunkte in diesem Bereich (dabei tragen Gitterpunkte außerhalb des polytopalen Bereichs nichts zur Kohomologie bei).

Das Programm ist auch online unter

<http://page.mi.fu-berlin.de/hochen/pic5.mws>

verfügbar.

restart:

with(linalg):

```
#Hilfsfunktion fuer DivCohom
#Bestimmt die Anzahl der Bereiche in einer Liste A
#der Form [...,<val, val, .., val, <val, ..] bzw.
#[val, .., val, <val, .. .. .., <val, val, .., val].
intervals := proc ( A, val )
local i, Result:
Result:=0:
for i from 1 to nops(A)-1 do
  if A[i]<>val and A[i+1]=val then
    Result:=Result+1:
  end if:
end do:
if A[-1]<>val and A[1]=val then
  Result:=Result+1:
end if:
return Result:
end proc:

#Berechnet Kohomologie wie bei Hille und Perling beschrieben
#Eingabe:
#X .. Flaechen als Liste primitiver Strahlerzeuger (zyklisch angeordnet)
#Div .. Weildivisor als Liste von Koeffizienten
#Rueckgabe: [H^0(X,Div),...,H^2(X,Div)]
DivCohom := proc( X, Div )
local i,j,N, H, sgnlist, schnittPt, schnittMat,
minmax, minmaxX, minmaxY, x,y:
N := nops(X):
H := [0,0,0]:
## bestimme max/min x/y koordinate von in frage kommenden gitterpunkten
minmaxX := [+infinity,-infinity]:
minmaxY := [+infinity,-infinity]:
minmax := proc ( oldMM, sP )
  return [ min( oldMM[1], floor(sP) ), max( oldMM[2], ceil(sP) ) ]:
end proc:
for i from 1 to N do
  for j from i+1 to N do
    schnittMat:=matrix([X[i],X[j]]):
    if det(schnittMat)<>0 then
      schnittPt := linsolve( schnittMat , vector([-Div[i],-Div[j]]) ):
      minmaxX := minmax(minmaxX,schnittPt[1]):
      minmaxY := minmax(minmaxY,schnittPt[2]):
    end if:
  end do:
end do:
```

```

end do:
## bestimme +0- verhalten.
for x from minmaxX[1] to minmaxX[2] do
  for y from minmaxY[1] to minmaxY[2] do
    sgnlist := [seq( signum( innerprod( [x,y], X[i] ) + Div[i] ), i=1..N )]:
    if not has(-1,sgnlist) then
      H[1]:=H[1]+1: #H^0
    end if:
    H[2]:=H[2]+max( intervals(sgnlist,-1) -1 , 0): #H^1
    if add(sgnlist[i],i=1..nops(sgnlist))=-nops(sgnlist) then
      H[3]:=H[3]+1: #H^2
    end if:
  end do:
end do:
return H:
end proc:

#Gibt fuer ein torisches System A eine Liste mit
#\sum -A_i zurueck, deren Kohomologie fuer die
#Exzeptionalitaet verschwinden muss
diffTS:=proc(TS)
local Result, i,j,k:
Result:={}:
for i from 1 to nops(TS)-1 do
  for j from i to nops(TS)-1 do
    Result:={op(Result), add(-TS[k],k=i..j) }:
  end do:
end do:
return convert(Result,'list'):
end proc:
X:=[[0,-1],[1,-1],[1,0],[1,1],[0,1],[-1,0],[-1,-1]]:
A:=[[0, 1, 0, 0, 0, -1, 0], [0, -1, 0, 0, 1, 1, 0],
    [0, 1, 0, 0, -1, 0, 0], [0, -1, 0, 1, 4, 3, 0],
    [0, 0, 0, -1, 0, 1, 1], [0, 0, 0, 1, 1, 0, -1],
    [0, -1, 0, 0, -3, -2, 1]]:
#Berechnet H(X,D) fuer D in diffTS(A)
map2( DivCohom, X, diffTS(A) );

