3 Integraldarstellungen in Gebieten

3.1 Darstellungen mit Greenschen Funktionen höherer Ordnung

Es wird nun der **Satz 1.2**, S. 7, auf Greensche Funktionen höherer Ordnung verallgemeinert.

Satz 3.1 *Sei* $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ *ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und Greenscher Funktion höherer Ordnung* g_n, $n \in \mathbb{N}$. *Dann hat jedes* $\omega \in \mathrm{C}^n(\mathrm{G};\mathbb{C}) \cap \mathrm{C}^{n-1}(\overline{\mathrm{G}};\mathbb{C})$ *für* $z \in \mathrm{G}$ *die Darstellung*

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_G \partial_z^n h_n(z,\zeta)\partial_{\overline{\zeta}}^n \omega(\zeta)\,d\xi d\eta - \frac{1}{\pi}\int\limits_G \partial_z^n g_n(z,\zeta)\partial_{\overline{\zeta}}^n \omega(\zeta)\,d\xi d\eta$$
$$- \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\ell!}\int\limits_{\partial G} \frac{(\overline{z-\zeta})^{\ell}}{z-\zeta}\partial_{\overline{\zeta}}^{l}\omega(\zeta)\,d\zeta, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Beweis
Für $z \neq \zeta$ gilt

$$\begin{aligned}
&\partial_z^n \widetilde{\omega}_n(z,\zeta) = \\
&\quad -\frac{(\overline{z-\zeta})^{n-1}}{(n-1)!^2}\partial_z \sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}\left[\partial_z^{\ell}\log|z-\zeta|^2\right]\left[\partial_z^{n-1-\ell}(z-\zeta)^{n-1}\right] \\
&= \frac{(\overline{z-\zeta})^{n-1}}{(n-1)!^2}\partial_z \sum_{\ell=1}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}\frac{(-1)^{\ell}(\ell-1)!}{(z-\zeta)^{\ell}}\frac{(n-1)!}{\ell!}(z-\zeta)^{\ell} \\
&\quad -\frac{(\overline{z-\zeta})^{n-1}}{(n-1)!}\partial_z \log|z-\zeta|^2 \\
&= -\frac{1}{(n-1)!}\frac{(\overline{z-\zeta})^{n-1}}{z-\zeta}.
\end{aligned}$$

Damit folgt für $z \neq \zeta$

$$\partial_z^n h_n(z,\zeta) - \partial_z^n g_n(z,\zeta) = -\partial_z^n \widetilde{\omega}_n(z,\zeta) = \frac{1}{(n-1)!}\frac{(\overline{z-\zeta})^{n-1}}{z-\zeta}. \tag{39}$$

Weil h_n regulär ist, bleibt unter Beachtung von (18), S. 11, also zu zeigen:

$$\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{\mathrm{G}} \frac{(\overline{z-\zeta})^{n-1}}{z-\zeta}\partial_{\overline{\zeta}}^n \omega(\zeta)d\xi d\eta = \int\limits_{\mathrm{G}} \partial_z^n h_n(z,\zeta)\partial_{\overline{\zeta}}^n \omega(\zeta)d\xi d\eta$$

$$- \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\mathrm{G}_\varepsilon} \partial_z^n g_n(z,\zeta) \partial_{\overline{\zeta}}^n \omega(\zeta) d\xi d\eta,$$

