# 4 Integraldarstellungen in Poly–Gebieten

## 4.1 Allgemeine Darstellung in Poly–Gebieten

In [Bege02a], [BeDa02] und [BeDz97] werden Integraldarstellungen zweiter Ordnung für Poly–Gebiete entwickelt. Darüberhinaus wurden in [BeDa02] spezielle Integraldarstellungen höherer Ordnung für Poly–Gebiete angegeben. Das Thema dieses Abschnitts ist es nun, eine allgemeine Integraldarstellung höherer Ordnung für Poly–Gebiete anzugeben, welche die zuvor genannten Darstellungen als Spezialfälle enthält.

**Satz 4.1** *Für $n \in \mathbb{N}$ und $k_j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq n$, seien*

$$(\mu^j_{m_j}, \nu^j_{m_j}), \quad 0 \leq m_j \leq k_j,$$

*Ketten von Bi–Indizes mit*

$$\begin{aligned}
&(\mu^j_0, \nu^j_0) = (0,0),\\
&\mu^j_{m_j-1} \leq \mu^j_{m_j}, \quad \nu^j_{m_j-1} \leq \nu^j_{m_j},\\
&\mu^j_{m_j-1} + \nu^j_{m_j-1} + 1 = \mu^j_{m_j} + \nu^j_{m_j}, \quad 1 \leq m_j \leq k_j,
\end{aligned} \tag{63}$$

*und $\mathrm{G}_j \subset \mathbb{C}$ beschränkte Gebiete mit glatten Rändern. Sei weiter*

$$\omega : \partial_0 \mathrm{G}^n \cup \mathrm{G}^n \to \mathbb{C}, \quad \mathrm{G}^n := \mathrm{G}_1 \times \ldots \times \mathrm{G}_n,$$

*(wobei $\partial_0 \mathrm{G}^n := \partial \mathrm{G}_1 \times \ldots \times \partial \mathrm{G}_n$ den ausgezeichneten oder auch Shilov–Rand von $\mathrm{G}^n$ bezeichnet) eine Funktion mit den Differenzierbarkeitseigenschaften*

$$\begin{aligned}
\partial_{z_1}^{\mu^1_{m_1}} \partial_{\overline{z}_1}^{\nu^1_{m_1}} \omega &= f_{m_1} \in \mathrm{L}_1(\mathrm{G}^n; \mathbb{C}), \quad 0 \leq m_1 \leq k_1; \quad \ldots \quad ;\\
\prod_{\rho=1}^{n} \partial_{z_\rho}^{\mu^\rho_{m_\rho}} \partial_{\overline{z}_\rho}^{\nu^\rho_{m_\rho}} \omega &= f_{m_1,\ldots,m_n} \in \mathrm{L}_1(\mathrm{G}^n; \mathbb{C}), \quad 0 \leq m_j \leq k_j, \qquad \textit{in } \mathrm{G}\\
&\qquad 1 \leq j \leq n, \quad 2 \leq n;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{z_1}^{\mu^1_{k_1-1}} \partial_{\overline{z}_1}^{\nu^1_{k_1-1}} \omega &= \varphi_{k_1-1} \in \mathrm{C}(\partial_0 \mathrm{G}^n; \mathbb{C}); \quad \ldots \quad ;\\
\prod_{\rho=1}^{n} \partial_{z_\rho}^{\mu^\rho_{k_\rho-1}} \partial_{\overline{z}_\rho}^{\nu^\rho_{k_\rho-1}} \omega &= \varphi_{k_1-1,\ldots,k_{n-1}-1} \in \mathrm{C}(\partial_0 \mathrm{G}^n; \mathbb{C}); \qquad \textit{auf } \partial_0 \mathrm{G}^n
\end{aligned}$$

$$\partial_{z_2}^{\mu^2_{k_2}} \partial_{\overline{z}_2}^{\nu^2_{k_2}} f_{m_1} = f_{m_1,k_2}, \quad 0 \leq m_1 \leq k_1 - 1; \quad \ldots \quad ;$$

$$\partial_{z_n}^{\mu_{k_n}^n}\partial_{\overline{z}_n}^{\nu_{k_n}^n} f_{m_1,\dots,m_{n-1}} = f_{m_1,\dots,m_{n-1},k_n}, \quad 0 \le m_j \le k_j - 1, \quad 1 \le j \le n-1.$$

*Dann hat $\omega$ in $\mathrm{G}^n$ die Darstellung*

$$\begin{aligned}
\omega(z) = & \sum_{\substack{(p_1,\dots,p_n)\in\{0,1\}^n \\ (p_1,\dots,p_n)\neq(0,\dots,0)}} (-1)^{1+\sum_{j=1}^n p_j} \prod_{j=1}^n \left(\mathrm{T}_{\mathrm{G}_j,\mu_{k_j}^j,\nu_{k_j}^j}\right)^{p_j} \prod_{j=1}^n \left(\partial_{z_j}^{\mu_{k_j}^j}\partial_{\overline{z}_j}^{\nu_{k_j}^j}\right)^{p_j} \omega(z) \\
& + \frac{1}{2^n} \prod_{j=1}^n \sum_{m_j=0}^{k_j-1} \int_{\partial_0 \mathrm{G}^n} \prod_{j=1}^n \mathrm{K}_{\mu_{m_j+1}^j,\nu_{m_j+1}^j}(z_j - \zeta_j) \prod_{j=1}^n \partial_{\zeta_j}^{\mu_{m_j}^j}\partial_{\overline{\zeta}_j}^{\nu_{m_j}^j}\omega(\zeta) \qquad (64) \\
& \times \prod_{j=1}^n d\left[(i\zeta_j)^{\nu_{m_j+1}^j - \nu_{m_j}^j}(-i\overline{\zeta}_j)^{\mu_{m_j+1}^j - \mu_{m_j}^j}\right],
\end{aligned}$$

*wobei die abkürzende Schreibweise*

$$\prod_{j=1}^n \sum_{m_j=0}^{k_j-1} := \sum_{m_1=0}^{k_1-1} \dots \sum_{m_n=0}^{k_n-1}$$

*benutzt wird.*

**Beweis**

Der Beweis wird erbracht mittels vollständiger Induktion über $n$. Für $n = 1$ fällt (64) mit der Aussage von **Satz 1.7** , S. 12, zusammen. Sei nun

$$(\mu_{m_{n+1}}^{n+1}, \nu_{m_{n+1}}^{n+1}), \quad 0 \le m_{n+1} \le k_{n+1},$$

eine weitere Kette von Bi–Indizes mit den in (63) formulierten Eigenschaften und $\omega : \partial_0 \mathrm{G}^{n+1} \cup \mathrm{G}^{n+1} \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit den Differenzierbarkeitseigenschaften

$$\begin{aligned}
\partial_{z_1}^{\mu_{m_1}^1}\partial_{\overline{z}_1}^{\nu_{m_1}^1}\omega &= f_{m_1} \in \mathrm{L}_1(\mathrm{G}^{n+1};\mathbb{C}), \quad 0 \le m_1 \le k_1; \quad \dots \quad ; \\
\prod_{\rho=1}^{n+1} \partial_{z_\rho}^{\mu_{m_\rho}^\rho}\partial_{\overline{z}_\rho}^{\nu_{m_\rho}^\rho}\omega &= f_{m_1,\dots,m_{n+1}} \in \mathrm{L}_1(\mathrm{G}^{n+1};\mathbb{C}), \quad 0 \le m_j \le k_j, \qquad \text{in } \mathrm{G}^{n+1} \\
& \qquad 1 \le j \le n+1, \quad 1 \le n;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{z_1}^{\mu_{k_1-1}^1}\partial_{\overline{z}_1}^{\nu_{k_1-1}^1}\omega &= \varphi_{k_1-1} \in \mathrm{C}(\partial_0 \mathrm{G}^{n+1};\mathbb{C}); \quad \dots \quad ; \\
\prod_{\rho=1}^{n+1} \partial_{z_\rho}^{\mu_{k_\rho-1}^\rho}\partial_{\overline{z}_\rho}^{\nu_{k_\rho-1}^\rho}\omega &= \varphi_{k_1-1,\dots,k_n-1} \in \mathrm{C}(\partial_0 \mathrm{G}^{n+1};\mathbb{C}); \qquad \text{auf } \partial_0 \mathrm{G}^{n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{z_2}^{\mu^2_{k_2}} \partial_{\overline{z}_2}^{\nu^2_{k_2}} f_{m_1} &= f_{m_1,k_2}, \quad 0 \le m_1 \le k_1 - 1; \quad \dots \quad ; \\ \partial_{z_{n+1}}^{\mu^{n+1}_{k_{n+1}}} \partial_{\overline{z}_{n+1}}^{\nu^{n+1}_{k_{n+1}}} f_{m_1,\dots,m_n} &= f_{m_1,\dots,m_n,k_{n+1}}, \quad 0 \le m_j \le k_j - 1, \quad 1 \le j \le n. \end{aligned} \tag{65}$$