```


Abbildungsverzeichnis

1	Zwei zueinander duale Kegel.	2
2	Die Vereinfachung eines divisoriiellen Fächers mit anschließendem Übergang zum Multidivisor	8
3	Zwei Multidivisoren der Hirzebruchfläche \mathcal{F}_2 .	9
4	Die affinen torischen Karten zu gewissen polyedrischen Divisoren.	11
5	Der Divisor D_\bullet in torischen Umgebungen.	11
6	Der Vergleich von Multidivisoren mit Orlik und Wagreichs Beschreibung.	12
7	Die Hirzebruchfläche \mathcal{F}_r durch Fächer bzw. Schnittzahlen gegeben.	13
8	Aufblasung des \mathbb{A}^2 als torische Varietät mit exzeptionellem Divisor \mathbb{P}^1 .	14
9	Zwei Zerlegungen Z^1 und Z^2 , welche dieselbe Unterteilungen (U_+, U_-) induzieren.	18
10	Deformation der Hirzebruchfläche \mathcal{F}_3 zu $u = (1, 1)$.	22
11	Alle nicht-trivialen T -Deformationen von Hirzebruchflächen.	23
12	Zur Proposition 2.15	25
13	Eine Beispieldeformation zu Proposition 2.18	26
14	Die Aufblasung wird durch Einfügen des Divisors $D_{t_i,+}$ realisiert.	29
15	Das Abblasen der dP_6 zu \mathcal{F}_1	48
16	Torische Fläche vom Picardrang 3.	50
17	Die T -Degenerationen von $dP_6 = X_0^A$ zu X_0^B und weiter zu X_0^C .	52
18	Eine T -Degeneration von dP_7 zu X_{2r} .	53
19	Eine T -Degeneration von dP_7 zu X_{2r-1} .	54
20	Mögliche T -Degenerationen von torischen Flächen mit Picardrang 4.	57
21	Die T -Degenerationen (I) - (IV).	58
22	Die Überlagerung eines quasi-gewichteten, projektiven Raums X durch einen (gewichteten) projektiven Raum.	77
23	Eine nicht-triviale Mori-Faserung	85
24	Die Faserung einer Hirzebruchfläche.	89

Literaturverzeichnis

- [AHS08] Klaus Altmann, Jürgen Hausen, and Hendrik Süß. Gluing affine torus actions via divisorial fans. *Transform. Groups*, 13(2):215–242, 2008.
- [Bae88] Dagmar Baer. Tilting sheaves in representation theory of algebras. *Manuscr. Math.*, 60(3):323–347, 1988.
- [BCS05] Lev A. Borisov, Linda Chen, and Gregory G. Smith. The orbifold Chow ring of toric Deligne-Mumford stacks. *J. Amer. Math. Soc.*, 18(1):193–215 (electronic), 2005.
- [BH09] Lev Borisov and Zheng Hua. On the conjecture of King for smooth toric Deligne-Mumford stacks. *Adv. Math.*, 221(1):277–301, 2009.
- [BL94] Joseph Bernstein and Valery Lunts. *Equivariant sheaves and functors*. Lecture Notes in Mathematics. 1578. Berlin: Springer-Verlag, 1994.
- [BP10] Nathan Broomhead and David Ploog. Autoequivalences of toric surfaces, 2010.
- [Can00] Alberto Canonaco. A Beilinson-type theorem for coherent sheaves on weighted projective spaces. *J. Algebra*, 225(1):28–46, 2000.
- [CLS11] David Cox, John Little, and Hal Schenck. *Toric Varieties*. to appear, draft available at <http://www.cs.amherst.edu/~dac/toric.html>, 2011.
- [Dan78] V. I. Danilov. The geometry of toric varieties. *Russian Math. Surveys*, 33(2):97 – 154, 1978.
- [DGPS10] Wolfram Decker, Gert-Martin Greuel, Gerhard Pfister, and Hans Schönemann. SINGULAR 3-1-2 — A computer algebra system for polynomial computations. 2010. <http://www.singular.uni-kl.de>.
- [Dol82] Igor Dolgachev. Weighted projective varieties. In James Carrell, editor, *Group Actions and Vector Fields*, volume 956 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 34–71. Springer Berlin / Heidelberg, 1982. 10.1007/BFb0101508.
- [Ful93] William Fulton. *Introduction to toric varieties*, volume 131 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. The William H. Roever Lectures in Geometry.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*, volume 52 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [Har10] Robin Hartshorne. *Deformation theory*. Graduate Texts in Mathematics 257. Berlin: Springer. , 2010.
- [HI09] Andreas Hochenegger and Nathan Ilten. Families of divisors on T-varieties and exceptional sequences on \mathbb{C}^* -surfaces. arXiv: 0906.4202v2 [math.AG], 2009.
- [HP06] Lutz Hille and Markus Perling. A counterexample to King’s conjecture. *Compos. Math.*, 142(6):1507–1521, 2006.
- [HP08] Lutz Hille and Markus Perling. Exceptional sequences of invertible sheaves on rational surfaces. arXiv: 0810.1936 [math.AG], 2008.
- [Huy06] Daniel Huybrechts. *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2006.
- [Ilt09] Nathan Ilten. Deformations of smooth toric surfaces. arXiv: 0902.0529v2 [math.AG], 2009.
- [IU09] Akira Ishii and Kazushi Ueda. Dimer models and exceptional collections. arXiv: 0911.4529 [math.AG], 2009.
- [IV09] Nathan Ilten and Robert Vollmert. Deformations of rational T-varieties. arXiv: 0903.1393v2 [math.AG], 2009.
- [Kaw06] Yuriro Kawamata. Derived categories of toric varieties. *Mich. Math. J.*, 54(3):517–535, 2006.