wobei $\mathrm{G}_\varepsilon := \mathrm{G} \setminus K_\varepsilon(z)$ mit $K_\varepsilon(z) := \{\zeta \in \mathrm{G} : |z-\zeta| \leq \varepsilon\} \subset \mathrm{G}$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$. Mit dem **Integralsatz von Gauß**, S. 4, gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{2i} \int\limits_{\partial \mathrm{G}_\varepsilon} \left[\partial_{\overline{\zeta}}^k \partial_z^n g_n(z,\zeta) \right] \partial_{\overline{\zeta}}^{n-k-1} \omega(\zeta) d\zeta \\
&\quad = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left\{ \int\limits_{\mathrm{G}_\varepsilon} \left[\partial_{\overline{\zeta}}^{k+1} \partial_z^n g_n(z,\zeta) \right] \partial_{\overline{\zeta}}^{n-k-1} \omega(\zeta) d\xi d\eta \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \int\limits_{\mathrm{G}_\varepsilon} \left[\partial_{\overline{\zeta}}^k \partial_z^n g_n(z,\zeta) \right] \partial_{\overline{\zeta}}^{n-k} \omega(\zeta) d\xi d\eta \right\} \\
&\quad = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int\limits_{\mathrm{G}_\varepsilon} \left[\partial_{\overline{\zeta}}^k \partial_z^n g_n(z,\zeta) \right] \partial_{\overline{\zeta}}^{n-k} \omega(\zeta) d\xi d\eta \\
&\qquad\qquad + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int\limits_{\mathrm{G}_\varepsilon} \left[\partial_{\overline{\zeta}}^k \partial_z^n g_n(z,\zeta) \right] \partial_{\overline{\zeta}}^{n-k} \omega(\zeta) d\xi d\eta \\
&\quad = (-1)^{n-1} \int\limits_{\mathrm{G}_\varepsilon} \left[\partial_{\overline{\zeta}}^n \partial_z^n g_n(z,\zeta) \right] \omega(\zeta) d\xi d\eta + \int\limits_{\mathrm{G}_\varepsilon} \partial_z^n g_n(z,\zeta) \partial_{\overline{\zeta}}^n \omega(\zeta) d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

Wieder mit **Definition 1.2**, S. 10, und der Regularität von h_n folgt:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\mathrm{G}_\varepsilon} \left[\partial_{\overline{\zeta}}^n \partial_z^n g_n(z,\zeta) \right] \omega(\zeta) d\xi d\eta = \int\limits_{\mathrm{G}} \left[\partial_{\overline{\zeta}}^n \partial_z^n h_n(z,\zeta) \right] \omega(\zeta) d\xi d\eta.$$

Andererseits ist:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2i} \int\limits_{\partial \mathrm{G}_\varepsilon} \left[\partial_{\overline{\zeta}}^k \partial_z^n g_n(z,\zeta) \right] \partial_{\overline{\zeta}}^{n-k-1} \omega(\zeta) d\zeta \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2i} \left\{ \underbrace{\int\limits_{\partial \mathrm{G}} \left[\partial_{\overline{\zeta}}^k \partial_z^n g_n(z,\zeta) \right] \partial_{\overline{\zeta}}^{n-k-1} \omega(\zeta) d\zeta}_{= 0 \quad \text{(siehe (26), S. 14)}} \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \int\limits_{|z-\zeta|=\varepsilon} \left[\partial_{\overline{\zeta}}^k \partial_z^n g_n(z,\zeta) \right] \partial_{\overline{\zeta}}^{n-k-1} \omega(\zeta) d\zeta \right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2i} \int\limits_{|z-\zeta|=\varepsilon} \left[\partial_{\overline{\zeta}}^k \partial_z^n \widetilde{\omega}_n(z,\zeta)\right] \partial_{\overline{\zeta}}^{n-k-1} \omega(\zeta) d\zeta \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2i} \int\limits_{|z-\zeta|=\varepsilon} \left[\partial_{\overline{\zeta}}^k \partial_z^n h_n(z,\zeta)\right] \partial_{\overline{\zeta}}^{n-k-1} \omega(\zeta) d\zeta.
\end{aligned}
$$

Mit (siehe (39), S. 38)

$$
\partial_{\overline{\zeta}}^k \partial_z^n \widetilde{\omega}_n(z,\zeta) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{k+1}}{(n-k-1)!} \dfrac{(\overline{z-\zeta})^{n-k-1}}{z-\zeta} & : \quad 0 \le k \le n-1, \\[2ex] 0 & : \quad n \le k, \end{cases}
$$

gilt

$$
\begin{aligned}
&- \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|z-\zeta|=\varepsilon} \left[\partial_{\overline{\zeta}}^k \partial_z^n \widetilde{\omega}_n(z,\zeta)\right] \partial_{\overline{\zeta}}^{n-k-1} \omega(\zeta) d\zeta \\
&\qquad = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(-1)^k}{(n-k-1)!} \int\limits_{|z-\zeta|=\varepsilon} \frac{(\overline{z-\zeta})^{n-k-1}}{z-\zeta} \partial_{\overline{\zeta}}^{n-k-1} \omega(\zeta) d\zeta \\
&\qquad = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(-1)^n i \varepsilon^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \int_0^{2\pi} \frac{\partial_{\overline{\zeta}}^{n-k-1} \omega(z+\varepsilon e^{i\varphi})}{\left(e^{i\varphi}\right)^{n-k-1}} d\varphi \\
&\qquad = \begin{cases} (-1)^n 2\pi i \omega(z) & : \quad k = n-1 \\[1ex] 0 & : \quad 0 \le k \le n-2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Wieder unter Beachtung der Regularität von h_n folgt weiter