Dann hat $\omega$ nach (64) in $\mathrm{G}^n \times \mathrm{G}_{n+1}$ die Darstellung

$$\begin{aligned} &\omega(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) \\ &= \sum_{\substack{(p_1,\dots,p_n)\in\{0,1\}^n \\ (p_1,\dots,p_n)\neq(0,\dots,0)}} (-1)^{1+\sum_{j=1}^n p_j} \prod_{j=1}^n \left( \mathrm{T}_{\mathrm{G}_j,\mu^j_{k_j},\nu^j_{k_j}} \right)^{p_j} \prod_{j=1}^n \left( \partial_{z_j}^{\mu^j_{k_j}} \partial_{\overline{z}_j}^{\nu^j_{k_j}} \right)^{p_j} \\ &\qquad \times \omega(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) \\ &\quad + \frac{1}{2^n} \prod_{j=1}^n \sum_{m_j=0}^{k_j-1} \int_{\partial_0 \mathrm{G}^n} \prod_{j=1}^n \mathrm{K}_{\mu^j_{m_j+1},\nu^j_{m_j+1}}(z_j - \zeta_j) \\ &\qquad \times \prod_{j=1}^n \partial_{\zeta_j}^{\mu^j_{m_j}} \partial_{\overline{\zeta}_j}^{\nu^j_{m_j}} \omega(\zeta_1, \dots, \zeta_n, z_{n+1}) \\ &\qquad \times \prod_{j=1}^n d \left[ (i\zeta_j)^{\nu^j_{m_j+1}-\nu^j_{m_j}} (-i\overline{\zeta}_j)^{\mu^j_{m_j+1}-\mu^j_{m_j}} \right]. \end{aligned} \tag{66}$$

Aufgrund von (65) existieren in $\mathrm{G}_{n+1}$ alle partiellen Ableitungen

$$\partial_{z_{n+1}}^{\mu^{n+1}_{k_{n+1}}} \partial_{\overline{z}_{n+1}}^{\nu^{n+1}_{k_{n+1}}} \prod_{j=1}^n \partial_{\zeta_j}^{\mu^j_{m_j}} \partial_{\overline{\zeta}_j}^{\nu^j_{m_j}} \omega(\zeta_1, \dots, \zeta_n, z_{n+1}),$$

also läßt sich

$$\prod_{j=1}^n \partial_{\zeta_j}^{\mu^j_{m_j}} \partial_{\overline{\zeta}_j}^{\nu^j_{m_j}} \omega(\zeta_1, \dots, \zeta_n, z_{n+1})$$

vermöge **Satz 1.7**, S. 12, in $\mathrm{G}_{n+1}$ wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} &\prod_{j=1}^n \partial_{\zeta_j}^{\mu^j_{m_j}} \partial_{\overline{\zeta}_j}^{\nu^j_{m_j}} \omega(\zeta_1, \dots, \zeta_n, z_{n+1}) \\ &\quad = \mathrm{T}_{\mathrm{G}_{n+1},\mu^{n+1}_{k_{n+1}},\nu^{n+1}_{k_{n+1}}} \partial_{z_{n+1}}^{\mu^{n+1}_{k_{n+1}}} \partial_{\overline{z}_{n+1}}^{\nu^{n+1}_{k_{n+1}}} \prod_{j=1}^n \partial_{\zeta_j}^{\mu^j_{m_j}} \partial_{\overline{\zeta}_j}^{\nu^j_{m_j}} \omega(\zeta_1, \dots, \zeta_n, z_{n+1}) \\ &\qquad + \sum_{m_{n+1}=0}^{k_{n+1}-1} \frac{1}{2} \int_{\partial \mathrm{G}_{n+1}} \mathrm{K}_{\mu^{n+1}_{m_{n+1}+1},\nu^{n+1}_{m_{n+1}+1}}(z_{n+1} - \zeta_{n+1}) \end{aligned} \tag{67}$$

$$\times\partial_{\zeta_{n+1}}^{\mu^{n+1}_{m_{n+1}}}\partial_{\overline{\zeta}_{n+1}}^{\nu^{n+1}_{m_{n+1}}}\prod_{j=1}^{n}\partial_{\zeta_j}^{\mu^j_{m_j}}\partial_{\overline{\zeta}_j}^{\nu^j_{m_j}}\omega(\zeta_1,\ldots,\zeta_n,\zeta_{n+1})$$
$$\times d\left[(i\zeta_{n+1})^{\nu^{n+1}_{m_{n+1}+1}-\nu^{n+1}_{m_{n+1}}}(-i\overline{\zeta}_{n+1})^{\mu^{n+1}_{m_{n+1}+1}-\mu^{n+1}_{m_{n+1}}}\right].$$

Einsetzen von (67) in (66) liefert

$$\begin{aligned}
&\omega(z_1,\ldots,z_n,z_{n+1})\\
&=\sum_{\substack{(p_1,\ldots,p_n)\in\{0,1\}^n\\(p_1,\ldots,p_n)\neq(0,\ldots,0)}}(-1)^{1+\sum_{j=1}^n p_j}\prod_{j=1}^{n}\left(\mathrm{T}_{\mathrm{G}_j,\mu^j_{k_j},\nu^j_{k_j}}\right)^{p_j}\prod_{j=1}^{n}\left(\partial_{z_j}^{\mu^j_{k_j}}\partial_{\overline{z}_j}^{\nu^j_{k_j}}\right)^{p_j}\\
&\qquad\times\omega(z_1,\ldots,z_n,z_{n+1})\\
&\quad+\frac{1}{2^{n+1}}\prod_{j=1}^{n+1}\sum_{m_j=0}^{k_j-1}\int_{\partial_0\mathrm{G}^{n+1}}\prod_{j=1}^{n+1}\mathrm{K}_{\mu^j_{m_j+1},\nu^j_{m_j+1}}(z_j-\zeta_j)\\
&\qquad\times\prod_{j=1}^{n+1}\partial_{\zeta_j}^{\mu^j_{m_j}}\partial_{\overline{\zeta}_j}^{\nu^j_{m_j}}\omega(\zeta_1,\ldots,\zeta_n,\zeta_{n+1})\\
&\qquad\times\prod_{j=1}^{n+1}d\left[(i\zeta_j)^{\nu^j_{m_j+1}-\nu^j_{m_j}}(-i\overline{\zeta}_j)^{\mu^j_{m_j+1}-\mu^j_{m_j}}\right]\\
&\quad+\frac{1}{2^{n}}\prod_{j=1}^{n}\sum_{m_j=0}^{k_j-1}\int_{\partial_0\mathrm{G}^{n}}\prod_{j=1}^{n}\mathrm{K}_{\mu^j_{m_j+1},\nu^j_{m_j+1}}(z_j-\zeta_j)\\
&\qquad\times\mathrm{T}_{\mathrm{G}_{n+1},\mu^{n+1}_{k_{n+1}},\nu^{n+1}_{k_{n+1}}}\partial_{z_{n+1}}^{\mu^{n+1}_{k_{n+1}}}\partial_{\overline{z}_{n+1}}^{\nu^{n+1}_{k_{n+1}}}\prod_{j=1}^{n}\partial_{\zeta_j}^{\mu^j_{m_j}}\partial_{\overline{\zeta}_j}^{\nu^j_{m_j}}\omega(\zeta_1,\ldots,\zeta_n,z_{n+1})\\
&\qquad\times\prod_{j=1}^{n}d\left[(i\zeta_j)^{\nu^j_{m_j+1}-\nu^j_{m_j}}(-i\overline{\zeta}_j)^{\mu^j_{m_j+1}-\mu^j_{m_j}}\right].
\end{aligned}$$

Mit **Definition 1.5**, S. 12, und den Bedingungen (65) gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^{n}}\prod_{j=1}^{n}\sum_{m_j=0}^{k_j-1}\int_{\partial_0\mathrm{G}^{n}}\prod_{j=1}^{n}\mathrm{K}_{\mu^j_{m_j+1},\nu^j_{m_j+1}}(z_j-\zeta_j)\\
&\qquad\times\mathrm{T}_{\mathrm{G}_{n+1},\mu^{n+1}_{k_{n+1}},\nu^{n+1}_{k_{n+1}}}\partial_{z_{n+1}}^{\mu^{n+1}_{k_{n+1}}}\partial_{\overline{z}_{n+1}}^{\nu^{n+1}_{k_{n+1}}}\prod_{j=1}^{n}\partial_{\zeta_j}^{\mu^j_{m_j}}\partial_{\overline{\zeta}_j}^{\nu^j_{m_j}}\omega(\zeta_1,\ldots,\zeta_n,z_{n+1})\\
&\qquad\times\prod_{j=1}^{n}d\left[(i\zeta_j)^{\nu^j_{m_j+1}-\nu^j_{m_j}}(-i\overline{\zeta}_j)^{\mu^j_{m_j+1}-\mu^j_{m_j}}\right]\\
&=\int_{\mathrm{G}_{n+1}}\mathrm{K}_{\mu^{n+1}_{k_{n+1}},\nu^{n+1}_{k_{n+1}}}(z_{n+1}-\zeta_{n+1})\left\{\frac{1}{2^{n}}\prod_{j=1}^{n}\sum_{m_j=0}^{k_j-1}\int_{\partial_0\mathrm{G}^{n}}\prod_{j=1}^{n}\mathrm{K}_{\mu^j_{m_j+1},\nu^j_{m_j+1}}(z_j-\zeta_j)\right.
\end{aligned}$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} \partial_{\zeta_j}^{\mu_{m_j}^j} \partial_{\overline{\zeta}_j}^{\nu_{m_j}^j} \partial_{\zeta_{n+1}}^{\mu_{k_{n+1}}^{n+1}} \partial_{\overline{\zeta}_{n+1}}^{\nu_{k_{n+1}}^{n+1}} \omega(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \zeta_{n+1})$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} d\left[ (i\zeta_j)^{\nu_{m_j+1}^j - \nu_{m_j}^j} (-i\overline{\zeta}_j)^{\mu_{m_j+1}^j - \mu_{m_j}^j} \right] \Bigg\} d\xi_{n+1} d\eta_{n+1}.$$

