5 Ausblick

Die gemachten Aussagen, zumindest die Integraldarstellungen betreffend, lassen sich auf hyperkomplexwertige Funktionen übertragen, da die Integraldarstellungen im Hyperkomplexen analog zu denen im komplexen Fall sind. Um dies plausibel zu machen, sollen diese Darstellungen kurz motivierend dargestellt werden. (Für eine detaillierte Darstellung sei auf [Bege99a], [BeWe99], [Doug53], [Krau99] verwiesen.)

Ein elliptisches System erster Ordnung

$$u_x + Au_y + Bu + C = 0, \tag{73}$$

wobei die Matrix A den Rang $2r+2$, $r \in \mathbb{N}$, hat, kann auf hyperkomplexe Form gebracht werden, wenn die Matrix A nur ein Paar konjugiert komplexe Eigenwerte der Vielfachheit $r+1$ besitzt.

Mit dieser Transformation wird (73) zu

$$\omega_{0\overline{z}} = 0, \quad \omega_{k\overline{z}} + \sum_{j=0}^{k-1} q_{k-j}\omega_{jz} = 0,\ 1 \le k \le r, \tag{74}$$

wobei

$$\omega = \sum_{k=0}^{r} \omega_k e^k,\ q = \sum_{k=1}^{r} q_k e^k$$

und e die nilpotente $(r+1) \times (r+1)$–Matrix

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit der Eigenschaft $e^{r+1} = 0$ ist.

Die Algebra der hyperkomplexen Zahlen sei mit $\mathcal{A}$ bezeichnet.

Das System (74) ist dann äquivalent zu der hyperkomplexen Gleichung $\mathrm{D}\omega = 0$, wobei $\mathrm{D} = \partial_{\overline{z}} + q\partial_z$. Funktionen, welche dieser homogenen Gleichung genügen, heißen hyperanalytisch.

In der hyperkomplexen Analysis übernimmt eine sogenannte erzeugende Lösung t die Rolle der Variablen z der komplexen Analysis. Diese erzeugende Lösung ist ihrerseits eine Lösung der homogenen Gleichung in der Form $t(z) = z + \tau(z)$ mit nilpotentem τ. Es stellt sich nun heraus, dass sich jedes hyperanalytische ω mit einer analytischen Funktion φ wie folgt darstellen läßt: $\omega(z) = \varphi(t(z))$. Für die Jacobimatrix γ der formalen Koordinatentransformation $(z, \overline{z}) \mapsto (t(z), \overline{t(z)})$ gilt $\gamma = t_z \overline{t}_{\overline{z}} - t_{\overline{z}} \overline{t}_z \neq 0$ und damit

$$\gamma \frac{\partial}{\partial \overline{t}} = t_z \partial_{\overline{z}} - t_{\overline{z}} \partial_z \quad \text{bzw.} \quad \gamma \frac{\partial}{\partial t} = \overline{t_z} \partial_z - \overline{t_{\overline{z}}} \partial_{\overline{z}}.$$

Die hyperkomplexe Version des Gaußschen Integralsatzes lautet nun:

Satz 5.1 *Sei* $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ *ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Dann gilt für jedes* $\omega \in \mathrm{C}^1(\mathrm{G}; \mathcal{A}) \cap \mathrm{C}(\overline{\mathrm{G}}; \mathcal{A})$

$$\int_{\partial \mathrm{G}} \omega dt + \int_{\mathrm{G}} \frac{\partial \omega}{\partial \overline{t}} \, dt d\overline{t} = \int_{\partial \mathrm{G}} \omega d\overline{t} - \int_{\mathrm{G}} \frac{\partial \omega}{\partial t} \, dt d\overline{t} = 0.$$

In Analogie zum komplexen Fall ergibt sich daraus eine Cauchy–Pompeiu– Formel höherer Ordnung.

Für $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq m + n$ und $0 < m^2 + n^2$ sei dazu

$$\mathrm{K}_{(m,n)}(t) := \begin{cases} (-1)^m \dfrac{(-m)!}{(n-1)!} t^{m-1} \overline{t}^{n-1} & , \quad m \leq 0 \\[2ex] (-1)^n \dfrac{(-n)!}{(m-1)!} t^{m-1} \overline{t}^{n-1} & , \quad n \leq 0 \\[2ex] \dfrac{t^{m-1} \overline{t}^{n-1}}{(m-1)!(n-1)!} \left[\log(t\overline{t}) - \displaystyle\sum_{\mu=1}^{m-1} \frac{1}{\mu} - \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu} \right] & , \quad 1 \leq m, n \end{cases}$$

und

$$\partial_{(m,n)} := \frac{\partial^m}{\partial t^m} \frac{\partial^n}{\partial \overline{t}^n} \quad \text{für} \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Damit gilt der