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2i} \int\limits_{\partial \mathrm{G}_\varepsilon} \left[\partial_{\overline{\zeta}}^k \partial_z^n g_n(z,\zeta)\right] \partial_{\overline{\zeta}}^{n-k-1} \omega(\zeta) d\zeta \\
&\quad = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2i} \int\limits_{|z-\zeta|=\varepsilon} \left[\partial_{\overline{\zeta}}^k \partial_z^n \widetilde{\omega}_n(z,\zeta)\right] \partial_{\overline{\zeta}}^{n-k-1} \omega(\zeta) d\zeta \\
&\quad = \frac{(-1)^{n-1}}{2i} (-1)^n 2\pi i \omega(z) = -\pi\omega(z)
\end{aligned}
$$

und also

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\mathrm{G}_\varepsilon}\partial_z^n g_n(z,\zeta)\partial_{\overline{\zeta}}^n\omega(\zeta)d\xi d\eta& \\
&= -\pi\omega(z) + (-1)^n\int\limits_{\mathrm{G}}\left[\partial_{\overline{\zeta}}^n\partial_z^n h_n(z,\zeta)\right]\omega(\zeta)d\xi d\eta.
\end{aligned}
\tag{40}
$$

Mit

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\partial_{\overline{\zeta}}&\left\{\left[\partial_{\overline{\zeta}}^k\partial_z^n h_n(z,\zeta)\right]\partial_{\overline{\zeta}}^{n-k-1}\omega(\zeta)\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left[\partial_{\overline{\zeta}}^k\partial_z^n h_n(z,\zeta)\right]\partial_{\overline{\zeta}}^{n-k}\omega(\zeta) \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[\partial_{\overline{\zeta}}^k\partial_z^n h_n(z,\zeta)\right]\partial_{\overline{\zeta}}^{n-k}\omega(\zeta) \\
&= (-1)^{n-1}\left[\partial_{\overline{\zeta}}^n\partial_z^n h_n(z,\zeta)\right]\omega(\zeta) + \partial_z^n h_n(z,\zeta)\partial_{\overline{\zeta}}^n\omega(\zeta)
\end{aligned}
$$

wird (40) zu

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\mathrm{G}_\varepsilon}\partial_z^n g_n(z,\zeta)\partial_{\overline{\zeta}}^n\omega(\zeta)d\xi d\eta &= -\pi\omega(z) + \int\limits_{\mathrm{G}}\partial_z^n h_n(z,\zeta)\partial_{\overline{\zeta}}^n\omega(\zeta)d\xi d\eta \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\int\limits_{\mathrm{G}}\partial_{\overline{\zeta}}\left\{\left[\partial_{\overline{\zeta}}^k\partial_z^n h_n(z,\zeta)\right]\partial_{\overline{\zeta}}^{n-k-1}\omega(\zeta)\right\}d\xi d\eta.
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Mit **Definition 1.2**, S. 10, und unter Beachtung von (26), S. 14, ist

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\int\limits_{\mathrm{G}}\partial_{\overline{\zeta}}&\left\{\left[\partial_{\overline{\zeta}}^k\partial_z^n h_n(z,\zeta)\right]\partial_{\overline{\zeta}}^{n-k-1}\omega(\zeta)\right\}d\xi d\eta \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{2i}\int\limits_{\partial\mathrm{G}}\left[\partial_{\overline{\zeta}}^k\partial_z^n h_n(z,\zeta)\right]\partial_{\overline{\zeta}}^{n-k-1}\omega(\zeta)d\zeta \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k}}{2i}\int\limits_{\partial\mathrm{G}}\left[\partial_{\overline{\zeta}}^k\partial_z^n \widetilde{\omega}_n(z,\zeta)\right]\partial_{\overline{\zeta}}^{n-k-1}\omega(\zeta)d\zeta \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\frac{1}{2i}\int\limits_{\partial\mathrm{G}}\frac{\left(\overline{z-\zeta}\right)^k}{z-\zeta}\partial_{\overline{\zeta}}^k\omega(\zeta)d\zeta.
\end{aligned}
$$

Dies eingesetzt in (41) ergibt die Behauptung. □

3.2 Darstellungen mit Bergmanschen Kernen höherer Ordnung

Mit Hilfe der Bergmanschen Kernfunktion höherer Ordnung läßt sich nun eine zu **Satz 1.3**, S. 7, analoge Aussage gewinnen.