Unter Beachtung von (65) läßt sich

$$\partial_{\zeta_{n+1}}^{\mu_{k_{n+1}}^{n+1}} \partial_{\overline{\zeta}_{n+1}}^{\nu_{k_{n+1}}^{n+1}} \omega(z_1, \ldots, z_n, \zeta_{n+1})$$

mittels (64) in $\mathrm{G}^n$ darstellen. Damit gilt weiter

$$\int\limits_{\mathrm{G}_{n+1}} \mathrm{K}_{\mu_{k_{n+1}}^{n+1}, \nu_{k_{n+1}}^{n+1}} (z_{n+1} - \zeta_{n+1}) \left\{ \frac{1}{2^n} \prod_{j=1}^{n} \sum_{m_j=0}^{k_j-1} \int\limits_{\partial_0 \mathrm{G}^n} \prod_{j=1}^{n} \mathrm{K}_{\mu_{m_j+1}^j, \nu_{m_j+1}^j} (z_j - \zeta_j) \right.$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} \partial_{\zeta_j}^{\mu_{m_j}^j} \partial_{\overline{\zeta}_j}^{\nu_{m_j}^j} \partial_{\zeta_{n+1}}^{\mu_{k_{n+1}}^{n+1}} \partial_{\overline{\zeta}_{n+1}}^{\nu_{k_{n+1}}^{n+1}} \omega(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \zeta_{n+1})$$

$$\left. \times \prod_{j=1}^{n} d\left[ (i\zeta_j)^{\nu_{m_j+1}^j - \nu_{m_j}^j} (-i\overline{\zeta}_j)^{\mu_{m_j+1}^j - \mu_{m_j}^j} \right] \right\} d\xi_{n+1} d\eta_{n+1}$$

$$= \int\limits_{\mathrm{G}_{n+1}} \mathrm{K}_{\mu_{k_{n+1}}^{n+1}, \nu_{k_{n+1}}^{n+1}} (z_{n+1} - \zeta_{n+1}) \left\{ \partial_{\zeta_{n+1}}^{\mu_{k_{n+1}}^{n+1}} \partial_{\overline{\zeta}_{n+1}}^{\nu_{k_{n+1}}^{n+1}} \omega(z_1, \ldots, z_n, \zeta_{n+1}) \right.$$

$$- \sum_{\substack{(p_1, \ldots, p_n) \in \{0,1\}^n \\ (p_1, \ldots, p_n) \neq (0, \ldots, 0)}} (-1)^{1 + \sum_{j=1}^n p_j} \prod_{j=1}^{n} \left( \mathrm{T}_{\mathrm{G}_j, \mu_{k_j}^j, \nu_{k_j}^j} \right)^{p_j}$$

$$\left. \times \prod_{j=1}^{n} \left( \partial_{z_j}^{\mu_{k_j}^j} \partial_{\overline{z}_j}^{\nu_{k_j}^j} \right)^{p_j} \partial_{\zeta_{n+1}}^{\mu_{k_{n+1}}^{n+1}} \partial_{\overline{\zeta}_{n+1}}^{\nu_{k_{n+1}}^{n+1}} \omega(z_1, \ldots, z_n, \zeta_{n+1}) \right\} d\xi_{n+1} d\eta_{n+1}$$

$$= \int\limits_{\mathrm{G}_{n+1}} \mathrm{K}_{\mu_{k_{n+1}}^{n+1}, \nu_{k_{n+1}}^{n+1}} (z_{n+1} - \zeta_{n+1}) \partial_{\zeta_{n+1}}^{\mu_{k_{n+1}}^{n+1}} \partial_{\overline{\zeta}_{n+1}}^{\nu_{k_{n+1}}^{n+1}} \omega(z_1, \ldots, z_n, \zeta_{n+1}) d\xi_{n+1} d\eta_{n+1}$$

$$- \int\limits_{\mathrm{G}_{n+1}} \mathrm{K}_{\mu_{k_{n+1}}^{n+1}, \nu_{k_{n+1}}^{n+1}} (z_{n+1} - \zeta_{n+1}) \sum_{\substack{(p_1, \ldots, p_n) \in \{0,1\}^n \\ (p_1, \ldots, p_n) \neq (0, \ldots, 0)}} (-1)^{1 + \sum_{j=1}^n p_j}$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} \left( \mathrm{T}_{\mathrm{G}_j, \mu_{k_j}^j, \nu_{k_j}^j} \right)^{p_j} \prod_{j=1}^{n} \left( \partial_{z_j}^{\mu_{k_j}^j} \partial_{\overline{z}_j}^{\nu_{k_j}^j} \right)^{p_j} \partial_{\zeta_{n+1}}^{\mu_{k_{n+1}}^{n+1}} \partial_{\overline{\zeta}_{n+1}}^{\nu_{k_{n+1}}^{n+1}} \omega(z_1, \ldots, z_n, \zeta_{n+1})$$

$$\times d\xi_{n+1} d\eta_{n+1}$$

$$= \mathrm{T}_{\mathrm{G}_{n+1}, \mu_{k_{n+1}}^{n+1}, \nu_{k_{n+1}}^{n+1}} \partial_{z_{n+1}}^{\mu_{k_{n+1}}^{n+1}} \partial_{\overline{z}_{n+1}}^{\nu_{k_{n+1}}^{n+1}} \omega(z_1, \ldots, z_n, z_{n+1})$$

$$+ \sum_{\substack{(p_1,\dots,p_n,p_{n+1})\in\{0,1\}^{n+1}\\ (p_1,\dots,p_n)\neq(0,\dots,0)\\ p_{n+1}=1}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n} p_j}$$

$$\times \prod_{j=1}^{n+1} \left(\mathrm{T}_{\mathrm{G}_j,\mu^j_{k_j},\nu^j_{k_j}}\right)^{p_j} \prod_{j=1}^{n+1} \left(\partial_{z_j}^{\mu^j_{k_j}} \partial_{\overline{z}_j}^{\nu^j_{k_j}}\right)^{p_j} \omega(z_1,\dots,z_n,z_{n+1}).$$

Da für $p_{n+1}=1$ gilt

$$(-1)^{\sum_{j=1}^{n} p_j} = (-1)^{1+p_{n+1}+\sum_{j=1}^{n} p_j} = (-1)^{1+\sum_{j=1}^{n+1} p_j},$$

folgt die Behauptung. □

Als Anwendung von Darstellung (64) seien für $n \in \mathbb{N}$ folgende Ketten von Bi–Indizes gegeben:

$$\begin{aligned}
&(\mu_0^1,\nu_0^1)=(0,0), \quad (\mu_1^1,\nu_1^1)=(0,1), \quad (\mu_2^1,\nu_2^1)=(1,1),\\
&(\mu_0^j,\nu_0^j)=(0,0), \quad (\mu_1^j,\nu_1^j)=(1,0), \quad (\mu_2^j,\nu_2^j)=(1,1), \quad 2\le j\le n.
\end{aligned} \tag{68}$$

Ferner seien $\mathrm{G}_j \subset \mathbb{C}$, $1 \le j \le n$, beschränkte Gebiete mit glatten Rändern und

$$\omega \in \mathrm{C}^2(\mathrm{G}^n;\mathbb{C}) \cap \mathrm{C}^1(\partial_0\mathrm{G}^n \cup \mathrm{G}^n;\mathbb{C}),$$

wobei mit Letzterem eine Funktion $\omega : \partial_0\mathrm{G}^n \cup \mathrm{G}^n \to \mathbb{C}$ bezeichnet sei, derart dass

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\partial_{z_j}\right)^{p_1^j} \left(\partial_{\overline{z}_j}\right)^{p_2^j} \omega \quad \text{für jedes} \quad \left((p_1^1,p_2^1),\dots,(p_1^n,p_2^n)\right) \in \left\{\{0,1\}^2\right\}^n$$

stetig in $\mathrm{G}^n$ und

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\partial_{z_j}\right)^{p_1^j} \left(\partial_{\overline{z}_j}\right)^{p_2^j} \omega \quad \text{für jedes} \quad \left((p_1^1,p_2^1),\dots,(p_1^n,p_2^n)\right) \in \{(0,1),(1,0)\}^n$$

stetig in $\partial_0\mathrm{G}^n \cup \mathrm{G}^n$ ist. Diese Forderungen an $\omega$ zusammen mit (68) sind offenbar gleichbedeutend damit, dass $\omega$ eine Funktion mit den Differenzierbarkeitseigenschaften

$$\begin{aligned}
\partial_{z_1}^{\mu^1_{m_1}} \partial_{\overline{z}_1}^{\nu^1_{m_1}} \omega &= f_{m_1} \in \mathrm{L}_1(\mathrm{G}^n;\mathbb{C}), \quad 0 \le m_1 \le 2; \quad \dots \quad ;\\
\prod_{\rho=1}^{n} \partial_{z_\rho}^{\mu^\rho_{m_\rho}} \partial_{\overline{z}_\rho}^{\nu^\rho_{m_\rho}} \omega &= f_{m_1,\dots,m_n} \in \mathrm{L}_1(\mathrm{G}^n;\mathbb{C}), \quad 0 \le m_j \le 2, \qquad \text{in } \mathrm{G}\\
& \qquad 1 \le j \le n, \quad 2 \le n;
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{rcl}
\partial_{z_1}^{\mu^1_{k_1-1}}\partial_{\overline{z}_1}^{\nu^1_{k_1-1}}\omega & = & \varphi_{k_1-1}\in \mathrm{C}(\partial_0\mathrm{G}^n;\mathbb{C}); \quad \ldots \quad ; \\
\prod_{\rho=1}^{n}\partial_{z_\rho}^{\mu^\rho_{k_\rho-1}}\partial_{\overline{z}_\rho}^{\nu^\rho_{k_\rho-1}}\omega & = & \varphi_{k_1-1,\ldots,k_{n-1}-1}\in \mathrm{C}(\partial_0\mathrm{G}^n;\mathbb{C});
\end{array}
\qquad \text{auf } \partial_0\mathrm{G}^n
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\partial_{z_2}^{\mu^2_2}\partial_{\overline{z}_2}^{\nu^2_2} f_{m_1} & = & f_{m_1,2}, \quad 0\le m_1\le 1; \quad \ldots \quad ; \\
\partial_{z_n}^{\mu^n_2}\partial_{\overline{z}_n}^{\nu^n_2} f_{m_1,\ldots,m_{n-1}} & = & f_{m_1,\ldots,m_{n-1},2}, \quad 0\le m_j\le 1, \quad 1\le j\le n-1
\end{array}
$$