Satz 5.2 *Sei* $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ *ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand,* $k \in \mathbb{N}$ *und*

$$(0, 0) = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k$$

eine Kette von Bi–Indizes mit

$$|\alpha_\ell| = \ell \quad \textit{für} \quad 0 \leq \ell \leq k$$

und

$$\alpha_{\ell+1} = \alpha_\ell + \delta_\ell, \quad \textit{wobei} \quad \delta_\ell = (0,1) \quad \textit{oder} \quad \delta_\ell = (1,0), \quad 0 \le \ell \le k-1.$$

Dann hat jedes $\omega \in \mathrm{C}^k(\mathrm{G};\mathcal{A}) \cap \mathrm{C}^{k-1}(\overline{\mathrm{G}};\mathcal{A})$ *für* $z \in \mathrm{G}$ *die Darstellung*

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{G}} \mathrm{K}_{\alpha_k}\left(t(\zeta) - t(z)\right) \partial_{\alpha_k}\omega(\zeta)\, dt(\zeta) d\overline{t(\zeta)}$$
$$+ \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial\mathrm{G}} \mathrm{K}_{\alpha_{\ell+1}}\left(t(\zeta) - t(z)\right) \partial_{\alpha_\ell} i^{\delta_\ell} d\left[t(\zeta)^{\overline{\delta_\ell}}\right],$$

wobei $\overline{(1,0)} = (0,1)$ *und* $\overline{(0,1)} = (1,0)$.

Hyperkomplexe Funktionen φ, für die

$$\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial\bar{t}}\frac{\partial}{\partial t}\varphi = 0$$

in G gilt, seien im weiteren als hyperharmonisch bezeichnet.

Nun ist zwar im Hyperkomplexen die Funktion

$$\rho(t(z), t(\zeta)) = -\log\left[(t(\zeta) - t(z))\,\overline{(t(\zeta) - t(z))}\right] + h(t(z), t(\zeta)),$$

wobei die Funktion $h(t(z), t(\zeta)) \in \mathrm{C}^2(\mathrm{G};\mathcal{A}) \cap \mathrm{C}^1(\overline{\mathrm{G}};\mathcal{A})$ hyperharmonisch sein und für festes $t(z)$, $z \in \mathrm{G}$, die Randwerte

$$\log\left[(t(\zeta) - t(z))\,\overline{(t(\zeta) - t(z))}\right], \quad \zeta \in \partial\mathrm{G},$$

annehmen soll, nicht reell aber hyperreell. Deshalb ist es ersteinmal nicht sinnvoll, die Funktion ρ eine Greensche Funktion zu nennen. Allerdings gilt entsprechend der Definition von $\partial/\partial t$ und den Eigenschaften des hyperkomplexen Logarithmus für $z \neq \zeta$

$$\frac{\partial}{\partial t(\zeta)}\rho(t(z), t(\zeta)) = -\frac{1}{t(\zeta) - t(z)} + \frac{\partial}{\partial t(\zeta)} h(t(z), t(\zeta)).$$

Man kann also erwarten, dass sich zumindest zum komplexen Fall analoge Integraldarstellungen angeben lassen.

Für den hyperkomplexen Laplaceoperator der Ordnung $k \in \mathbb{N}$

$$\Delta^k = \frac{\partial^k}{\partial\bar{t}^k}\frac{\partial^k}{\partial t^k}$$

liegt es in Analogie zum Fall einer komplexen Veränderlichen nahe, die Funktion ρ_k, gegeben durch

$$\rho_k(t(z), t(\zeta)) = h_k(t(z), t(\zeta))$$
$$-\frac{1}{(k-1)!^2}\left[(t(\zeta)-t(z))\,\overline{(t(\zeta)-t(z))}\right]^{k-1}\log\left[(t(\zeta)-t(z))\,\overline{(t(\zeta)-t(z))}\right],$$

wobei $h_k(t(z), t(\zeta)) \in \mathrm{C}^k(\mathrm{G};\mathcal{A}) \cap \mathrm{C}^{k-1}(\overline{\mathrm{G}};\mathcal{A})$ mit $\Delta^k h_k = 0$ in G eine geeignete Funktion sein soll, zu betrachten. Insofern ist zu erwarten, dass die Behandlung des hyperkomplexen Falles mit zum komplexen Fall analogen Methoden auch zu analogen Integraldarstellungen führt.