Satz 3.2 *Sei* $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ *ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und Greenscher Funktion höherer Ordnung* g_n, $n \in \mathbb{N}$. *Dann hat jedes* $\omega \in \mathrm{C}^n(\mathrm{G};\mathbb{C}) \cap \mathrm{C}^{n-1}(\overline{\mathrm{G}};\mathbb{C})$ *für* $z \in \mathrm{G}$ *die Darstellung*

$$\omega(z) = \int\limits_{\mathrm{G}} K_n(z,\overline{\zeta})\omega(\zeta)d\xi d\eta - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}} \partial_z^n g_n(z,\zeta)\partial_{\overline{\zeta}}^n\omega(\zeta)d\xi d\eta.$$

Beweis
Für $0 \leq \ell \leq n-1$ und $z \neq \zeta$ ist (siehe (39), S. 38):

$$\partial_{\overline{\zeta}}^{n-\ell-1}\partial_z^n\widetilde{\omega}_n(z,\zeta) = \frac{(-1)^{n-\ell}}{\ell!}\frac{(\overline{z-\zeta})^\ell}{z-\zeta}. \tag{42}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &:= \sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\ell!}\int\limits_{\partial\mathrm{G}}\frac{(\overline{z-\zeta})^\ell}{z-\zeta}\partial_{\overline{\zeta}}^{\ell}\omega(\zeta)d\zeta \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-\ell}}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathrm{G}}\partial_{\overline{\zeta}}^{n-\ell-1}\partial_z^n\widetilde{\omega}_n(z,\zeta)\partial_{\overline{\zeta}}^{\ell}\omega(\zeta)d\zeta \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-\ell}}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathrm{G}}\left[\partial_{\overline{\zeta}}^{n-\ell-1}\partial_z^n\widetilde{\omega}_n(z,\zeta) - \partial_{\overline{\zeta}}^{n-\ell-1}\partial_z^n g_n(z,\zeta)\right]\partial_{\overline{\zeta}}^{\ell}\omega(\zeta)d\zeta,
\end{aligned}$$

weil

$$\partial_{\overline{\zeta}}^{n-\ell-1}\partial_z^n g_n(z,\zeta) = 0 \quad \text{für } \zeta \in \partial\mathrm{G},\ z \in \mathrm{G},\ 0 \leq \ell \leq n-1 \quad \text{(siehe (26), S. 14).}$$

Mit **Definition 1.2**, S. 10, folgt weiter

$$\mathrm{I} = \sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-\ell+1}}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathrm{G}}\left[\partial_{\overline{\zeta}}^{n-\ell-1}\partial_z^n h_n(z,\zeta)\right]\partial_{\overline{\zeta}}^{\ell}\omega(\zeta)d\zeta.$$

Wieder wegen der Voraussetzungen an h_n darf der **Gaußsche Integralsatz 1.1**, S. 4, angewendet werden. Also

$$\mathrm{I} = \sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-\ell+1}}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\partial_{\overline{\zeta}}\left\{\left[\partial_{\overline{\zeta}}^{n-\ell-1}\partial_z^n h_n(z,\zeta)\right]\partial_{\overline{\zeta}}^{\ell}\omega(\zeta)\right\}d\xi d\eta$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{n+1} \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(-1)^\ell}{\pi} \int\limits_{\mathrm{G}} \Big\{ \Big[\partial_{\overline{\zeta}}^{n-\ell} \partial_z^n h_n(z,\zeta) \Big] \partial_{\overline{\zeta}}^{\ell} \omega(\zeta) \\
&\qquad\qquad + \Big[\partial_{\overline{\zeta}}^{n-\ell-1} \partial_z^n h_n(z,\zeta) \Big] \partial_{\overline{\zeta}}^{\ell+1} \omega(\zeta) \Big\}\, d\xi d\eta \\
&= (-1)^{n+1} \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathrm{G}} \Big\{ \Big[\partial_{\overline{\zeta}}^{n} \partial_z^n h_n(z,\zeta) \Big] \omega(\zeta) + (-1)^{n-1} \partial_z^n h_n(z,\zeta) \partial_{\overline{\zeta}}^{n} \omega(\zeta) \Big\}\, d\xi d\eta.
\end{aligned}
$$