ist. Damit genügt $\omega$ den Voraussetzungen von **Satz 4.1** und ist also wie folgt darstellbar:

$$
\begin{aligned}
\omega(z) = & \sum_{\substack{(p_1,\ldots,p_n)\in\{0,1\}^n\\(p_1,\ldots,p_n)\neq(0,\ldots,0)}} (-1)^{1+\sum_{j=1}^n p_j}\prod_{j=1}^{n}\left(\mathrm{T}_{\mathrm{G}_j,1,1}\right)^{p_j}\prod_{j=1}^{n}\left(\partial_{z_j}\partial_{\overline{z}_j}\right)^{p_j}\omega(z)\\
& +\frac{1}{2^n}\prod_{\tau=1}^{n}\sum_{m_\tau=0}^{1}\int_{\partial_0\mathrm{G}^n}\prod_{j=1}^{n}\mathrm{K}_{\mu^j_{m_j+1},\nu^j_{m_j+1}}(z_j-\zeta_j)\prod_{j=1}^{n}\partial_{\zeta_j}^{\mu^j_{m_j}}\partial_{\overline{\zeta}_j}^{\nu^j_{m_j}}\omega(\zeta)\\
& \qquad\times\prod_{j=1}^{n}d\left[(i\zeta_j)^{\nu^j_{m_j+1}-\nu^j_{m_j}}(-i\overline{\zeta}_j)^{\mu^j_{m_j+1}-\mu^j_{m_j}}\right].
\end{aligned}
$$

Dies kann in eine explizitere Form gebracht werden. Mit einer einfachen Induktion ist zunächst

$$
\begin{aligned}
& \sum_{\substack{(p_1,\ldots,p_n)\in\{0,1\}^n\\(p_1,\ldots,p_n)\neq(0,\ldots,0)}} (-1)^{1+\sum_{j=1}^n p_j}\prod_{j=1}^{n}\left(\mathrm{T}_{\mathrm{G}_j,1,1}\right)^{p_j}\prod_{j=1}^{n}\left(\partial_{z_j}\partial_{\overline{z}_j}\right)^{p_j}\omega(z)\\
& \quad =\sum_{\tau=1}^{n}(-1)^{\tau+1}\sum_{1\le\nu_1<\ldots<\nu_\tau\le n}\frac{1}{\pi^\tau}\int_{\mathrm{G}_{\nu_1}}\cdots\int_{\mathrm{G}_{\nu_\tau}}\omega_{\zeta_{\nu_1}\overline{\zeta}_{\nu_1}\ldots\zeta_{\nu_\tau}\overline{\zeta}_{\nu_\tau}}(\zeta)\\
& \qquad\qquad\times\prod_{\rho=1}^{\tau}\log|\zeta_{\nu_\rho}-z_{\nu_\rho}|^2\prod_{\rho=1}^{\tau}d\xi_{\nu_\rho}d\eta_{\nu_\rho},
\end{aligned}
\tag{69}
$$

wobei im letzten Ausdruck diejenigen $\zeta_{\nu_j}$'s, über die nicht integriert wird, als $z_{\nu_j}$'s verstanden werden sollen. Darüberhinaus gilt mit

**Definition 4.1** *Für*

$$
(p_1,\ldots,p_n)\in\{0,1\}^n,\ \zeta=(\zeta_1,\ldots\zeta_n)\in\mathbb{C}^n \ \textit{und}\ z=(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n
$$

*sei*

$$
\mathrm{D}^{(p_1,\ldots,p_n)} := \frac{\partial^{\sum_{j=1}^n p_j}}{\partial\overline{\zeta}_1^{p_1}\partial\zeta_2^{p_2}\ldots\partial\zeta_n^{p_n}}
$$

$$\begin{aligned}
k(z_1,p_1) &:= \begin{cases} z_1^{-1}, & p_1=0,\\ \log|z_1|^2, & p_1=1,\end{cases}\\
k(z_j,p_j) &:= \begin{cases} \overline{z}_j^{-1}, & p_j=0,\\ \log|z_j|^2, & p_j=1,\end{cases} \qquad 2\le j\le n,\\
d(\zeta_1^{p_1}) &:= \begin{cases} d\zeta_1, & p_1=0,\\ d\overline{\zeta}_1, & p_1=1,\end{cases}, \quad d(\zeta_j^{p_j}) := \begin{cases} d\overline{\zeta}_j, & p_j=0,\\ d\zeta_j, & p_j=1,\end{cases} \qquad 2\le j\le n.
\end{aligned}$$

und unter Beachtung von

$$\begin{aligned}
\pi \mathrm{K}_{\mu^1_{m_1+1},\nu^1_{m_1+1}}(z_1-\zeta_1) &= \begin{cases} (z_1-\zeta_1)^{-1}, & m_1=0,\\ \log|z_1-\zeta_1|^2, & m_1=1,\end{cases},\\
\pi \mathrm{K}_{\mu^j_{m_j+1},\nu^j_{m_j+1}}(z_j-\zeta_j) &= \begin{cases} (\overline{z_j-\zeta_j})^{-1}, & m_j=0,\\ \log|z_j-\zeta_j|^2, & m_j=1,\end{cases}, \quad 2\le j\le n,
\end{aligned}$$

wobei der Kern

$$\mathrm{K}_{\mu^j_{m_j+1},\nu^j_{m_j+1}}(z_j-\zeta_j)$$

für $j=1$ im Falle $m_1=0$ mit $d\zeta_1$ und im Falle $m_1=1$ mit $d\overline{\zeta}_1$ und für $j\ge 2$ im Falle $m_j=0$ mit $d\overline{\zeta}_j$ und im Falle $m_j=1$ mit $d\zeta_j$ korrespondiert, sowie der Tatsache, dass jede Summe aus

$$\prod_{\tau=1}^{n}\sum_{m_\tau=0}^{1}$$

genau zwei Summanden hat, die Anzahl der Summanden insgesamt also mit der von

$$\sum_{(p_1,\dots,p_n)\in\{0,1\}^n}$$

übereinstimmt, dass

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^n}\prod_{\tau=1}^{n}\sum_{m_\tau=0}^{1}\int_{\partial_0 \mathrm{G}^n}\prod_{j=1}^{n}\mathrm{K}_{\mu^j_{m_j+1},\nu^j_{m_j+1}}(z_j-\zeta_j)\prod_{j=1}^{n}\partial_{\zeta_j}^{\mu^j_{m_j}}\partial_{\overline{\zeta}_j}^{\nu^j_{m_j}}\omega(\zeta)\\
&\qquad\qquad\qquad\times\prod_{j=1}^{n} d\left[(i\zeta_j)^{\nu^j_{m_j+1}-\nu^j_{m_j}}(-i\overline{\zeta}_j)^{\mu^j_{m_j+1}-\mu^j_{m_j}}\right]\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{(2\pi i)^n}\int_{\partial_0 \mathrm{G}^n}\sum_{(p_1,\dots,p_n)\in\{0,1\}^n}\left(\mathrm{D}^{(p_1,\dots,p_n)}\omega(\zeta)\right)\prod_{j=1}^{n}k(\zeta_j-z_j,p_j)\prod_{j=1}^{n}d(\zeta_j^{p_j}).
\end{aligned}$$

In Verbindung mit (69) gilt also der

**Satz 4.2** *Seien* $\mathrm{G}_j \subset \mathbb{C}$, $1 \le j \le n$, *beschränkte Gebiete mit glatten Rändern. Dann hat jedes* $\omega \in \mathrm{C}^2(\mathrm{G}^n;\mathbb{C}) \cap \mathrm{C}^1(\partial_0\mathrm{G}^n \cup \mathrm{G}^n;\mathbb{C})$ *für* $z \in \mathrm{G}^n$ *die Darstellung*

$$\omega(z) = \sum_{\tau=1}^{n}(-1)^{\tau+1} \sum_{1\le\nu_1<\ldots<\nu_\tau\le n} \frac{1}{\pi^\tau} \int\limits_{\mathrm{G}_{\nu_1}} \cdots \int\limits_{\mathrm{G}_{\nu_\tau}} \omega_{\zeta_{\nu_1}\overline{\zeta}_{\nu_1}\ldots\zeta_{\nu_\tau}\overline{\zeta}_{\nu_\tau}}(\zeta)$$
$$\times \prod_{\rho=1}^{\tau} \log|\zeta_{\nu_\rho} - z_{\nu_\rho}|^2 \prod_{\rho=1}^{\tau} d\xi_{\nu_\rho} d\eta_{\nu_\rho}$$
$$+\frac{(-1)^{n+1}}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial_0\mathrm{G}^n} \sum_{(p_1,\ldots,p_n)\in\{0,1\}^n} \left(\mathrm{D}^{(p_1,\ldots,p_n)}\omega(\zeta)\right) \prod_{j=1}^{n} k(\zeta_j - z_j, p_j) \prod_{j=1}^{n} d(\zeta_j^{p_j}).$$

**Bemerkung**
Der Darstellung aus **Satz 4.2** entspricht eine $(n-1)$–malige Iteration von

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathrm{G}} \omega(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathrm{G}} \log|\zeta - z|^2 \omega_{\overline{\zeta}}(\zeta)d\overline{\zeta}$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}} \log|\zeta - z|^2 \omega_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)d\xi d\eta$$

mit

$$\omega(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathrm{G}} \omega(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta - z}} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathrm{G}} \log|\zeta - z|^2 \omega_{\zeta}(\zeta)d\zeta$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}} \log|\zeta - z|^2 \omega_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)d\xi d\eta$$

in $\mathrm{G}^n$ (vgl. [BeDa02]).