- [KN98] B.V. Karpov and D.Yu. Nogin. Three-block exceptional collections over Del Pezzo surfaces. *Izv. Math.*, 62(3):429–463, 1998.
- [Liu02] Qing Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves*. Oxford Graduate Texts in Mathematics. 6. Oxford: Oxford University Press, 2002.
- [Man86] Yu. I. Manin. *Cubic forms*, volume 4 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1986. Algebra, geometry, arithmetic, Translated from the Russian by M. Hazewinkel.
- [Mat02] Kenji Matsuki. *Introduction to the Mori program*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [MGH⁺05] Michael B. Monagan, Keith O. Geddes, K. Michael Heal, George Labahn, Stefan M. Vorkoetter, James McCarron, and Paul DeMarco. *Maple 10 Programming Guide*. Maplesoft, Waterloo ON, Canada, 2005.
- [Oda88] Tadao Oda. *Convex bodies and algebraic geometry*, volume 15 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. An introduction to the theory of toric varieties, Translated from the Japanese.
- [Orl92] D.O. Orlov. Projective bundles, monoidal transformations, and derived categories of coherent sheaves. *Russ. Acad. Sci., Izv., Math.*, 41(1):133–141, 1992.
- [OW77] P. Orlik and P. Wagreich. Algebraic surfaces with k^* -action. *Acta Math.*, 138(1-2):43–81, 1977.
- [PS08] Lars Petersen and Hendrik Süß. Torus invariant divisors. arXiv: 0811.0517v1 [math.AG], 2008.
- [Rud90] *Helices and vector bundles*, volume 148 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. Seminaire Rudakov, Translated from the Russian by A. D. King, P. Kobak and A. Maciocia.
- [Ser06] Edoardo Sernesi. *Deformations of algebraic schemes*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 334. Berlin: Springer. , 2006.
- [Süß08] Hendrik Süß. Canonical divisors on T-varieties. arXiv: 0811.0626v1 [math.AG], 2008.
- [Tim06] D. Timashev. Torus actions of complexity one. In *Toric Topology*, volume 460 of *Contemporary Mathematics*, 2006.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden vor allem exzeptionelle Folgen aus Geradenbündeln auf glatten, projektiven, torischen Flächen untersucht. Außerdem wird noch kurz auf den Fall torischer Orbifaltigkeiten eingegangen.

Im ersten Kapitel wird die Sprache der torischen Geometrie vorgestellt. Das Augenmerk wird dabei besonders auf Flächen gelegt, sowohl torische als auch allgemeiner rationale \mathbb{C}^* -Flächen.

In den beiden folgenden Kapiteln werden die Techniken vorgestellt, die im zentralen vierten Kapitel zur Anwendung kommen. Zum einen sind das T -Deformationen rationaler \mathbb{C}^* -Flächen, wie sie von Nathan Ilten entwickelt wurden. Diese Deformationen werden sehr explizit beschrieben und haben den zusätzlichen Vorteil, daß sie einen Isomorphismus von den Picardgruppen der Fasern induzieren.

Darauf folgt im dritten Kapitel eine Darstellung von Methoden, die Lutz Hille und Markus Perling in [HP08] entwickelt haben. Sie haben dort gezeigt, wie einer exzeptionellen Folge aus Geradenbündeln auf einer rationalen Fläche eine torische Fläche zugeordnet werden kann. Außerdem wurde in diesem Artikel eine Art „Aufblasung“ exzeptioneller Folgen entwickelt, genannt *Augmentation*.

Im vierten Kapitel verwende ich diese Techniken, um zu zeigen, daß für torische Flächen vom Picardrang 3 und 4 alle exzeptionellen Folgen durch Augmentation aus exzeptionellen Folgen auf Hirzebruchflächen gewonnen werden können. Für Picardrang 5 kann ich jedoch ein Gegenbeispiel anführen.

Im abschließenden fünften Kapitel werden exzeptionelle Folgen auf torischen Orbifaltigkeiten betrachtet. Im Artikel [Kaw06] zeigte Yujiro Kawamata, daß jede torische Orbifaltigkeit eine volle, exzeptionelle Folge aufweist. Diese Folgen beschränken sich im Gegensatz zum Fall der Flächen nicht mehr nur auf Folgen aus Geradenbündeln. Sein Beweis baut auf dem torischen MMP auf. Dabei wird zunächst eine exzeptionelle Folge auf einem stacky, quasi-gewichteten, projektiven Raum konstruiert und anschließend über Mori-Faserung, divisorielle Kontraktion und Flip zu einer exzeptionellen Folge auf einer beliebigen torischen Orbifaltigkeit erweitert. Ich werde anhand der Beschreibung torischer Orbifaltigkeiten, wie sie von Lev Borisov, Linda Chen und Gregory Smith in [BCS05] entwickelt wurde, die Teile in Kawamatas Arbeit zu diesen projektiven Räumen und der Mori-Faserung nachvollziehen.