Dies eingesetzt in **Satz 3.1**, S. 38, liefert

$$
\begin{aligned}
\omega(z) &= \frac{1}{\pi} \int\limits_G \partial_z^n h_n(z,\zeta) \partial_{\overline{\zeta}}^{n} \omega(\zeta)\, d\xi d\eta - \frac{1}{\pi} \int\limits_G \partial_z^n g_n(z,\zeta) \partial_{\overline{\zeta}}^{n} \omega(\zeta)\, d\xi d\eta \\
&\quad -(-1)^{n+1} \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathrm{G}} \Big\{ \Big[\partial_{\overline{\zeta}}^{n} \partial_z^n h_n(z,\zeta) \Big] \omega(\zeta) + (-1)^{n-1} \partial_z^n h_n(z,\zeta) \partial_{\overline{\zeta}}^{n} \omega(\zeta) \Big\}\, d\xi d\eta \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi} \int\limits_{\mathrm{G}} \Big[\partial_{\overline{\zeta}}^{n} \partial_z^n h_n(z,\zeta) \Big] \omega(\zeta) d\xi d\eta - \frac{1}{\pi} \int\limits_G \partial_z^n g_n(z,\zeta) \partial_{\overline{\zeta}}^{n} \omega(\zeta)\, d\xi d\eta. \qquad (43)
\end{aligned}
$$

Wegen $\partial_{\overline{\zeta}}^{n} \partial_z^n \widetilde{\omega}_n(z,\zeta) = 0$ (siehe (42), S. 42) und **Definition 1.2**, S. 10, folgt demnach

$$
K_n(z,\overline{\zeta}) = \frac{(-1)^n}{\pi} \partial_z^n \partial_{\overline{\zeta}}^{n} g_n(z,\zeta) = \frac{(-1)^n}{\pi} \partial_z^n \partial_{\overline{\zeta}}^{n} h_n(z,\zeta). \qquad (44)
$$

Dies eingesetzt in (43) ergibt die Behauptung. □

Bemerkung
Komplexe Konjugation liefert noch folgenden

Satz 3.3 *Sei* $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ *ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und Greenscher Funktion höherer Ordnung* g_n, $n \in \mathbb{N}$. *Dann hat jedes* $\omega \in \mathrm{C}^n(\mathrm{G};\mathbb{C}) \cap \mathrm{C}^{n-1}(\overline{\mathrm{G}};\mathbb{C})$ *für* $z \in \mathrm{G}$ *die Darstellung*

$$
\omega(z) = \frac{(-1)^n}{\pi} \int\limits_{\mathrm{G}} \partial_{\overline{z}}^{n} \partial_\zeta^n g_n(z,\zeta) \omega(\zeta) d\xi d\eta - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathrm{G}} \partial_{\overline{z}}^{n} g_n(z,\zeta) \partial_\zeta^n \omega(\zeta) d\xi d\eta.
$$

3.3 Orthogonale Zerlegungen

Als Folgerung aus **Satz 3.2**, S. 42, läßt sich eine explizite Zerlegung des Hilbertraumes $\mathrm{L}_2(\mathrm{G};\mathbb{C})$ in den Raum der in G polyanalytischen Funktionen und dessen orthogonalem Komplement angeben. Folgende Definition erscheint dazu sinnvoll.