## 4.2 Darstellungen in Poly–Gebieten mit Greenschen Funktionen höherer Ordnung

Um den **Satz 1.9**, S. 15, zu verallgemeinern, ist es sinnvoll, folgenden Operator zu definieren.

**Definition 4.2** *Sei* $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ *ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und Greenscher Funktion* $g_k$ *der Ordnung* $k \in \mathbb{N}$. *Dann sei für* $m, n \in \mathbb{N}$ *mit* $m + n = k$, $\omega \in \mathrm{L}_1(\mathrm{G};\mathbb{C})$ *und* $z \in \mathrm{G}$

$$\widetilde{\mathrm{T}}^{[k]}_{\mathrm{G},m,n}\omega(z) := \frac{(-1)^k}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}} \omega(\zeta)\partial_z^m\partial_{\overline{z}}^n\partial_\zeta^n\partial_{\overline{\zeta}}^m g_k(z,\zeta)d\xi d\eta.$$

Damit lautet die angesprochene Verallgemeinerung wie folgt:

**Satz 4.3** *Seien* $\mathrm{G}_j \subset \mathbb{C}$, $1 \leq j \leq n$, *beschränkte Gebiete mit glatten Rändern und Greenschen Funktionen* $g_{k_j}$ *höherer Ordnung,* $k_j \in \mathbb{N}$. *Ferner seien*

$$(\mu^j_{m_j}, \nu^j_{m_j}), \quad 0 \leq m_j \leq k_j,$$

*Ketten von Bi–Indizes mit den in* (63), S. 78, *formulierten Eigenschaften. Dann hat jede Funktion* $\omega : \partial_0 \mathrm{G}^n \cup \mathrm{G}^n \to \mathbb{C}$ *mit den Differenzierbarkeitseigenschaften*

$$\begin{aligned}
\partial_{z_1}^{\mu^1_{m_1}} \partial_{\overline{z}_1}^{\nu^1_{m_1}} \omega &= f_{m_1} \in \mathrm{L}_1(\mathrm{G}^n;\mathbb{C}), \quad 0 \leq m_1 \leq k_1; \quad \ldots \quad ; \\
\prod_{\rho=1}^{n} \partial_{z_\rho}^{\mu^\rho_{m_\rho}} \partial_{\overline{z}_\rho}^{\nu^\rho_{m_\rho}} \omega &= f_{m_1,\ldots,m_n} \in \mathrm{L}_1(\mathrm{G}^n;\mathbb{C}), \quad 0 \leq m_j \leq k_j, \qquad \textit{in } \mathrm{G}^n \\
& \qquad 1 \leq j \leq n, \quad 2 \leq n;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{z_1}^{\mu^1_{k_1-1}} \partial_{\overline{z}_1}^{\nu^1_{k_1-1}} \omega &= \varphi_{k_1-1} \in \mathrm{C}(\partial_0 \mathrm{G}^n;\mathbb{C}); \quad \ldots \quad ; \\
\prod_{\rho=1}^{n} \partial_{z_\rho}^{\mu^\rho_{k_\rho-1}} \partial_{\overline{z}_\rho}^{\nu^\rho_{k_\rho-1}} \omega &= \varphi_{k_1-1,\ldots,k_{n-1}-1} \in \mathrm{C}(\partial_0 \mathrm{G}^n;\mathbb{C}); \qquad \textit{auf } \partial_0 \mathrm{G}^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{z_2}^{\mu^2_{k_2}} \partial_{\overline{z}_2}^{\nu^2_{k_2}} f_{m_1} &= f_{m_1,k_2}, \quad 0 \leq m_1 \leq k_1 - 1; \quad \ldots \quad ; \\
\partial_{z_n}^{\mu^n_{k_n}} \partial_{\overline{z}_n}^{\nu^n_{k_n}} f_{m_1,\ldots,m_{n-1}} &= f_{m_1,\ldots,m_{n-1},k_n}, \quad 0 \leq m_j \leq k_j - 1, \quad 1 \leq j \leq n-1;
\end{aligned}$$

*für* $z \in \mathrm{G}^n$ *die Darstellung*

$$\begin{aligned}
\omega(z) = &\sum_{\substack{(p_1,\ldots,p_n)\in\{0,1\}^n \\ (p_1,\ldots,p_n)\neq(0,\ldots,0)}} (-1)^{1+\sum_{j=1}^n p_j} \prod_{j=1}^{n} \left( \widetilde{\mathrm{T}}^{[k_j]}_{\mathrm{G}_j, m_j, n_j} \right)^{p_j} \omega(z) \\
&+ \left( \frac{-1}{\pi} \right)^n \int\limits_{\mathrm{G}^n} \prod_{j=1}^{n} \partial_{z_j}^{\nu^j_{k_j}} \partial_{\overline{z}_j}^{\mu^j_{k_j}} g_{k_j}(z_j,\zeta_j) \prod_{j=1}^{n} \partial_{\zeta_j}^{\mu^j_{k_j}} \partial_{\overline{\zeta}_j}^{\nu^j_{k_j}} \omega(\zeta) \prod_{j=1}^{n} d\xi_j d\eta_j.
\end{aligned}$$

**Beweis**
Direkte Folgerung aus **Satz 4.1** durch komponentenweise Auswertung mit der Aussage von **Satz 3.7** oder Iteration dieser Aussage analog zum Beweis von **Satz 4.1**. □

## 4.3 Darstellungen in Poly–Gebieten mit Bergmanschen Kernen höherer Ordnung

Als direkte Konsequenz aus **Satz 4.3** ergibt sich die entsprechende Aussage mit Bergmanschen Kernen höherer Ordnung.

**Satz 4.4** *Seien* $\mathrm{G}_j \subset \mathbb{C}$, $1 \leq j \leq n$, *beschränkte Gebiete mit glatten Rändern und Greenschen Funktionen* $g_{k_j}$ *höherer Ordnung,* $k_j \in \mathbb{N}$. *Ferner seien*

$$(\mu^j_{m_j}, \nu^j_{m_j}) = (0, m_j), \quad 0 \leq m_j \leq k_j,$$

*Ketten von Bi–Indizes. Dann hat jede Funktion* $\omega : \partial_0\mathrm{G}^n \cup \mathrm{G}^n \to \mathbb{C}$ *mit den Differenzierbarkeitseigenschaften*

$$\begin{aligned} \partial_{\overline{z}_1}^{\nu^1_{m_1}}\omega &= f_{m_1} \in \mathrm{L}_1(\mathrm{G}^n;\mathbb{C}), \quad 0 \leq m_1 \leq k_1; \quad \ldots \quad ; \\ \prod_{\rho=1}^{n} \partial_{\overline{z}_\rho}^{\nu^\rho_{m_\rho}}\omega &= f_{m_1,\ldots,m_n} \in \mathrm{L}_1(\mathrm{G}^n;\mathbb{C}), \quad 0 \leq m_j \leq k_j, \qquad \textit{in } \mathrm{G}^n \\ & \qquad 1 \leq j \leq n, \quad 2 \leq n; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\overline{z}_1}^{\nu^1_{k_1-1}}\omega &= \varphi_{k_1-1} \in \mathrm{C}(\partial_0\mathrm{G}^n;\mathbb{C}); \quad \ldots \quad ; \\ \prod_{\rho=1}^{n} \partial_{\overline{z}_\rho}^{\nu^\rho_{k_\rho-1}}\omega &= \varphi_{k_1-1,\ldots,k_{n-1}-1} \in \mathrm{C}(\partial_0\mathrm{G}^n;\mathbb{C}); \qquad \textit{auf } \partial_0\mathrm{G}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\overline{z}_2}^{\nu^2_{k_2}} f_{m_1} &= f_{m_1,k_2}, \quad 0 \leq m_1 \leq k_1 - 1; \quad \ldots \quad ; \\ \partial_{\overline{z}_n}^{\nu^n_{k_n}} f_{m_1,\ldots,m_{n-1}} &= f_{m_1,\ldots,m_{n-1},k_n}, \quad 0 \leq m_j \leq k_j - 1, \quad 1 \leq j \leq n-1; \end{aligned}$$

*für* $z \in \mathrm{G}^n$ *die Darstellung*

$$\begin{aligned} \omega(z) = \sum_{\tau=1}^{n} (-1)^{\tau+1} \sum_{1 \leq \rho_1 < \ldots < \rho_\tau \leq n} \int_{\mathrm{G}_{\rho_1}} \cdots \int_{\mathrm{G}_{\rho_\tau}} \omega(\zeta) \prod_{\kappa=1}^{\tau} \mathrm{K}_{k_{\rho_\kappa}}(z_{\rho_\kappa}, \overline{\zeta}_{\rho_\kappa}) \prod_{\kappa=1}^{\tau} d\xi_{\rho_\kappa} d\eta_{\rho_\kappa} \\ + \left(\frac{-1}{\pi}\right)^n \int_{\mathrm{G}^n} \prod_{j=1}^{n} \partial_{z_j}^{k_j} g_{k_j}(z_j, \zeta_j) \prod_{j=1}^{n} \partial_{\overline{\zeta}_j}^{\nu^j_{k_j}} \omega(\zeta) \prod_{j=1}^{n} d\xi_j d\eta_j, \end{aligned}$$

*wobei wieder diejenigen* $\zeta_j$*'s, über die nicht integriert wird, als* $z_j$*'s verstanden werden sollen.*

## 4.4 Darstellungen in Poly–Zylindern mit Bergmanschen Kernen höherer Ordnung

Der **Satz 4.4** für das spezielle Poly–Gebiet $\mathbb{D}^n = \mathbb{D}_1 \times \cdots \times \mathbb{D}_n$, $n \in \mathbb{N}$, lautet

**Satz 4.5** *Für die Ketten von Bi–Indizes*

$$(\mu^j_{m_j}, \nu^j_{m_j}) = (0, m_j), \quad 0 \le m_j \le k_j, \quad 1 \le j \le n,$$

*sei* $\omega : \partial_0 \mathbb{D}^n \cup \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ *eine Funktion mit den Differenzierbarkeitseigenschaften*

$$\begin{aligned} \partial_{\overline{z}_1}^{\nu^1_{m_1}} \omega &= f_{m_1} \in \mathrm{L}_1(\mathbb{D}^n; \mathbb{C}), \quad 0 \le m_1 \le k_1; \quad \ldots \quad ; \\ \prod_{\rho=1}^{n} \partial_{\overline{z}_\rho}^{\nu^\rho_{m_\rho}} \omega &= f_{m_1,\ldots,m_n} \in \mathrm{L}_1(\mathbb{D}^n; \mathbb{C}), \quad 0 \le m_j \le k_j, \qquad \text{in } \mathbb{D}^n \\ & \qquad 1 \le j \le n, \quad 2 \le n; \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \partial_{\overline{z}_1}^{\nu^1_{k_1-1}} \omega &= \varphi_{k_1-1} \in \mathrm{C}(\partial_0 \mathbb{D}^n; \mathbb{C}); \quad \ldots \quad ; \\ \prod_{\rho=1}^{n} \partial_{\overline{z}_\rho}^{\nu^\rho_{k_\rho-1}} \omega &= \varphi_{k_1-1,\ldots,k_{n-1}-1} \in \mathrm{C}(\partial_0 \mathbb{D}^n; \mathbb{C}); \end{aligned}\right\} \quad \text{auf } \partial_0 \mathbb{D}^n$$

$$\begin{aligned} \partial_{\overline{z}_2}^{\nu^2_{k_2}} f_{m_1} &= f_{m_1,k_2}, \quad 0 \le m_1 \le k_1 - 1; \quad \ldots \quad ; \\ \partial_{\overline{z}_n}^{\nu^n_{k_n}} f_{m_1,\ldots,m_{n-1}} &= f_{m_1,\ldots,m_{n-1},k_n}, \quad 0 \le m_j \le k_j - 1, \quad 1 \le j \le n-1. \end{aligned}$$

*Dann hat* $\omega$ *für* $z \in \mathbb{D}^n$ *die Darstellung*

$$\begin{aligned} \omega(z) = \sum_{\tau=1}^{n} (-1)^{\tau+1} \frac{1}{\pi^\tau} \sum_{1 \le \rho_1 < \ldots < \rho_\tau \le n} \int_{\mathbb{D}_{\rho_1}} \cdots \int_{\mathbb{D}_{\rho_\tau}} \omega(\zeta) \\ \times \prod_{\kappa=1}^{\tau} \Bigg( \frac{k_{\rho_\kappa}}{(1 - z_{\rho_\kappa} \overline{\zeta}_{\rho_\kappa})^2} \sum_{\mu=1}^{k_{\rho_\kappa}} (-1)^{\mu-1} \binom{k_{\rho_\kappa}}{\mu} \binom{k_{\rho_\kappa} - 1}{\mu - 1} |z_{\rho_\kappa} - \zeta_{\rho_\kappa}|^{2(\mu-1)} \\ \times \left(1 - |\zeta_{\rho_\kappa}|^2\right)^{k_{\rho_\kappa} - \mu} \left(1 - |z_{\rho_\kappa}|^2\right)^{k_{\rho_\kappa} - \mu} \Bigg) \prod_{\kappa=1}^{\tau} d\xi_{\rho_\kappa} d\eta_{\rho_\kappa} \\ + \left(\frac{-1}{\pi}\right)^n \int_{\mathbb{D}^n} \left( \prod_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{k_j-1}}{(k_j-1)!} \left(\frac{1 - |\zeta_j|^2}{1 - z_j \overline{\zeta}_j}\right)^{k_j} \frac{\left(\overline{\zeta_j - z_j}\right)^{k_j - 1}}{\zeta_j - z_j} \right) \\ \times \left( \prod_{j=1}^{n} \partial_{\overline{\zeta}_j}^{\nu^j_{k_j}} \right) \omega(\zeta) \prod_{j=1}^{n} d\xi_j d\eta_j. \end{aligned}$$

## 4.5 Orthogonale Zerlegungen in Poly–Gebieten

Um zum Fall eines einzelnen Gebietes analoge Zerlegungen in Poly–Gebieten anzugeben, sind zunächst die entsprechenden Hilberträume einzuführen.

Seien dazu $k_j \in \mathbb{N}$, $\mathrm{G}_j \subset \mathbb{C}$, $1 \leq j \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, beschränkte Gebiete mit glatten Rändern und $\omega : \partial_0 \mathrm{G}^n \cup \mathrm{G}^n \to \mathbb{C}$ mit

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\partial_{\overline{z}_j}^{k_j}\right)^{p^j} \omega \quad \text{stetig in} \quad \mathrm{G}^n \quad \text{für alle} \quad (p^1, \ldots, p^n) \in \{0,1\}^n$$

und (70)

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\partial_{\overline{z}_j}^{k_j - 1}\right)^{p^j} \omega \quad \text{stetig in} \quad \partial_0 \mathrm{G}^n \cup \mathrm{G}^n \quad \text{für alle} \quad (p^1, \ldots, p^n) \in \{0,1\}^n$$

gegeben. Damit läßt sich der passende Hilbertraum definieren.

**Definition 4.3** *Für* $k_j \in \mathbb{N}$ *und* $\mathrm{G}_j \subset \mathbb{C}$, $1 \leq j \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, *beschränkte Gebiete mit glatten Rändern sei*

$$\mathrm{C}^{k_1,\ldots,k_n}(\mathrm{G}^n;\mathbb{C}) := \{f : \partial_0 \mathrm{G}^n \cup \mathrm{G}^n \to \mathbb{C} \mid f \ \textit{genügt}\ (70)\}\,.$$

Es ist klar, dass $\mathrm{C}^{k_1,\ldots,k_n}(\mathrm{G}^n;\mathbb{C}) \subset \mathrm{L}_2(\mathrm{G}^n;\mathbb{C})$ ein Hilbertraum ist. Mit

**Definition 4.4** *Für* $k_j \in \mathbb{N}$ *und* $\mathrm{G}_j \subset \mathbb{C}$, $1 \leq j \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, *beschränkte Gebiete mit glatten Rändern sei*

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{(k_1,\ldots,k_n;2)}(\mathrm{G}^n;\mathbb{C}) &:= \left\{f \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G}^n;\mathbb{C}) \mid \partial_{\overline{z}_1}^{k_1} \ldots \partial_{\overline{z}_n}^{k_n} f = 0 \ \textit{in}\ \mathrm{G}^n\right\}, \\
\mathcal{AO}_{(k_1,\ldots,k_n;2)}(\mathrm{G}^n;\mathbb{C}) &:= \left\{f \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G}^n;\mathbb{C}) \mid \partial_{z_1}^{k_1} \ldots \partial_{z_n}^{k_n} f = 0 \ \textit{in}\ \mathrm{G}^n\right\}, \\
\mathcal{O}^{\perp}_{(k_1,\ldots,k_n;2)}(\mathrm{G}^n;\mathbb{C}) &:= \left\{\varphi \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G}^n;\mathbb{C}) \mid \langle \varphi, f\rangle = 0\,\forall\, f \in \mathcal{O}_{(k_1,\ldots,k_n;2)}(\mathrm{G}^n;\mathbb{C})\right\}, \\
\mathcal{AO}^{\perp}_{(k_1,\ldots,k_n;2)}(\mathrm{G}^n;\mathbb{C}) &:= \{\varphi \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G}^n;\mathbb{C}) \mid \langle \varphi, f\rangle = 0 \\
&\qquad\qquad \forall\, f \in \mathcal{AO}_{(k_1,\ldots,k_n;2)}(\mathrm{G}^n;\mathbb{C})\}\,,
\end{aligned}$$

wobei Funktionen $f \in \mathcal{O}_{(k_1,\ldots,k_n;2)}(\mathrm{G}^n;\mathbb{C})$ polyplurianalytisch und entsprechend Funktionen $f \in \mathcal{AO}_{(k_1,\ldots,k_n;2)}(\mathrm{G}^n;\mathbb{C})$ polypluriantianalytisch heißen, gilt dann die folgende Aussage über Zerlegungen von $\mathrm{C}^{k_1,\ldots,k_n}(\mathrm{G}^n;\mathbb{C})$ in den Raum der in $\mathrm{G}^n$ polyplurianalytischen Funktionen und dessen orthogonalem Komplement.

**Satz 4.6** *Seien* $k_j \in \mathbb{N}$ *und* $\mathrm{G}_j \subset \mathbb{C}$, $1 \le j \le n$, $n \in \mathbb{N}$, *beschränkte Gebiete mit glatten Rändern und Greenschen Funktionen höherer Ordnung* $g_{k_j}$. *Dann hat jedes* $\omega \in \mathrm{C}^{k_1,\dots,k_n}(\mathrm{G}^n;\mathbb{C})$ *in* $\mathrm{G}^n$ *die Darstellung* $\omega = \phi + \psi$, *wobei* $\phi \in \mathcal{O}_{(k_1,\dots,k_n;2)}(\mathrm{G}^n;\mathbb{C})$ *und* $\psi \in \mathcal{O}^{\perp}_{(k_1,\dots,k_n;2)}(\mathrm{G}^n;\mathbb{C})$.

**Beweis**
Offenbar erfüllt $\omega$ die Voraussetzungen von **Satz 4.4** und ist also wie folgt in $\mathrm{G}^n$ darstellbar

$$\begin{aligned}\omega(z) = \sum_{\tau=1}^{n}(-1)^{\tau+1} \sum_{1\le\rho_1<\ldots<\rho_\tau\le n} \int_{\mathrm{G}_{\rho_1}} \cdots \int_{\mathrm{G}_{\rho_\tau}} \omega(\zeta) \prod_{\kappa=1}^{\tau} \mathrm{K}_{k_{\rho_\kappa}}(z_{\rho_\kappa}, \overline{\zeta}_{\rho_\kappa}) \prod_{\kappa=1}^{\tau} d\xi_{\rho_\kappa} d\eta_{\rho_\kappa} \\ + \left(\frac{-1}{\pi}\right)^n \int_{\mathrm{G}^n} \prod_{j=1}^{n} \partial_{z_j}^{k_j} g_{k_j}(z_j,\zeta_j) \prod_{j=1}^{n} \partial_{\overline{\zeta}_j}^{\nu^j_{k_j}} \omega(\zeta) \prod_{j=1}^{n} d\xi_j d\eta_j,\end{aligned} \tag{71}$$

wobei

$$(\mu^j_{m_j}, \nu^j_{m_j}) = (0, m_j), \quad 0 \le m_j \le k_j,$$

wieder die zugrunde liegenden Ketten von Bi–Indizes sind. Der erste Term von (71) ist aus $\mathcal{O}_{(k_1,\dots,k_n;2)}(\mathrm{G}^n;\mathbb{C})$. Denn für jeden Summanden ist das entsprechende iterierte Integral wegen der Eigenschaften der Bergmanschen Kerne höherer Ordnung $\mathrm{K}_{k_{\rho_\kappa}}(z_{\rho_\kappa}, \overline{\zeta}_{\rho_\kappa})$ beschränkt (siehe den Beweis von **Satz 3.4**, S. 44ff). Mit $\tau$–maliger Anwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz folgt

$$\begin{aligned}&\partial_{\overline{z}_1}^{k_1} \ldots \partial_{\overline{z}_j}^{k_j} \int_{\mathrm{G}_{\rho_1}} \cdots \int_{\mathrm{G}_{\rho_\tau}} \omega(\zeta) \prod_{\kappa=1}^{\tau} \mathrm{K}_{k_{\rho_\kappa}}(z_{\rho_\kappa}, \overline{\zeta}_{\rho_\kappa}) \prod_{\kappa=1}^{\tau} d\xi_{\rho_\kappa} d\eta_{\rho_\kappa} \\ &\qquad = \int_{\mathrm{G}_{\rho_1}} \cdots \int_{\mathrm{G}_{\rho_\tau}} \omega(\zeta) \partial_{\overline{z}_1}^{k_1} \ldots \partial_{\overline{z}_j}^{k_j} \prod_{\kappa=1}^{\tau} \mathrm{K}_{k_{\rho_\kappa}}(z_{\rho_\kappa}, \overline{\zeta}_{\rho_\kappa}) \prod_{\kappa=1}^{\tau} d\xi_{\rho_\kappa} d\eta_{\rho_\kappa}.\end{aligned}$$

Da $1 \le \tau \le n$, folgt weiter

$$\partial_{\overline{z}_1}^{k_1} \ldots \partial_{\overline{z}_j}^{k_j} \prod_{\kappa=1}^{\tau} \mathrm{K}_{k_{\rho_\kappa}}(z_{\rho_\kappa}, \overline{\zeta}_{\rho_\kappa}) = 0.$$

Der zweite Term von (71) ist aus $\mathcal{O}^{\perp}_{(k_1,\dots,k_n;2)}(\mathrm{G}^n;\mathbb{C})$. Dazu ist in Analogie zum Beweis von **Satz 3.4** zu zeigen:

$$\int_{\mathrm{G}^n} \left[\prod_{j=1}^{n} \partial_{z_j}^{k_j} g_{k_j}(z_j,\zeta_j)\right] \overline{f(z)} \prod_{j=1}^{n} dx_j dy_j = 0 \quad \text{für alle} \quad f \in \mathcal{O}_{(k_1,\dots,k_n;2)}(\mathrm{G}^n;\mathbb{C}),$$

wobei $z_j = x_j + iy_j$, $1 \le j \le n$.

Sei nun $f \in \mathcal{O}_{(k_1,\ldots,k_n;2)}(\mathrm{G}^n;\mathbb{C})$ beliebig vorgelegt. Eine Anwendung von **Lemma 3.1**, S. 44, zeigt

$$\int_{\mathrm{G}^n} \left[\prod_{j=1}^{n} \partial_{z_j}^{k_j} g_{k_j}(z_j,\zeta_j)\right] \overline{f(z)} \prod_{j=1}^{n} dx_j dy_j$$
$$= (-1)^{k_1} \int_{\mathrm{G}^n} g_{k_1}(z_1,\zeta_1) \left[\prod_{j=2}^{n} \partial_{z_j}^{k_j} g_{k_j}(z_j,\zeta_j)\right] \overline{\partial_{\overline{z}_1}^{k_1} f(z)} \prod_{j=1}^{n} dx_j dy_j .$$

Dieses Verfahren sukzessive angewandt auf die verbliebenen $(n-1)$ Komponenten führt zu

$$\int_{\mathrm{G}^n} \left[\prod_{j=1}^{n} \partial_{z_j}^{k_j} g_{k_j}(z_j,\zeta_j)\right] \overline{f(z)} \prod_{j=1}^{n} dx_j dy_j$$
$$= (-1)^{\sum_{j=1}^{n} k_j} \int_{\mathrm{G}^n} \prod_{j=1}^{n} g_{k_j}(z_j,\zeta_j) \overline{\prod_{j=1}^{n} \partial_{\overline{z}_j}^{k_j} f(z)} \prod_{j=1}^{n} dx_j dy_j = 0,$$

nach Voraussetzung an $f$. □

Die Zerlegung des $\mathrm{C}^{k_1,\ldots,k_n}(\mathrm{G}^n;\mathbb{C})$ in den Raum der polypluriantianalytischen Funktionen und dessen orthogonalem Komplements ist ein Spezialfall der allgemeinsten orthogonalen Zerlegung, die jetzt angegeben werden soll. Dazu wird zunächst folgendes benötigt:

**Definition 4.5** *Für $n_j, m_j, k_j \in \mathbb{N}$ mit $n_j + m_j = k_j$ und $\mathrm{G}_j \subset \mathbb{C}$, $1 \le j \le \ell$, $\ell \in \mathbb{N}$, beschränkte Gebiete mit glatten Rändern sei*

$$\mathcal{O}_{((n_1,m_1),\ldots,(n_\ell,m_\ell);2)}(\mathrm{G}^\ell;\mathbb{C}) := \left\{ f \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G}^\ell;\mathbb{C}) \mid \partial_{z_1}^{n_1}\partial_{\overline{z}_1}^{m_1} \ldots \partial_{z_\ell}^{n_\ell}\partial_{\overline{z}_\ell}^{m_\ell} f = 0 \text{ in } \mathrm{G}^\ell \right\},$$

$$\mathcal{O}^{\perp}_{((n_1,m_1),\ldots,(n_\ell,m_\ell);2)}(\mathrm{G}^\ell;\mathbb{C}) := \left\{ \varphi \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G}^\ell;\mathbb{C}) \mid \langle \varphi, f\rangle = 0 \,\forall\, f \in \mathcal{O}_{((n_1,m_1),\ldots,(n_\ell,m_\ell);2)}(\mathrm{G}^\ell;\mathbb{C}) \right\}.$$

Damit gilt der

**Satz 4.7** *Seien $k_j \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{G}_j \subset \mathbb{C}$, $1 \le j \le \ell$, $\ell \in \mathbb{N}$, beschränkte Gebiete mit glatten Rändern und Greenschen Funktionen höherer Ordnung $g_{k_j}$. Für beliebige $n_j, m_j \in \mathbb{N}$ mit $n_j + m_j = k_j$, $1 \le j \le \ell$, hat dann jedes $\omega \in \mathrm{C}^{k_1,\ldots,k_\ell}(\mathrm{G}^\ell;\mathbb{C})$ in $\mathrm{G}^\ell$ die Darstellung $\omega = \phi + \psi$, wobei $\phi \in \mathcal{O}_{((n_1,m_1),\ldots,(n_\ell,m_\ell);2)}(\mathrm{G}^\ell;\mathbb{C})$ und $\psi \in \mathcal{O}^{\perp}_{((n_1,m_1),\ldots,(n_\ell,m_\ell);2)}(\mathrm{G}^\ell;\mathbb{C})$.*

**Beweis**
Analog zu dem von **Satz 4.6** unter zusätzlicher Beachtung von **Lemma 3.2**, S. 46. □

Schlußendlich kann mit dem vorangegangenen Satz jetzt die eingangs erwähnte explizite orthogonale Zerlegung des $\mathrm{L}_2(\mathrm{G}^\ell;\mathbb{C})$ formuliert werden.

Mit

$$\begin{aligned}
&\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^{(k_1,\ldots,k_\ell),2}(\mathrm{G}^\ell;\mathbb{C}) \\
&\quad := \Bigg\{ f \in \mathrm{W}^{(k_1,\ldots,k_\ell),2}(\mathrm{G}^\ell;\mathbb{C}) \mid \partial_{\overline{z}_\tau}^{\mu_\tau}\partial_{z_\tau}^{\nu_\tau} \prod_{j=\tau+1}^{\ell} \partial_{z_j}^{\nu_j}\partial_{\overline{z}_j}^{\mu_j} f = 0 \text{ auf } \partial_0\mathrm{G}^\ell \\
&\qquad\qquad \text{für } 1 \le \tau \le \ell,\ m_\tau + n_\tau = k_\tau - 1, \\
&\qquad\qquad 0 \le \nu_\tau \le m_\tau,\ 0 \le \mu_\tau \le n_\tau,\ 0 \le \nu_j + \mu_j \le k_j \Bigg\},
\end{aligned}$$

wobei $\mathrm{W}^{(k_1,\ldots,k_\ell),2}(\mathrm{G}^\ell;\mathbb{C})$ den Sobolevraum aller $f \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G}^\ell;\mathbb{C})$ mit schwachen Ableitungen $\prod_{j=1}^{\ell} \partial_{z_j}^{n_j}\partial_{\overline{z}_j}^{m_j} f$ für $m_j + n_j = k_j$, $1 \le j \le \ell$, in $\mathrm{L}_2(\mathrm{G}^\ell;\mathbb{C})$ bezeichnet, gilt der

**Satz 4.8** *Für $\ell, n_j, m_j, k_j \in \mathbb{N}$ mit $n_j+m_j = k_j$ und beschränkte Gebiete $\mathrm{G}_j \subset \mathbb{C}$, $1 \le j \le \ell$, mit glatten Rändern und Greenschen Funktionen höherer Ordnung $g_{k_j}$ ist*

$$\mathrm{L}_2(\mathrm{G}^\ell;\mathbb{C}) = \mathcal{O}_{((n_1,m_1),\ldots,(n_\ell,m_\ell);2)}(\mathrm{G}^\ell;\mathbb{C}) \oplus \prod_{j=1}^{\ell} \partial_{\overline{z}_j}^{n_j}\partial_{z_j}^{m_j}\ \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^{(k_1,\ldots,k_\ell),2}(\mathrm{G}^\ell;\mathbb{C}).$$

**Beweis**
Nach der Aussage von **Satz 4.7** genügt es offenbar, die Identität

$$\mathcal{O}^{\perp}_{((n_1,m_1),\ldots,(n_\ell,m_\ell);2)}(\mathrm{G}^\ell;\mathbb{C}) = \prod_{j=1}^{\ell} \partial_{\overline{z}_j}^{n_j}\partial_{z_j}^{m_j}\ \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^{(k_1,\ldots,k_\ell),2}(\mathrm{G}^\ell;\mathbb{C})$$

zu bestätigen.

Sei $q \in \prod_{j=1}^{\ell} \partial_{\overline{z}_j}^{n_j}\partial_{z_j}^{m_j}\ \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^{(k_1,\ldots,k_\ell),2}(\mathrm{G}^\ell;\mathbb{C})$ beliebig vorgelegt. Zu diesem $q$ existiert dann ein $r \in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^{(k_1,\ldots,k_\ell),2}(\mathrm{G}^\ell;\mathbb{C})$ mit

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{\ell} \partial_{\overline{z}_j}^{n_j}\partial_{z_j}^{m_j} r &= q \text{ in } \mathrm{G}^\ell, \\
\partial_{\overline{z}_\tau}^{\mu_\tau}\partial_{z_\tau}^{\nu_\tau} \prod_{j=\tau+1}^{\ell} \partial_{z_j}^{\nu_j}\partial_{\overline{z}_j}^{\mu_j} r &= 0 \text{ auf } \partial_0\mathrm{G}^\ell \text{ für } 1 \le \tau \le \ell, m_\tau + n_\tau = k_\tau - 1, \\
&\qquad 0 \le \nu_\tau \le m_\tau,\ 0 \le \mu_\tau \le n_\tau,\ 0 \le \nu_j + \mu_j \le k_j.
\end{aligned}$$

Für $\varphi \in \mathcal{O}_{((n_1,m_1),\dots,(n_\ell,m_\ell);2)}(\mathrm{G}^\ell;\mathbb{C})$ folgt mit dem **Integralsatz von Gauß 1.1**, S. 4, weiter

$$\begin{aligned}
\langle q,\varphi\rangle &= \langle \prod_{j=1}^{\ell} \partial_{\overline{z}_j}^{n_j}\partial_{z_j}^{m_j} r,\varphi\rangle = \int_{\mathrm{G}^\ell} \prod_{j=1}^{\ell} \partial_{\overline{z}_j}^{n_j}\partial_{z_j}^{m_j} r(z)\overline{\varphi(z)} \prod_{j=1}^{\ell} dx_j dy_j \\
&= \int_{\mathrm{G}^\ell} \Bigg( \partial_{\overline{z_1}} \left\{ \partial_{\overline{z}_1}^{n_1-1}\partial_{z_1}^{m_1} \prod_{j=2}^{\ell} \partial_{\overline{z}_j}^{n_j}\partial_{z_j}^{m_j} r(z)\overline{\varphi(z)} \right\} \\
&\qquad\qquad - \partial_{\overline{z}_1}^{n_1-1}\partial_{z_1}^{m_1} \prod_{j=2}^{\ell} \partial_{\overline{z}_j}^{n_j}\partial_{z_j}^{m_j} r(z)\overline{\partial_{z_1}\varphi(z)} \Bigg) \prod_{j=1}^{\ell} dx_j dy_j \\
&= -\int_{\mathrm{G}^\ell} \partial_{\overline{z}_1}^{n_1-1}\partial_{z_1}^{m_1} \prod_{j=2}^{\ell} \partial_{\overline{z}_j}^{n_j}\partial_{z_j}^{m_j} r(z)\overline{\partial_{z_1}\varphi(z)} \prod_{j=1}^{\ell} dx_j dy_j.
\end{aligned}$$

Mit dieser Argumentation für die verbleibenden Ableitungen fortfahrend gelangt man zu

$$\langle q,\varphi\rangle = (-1)^{n_1+m_1} \int_{\mathrm{G}^\ell} \prod_{j=2}^{\ell} \partial_{\overline{z}_j}^{n_j}\partial_{z_j}^{m_j} r(z)\overline{\partial_{\overline{z}_1}^{m_1}\partial_{z_1}^{n_1}\varphi(z)} \prod_{j=1}^{\ell} dx_j dy_j.$$

Dies sukzessive für die restlichen Komponenten durchgeführt, zeigt unter Beachtung der Voraussetzungen an $\varphi$

$$\langle q,\varphi\rangle = (-1)^{\sum_{j=1}^{\ell}(n_j+m_j)} \int_{\mathrm{G}^\ell} r(z)\overline{\prod_{j=1}^{\ell} \partial_{\overline{z}_j}^{m_j}\partial_{z_j}^{n_j}\varphi(z)} \prod_{j=1}^{\ell} dx_j dy_j = 0,$$

also $q \in \mathcal{O}^{\perp}_{((n_1,m_1),\dots,(n_\ell,m_\ell);2)}(\mathrm{G}^\ell;\mathbb{C})$.

Sei jetzt $q \in \mathcal{O}^{\perp}_{((n_1,m_1),\dots,(n_\ell,m_\ell);2)}(\mathrm{G}^\ell;\mathbb{C})$ beliebig vorgelegt. Für solches $q$ wird das folgende Problem betrachtet:

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{\ell} \partial_{\overline{z}_j}^{n_j}\partial_{z_j}^{m_j} r &= q \text{ in } \mathrm{G}^\ell, \\
\partial_{\overline{z}_\tau}^{\mu_\tau}\partial_{z_\tau}^{\nu_\tau} \prod_{j=\tau+1}^{\ell} \partial_{z_j}^{\nu_j}\partial_{\overline{z}_j}^{\mu_j} r &= 0 \text{ auf } \partial_0\mathrm{G}^\ell \text{ für } 1 \le \tau \le \ell, m_\tau + n_\tau = k_\tau - 1, \\
& \quad 0 \le \nu_\tau \le m_\tau,\ 0 \le \mu_\tau \le n_\tau,\ 0 \le \nu_j + \mu_j \le k_j.
\end{aligned} \tag{72}$$

Eine Lösung von (72) ist gegeben durch

$$r(z) = \frac{(-1)^\ell}{\pi^\ell} \int_{\mathrm{G}^\ell} \prod_{j=1}^{\ell} \partial_{\overline{z}_j}^{m_j}\partial_{z_j}^{n_j} g_{k_j}(z_j,\zeta_j) \prod_{j=1}^{\ell} \partial_{\overline{\zeta}_j}^{n_j}\partial_{\zeta_j}^{m_j} r(\zeta) \prod_{j=1}^{\ell} d\xi_j d\eta_j$$

$$= \frac{(-1)^\ell}{\pi^\ell} \int\limits_{\mathrm{G}^\ell} \prod_{j=1}^{\ell} \partial_{\overline{z}_j}^{m_j} \partial_{z_j}^{n_j} g_{k_j}(z_j, \zeta_j) q(\zeta) \prod_{j=1}^{\ell} d\xi_j d\eta_j,$$

was komponentenweise aus den Eigenschaften der Greenschen Funktionen $g_{k_j}$ auf den Rändern $\partial \mathrm{G}_j$ und den Eigenschaften des T– bzw. $\overline{\mathrm{T}}$–Operators folgt. $\square$