Definition 3.1 *Für $n \in \mathbb{N}$ sei*

$$\mathcal{O}_{n,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}) \;:=\; \{f \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G};\mathbb{C}) \mid \partial_{\overline{z}}^n f = 0 \textit{ in } \mathrm{G}\}\,,$$

$$\mathcal{O}_{n,2}^{\perp}(\mathrm{G};\mathbb{C}) \;:=\; \{\varphi \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G};\mathbb{C}) \mid \langle\varphi, f\rangle = 0 \quad \forall\, f \in \mathcal{O}_{n,2}(\mathrm{G};\mathbb{C})\}\,.$$

Damit gilt dann der (s. [Krau03])

Satz 3.4 *Für ein beschränktes Gebiet $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ mit glattem Rand und Greenscher Funktion höherer Ordnung g_n, $n \in \mathbb{N}$, sei $\omega \in \mathrm{C}^n(\mathrm{G};\mathbb{C}) \cap \mathrm{C}^{n-1}(\overline{\mathrm{G}};\mathbb{C})$. Dann hat ω in G die Darstellung*

$$\omega = \phi + \psi, \quad \textit{wobei} \quad \phi \in \mathcal{O}_{n,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}) \textit{ und } \psi \in \mathcal{O}_{n,2}^{\perp}(\mathrm{G};\mathbb{C}).$$

Beweis
Nach **Satz 3.2** hat ω in G die Darstellung

$$\omega(z) = \int_{\mathrm{G}} K_n(z,\overline{\zeta})\omega(\zeta)d\xi d\eta - \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}} \partial_z^n g_n(z,\zeta)\partial_{\overline{\zeta}}^n\omega(\zeta)d\xi d\eta. \tag{45}$$

(44) zeigt in Verbindung mit den Voraussetzungen an h_n, dass $K_n(z,\overline{\zeta})$ eine polyanalytische Funktion n–ter Ordnung in z ist. Somit ist das erste Integral von (45) beschränkt, mithin der Satz von der majorisierten Konvergenz (s. [HeSt69]) anwendbar und also Differentiation und Integration vertauschbar. Woraus die Polyanalytizität dieses Integrals unmittelbar folgt. Daher bleibt zu zeigen:

$$\int_{\mathrm{G}} [\partial_z^n g_n(z,\zeta)]\,\overline{f(z)}dxdy = 0 \quad \text{für beliebiges } f \in \mathcal{O}_{n,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}).$$

Für ein beschränktes Gebiet $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ mit glattem Rand und Greenscher Funktion höherer Ordnung g_n, $n \in \mathbb{N}$, und beliebiges $f \in \mathcal{O}_{n,2}(\mathrm{G};\mathbb{C})$ gilt allgemeiner folgendes

Lemma 3.1

$$\int_{\mathrm{G}} [\partial_z^n g_n(z,\zeta)]\,\overline{f(z)}dxdy = (-1)^k\int_{\mathrm{G}} \left[\partial_z^{n-k} g_n(z,\zeta)\right]\,\overline{\partial_{\overline{z}}^k f(z)}dxdy, \quad 0 \le k \le n.$$

Beweis durch vollständige Induktion über k.

Sei also $f \in \mathcal{O}_{n,2}(\mathrm{G};\mathbb{C})$ beliebig und $k = 1$. Der **Gaußsche Integralsatz 1.1**, S. 4, in Verbindung mit (33), S. 31, liefert

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathrm{G}} [\partial_z^n g_n(z,\zeta)]\,\overline{f(z)}dxdy &= \int\limits_{\mathrm{G}} \partial_z \left\{ [\partial_z^{n-1} g_n(z,\zeta)]\,\overline{f(z)} \right\} dxdy \\
&\quad - \int\limits_{\mathrm{G}} [\partial_z^{n-1} g_n(z,\zeta)]\,\partial_z \overline{f(z)} dxdy \\
&= -\frac{1}{2i} \int\limits_{\partial\mathrm{G}} [\partial_z^{n-1} g_n(z,\zeta)]\,\overline{f(z)} d\overline{z} \qquad (46) \\
&\quad - \int\limits_{\mathrm{G}} [\partial_z^{n-1} g_n(z,\zeta)]\,\overline{\partial_{\overline{z}} f(z)} dxdy.
\end{aligned}$$

(Dass der Gaußsche Integralsatz hier angewendet werden darf, läßt sich analog zum Beweis von **Satz 3.1**, S. 38ff, begründen.)
Das Integral (46) ist Null wegen der ersten Gleichung aus (20), S. 13.

Sei $k \geq 1$.

1) $1 \leq k < n$:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathrm{G}} [\partial_z^n g_n(z,\zeta)]\,\overline{f(z)} dxdy \\
&= (-1)^k \int\limits_{\mathrm{G}} [\partial_z^{n-k} g_n(z,\zeta)]\,\overline{\partial_{\overline{z}}^k f(z)} dxdy \\
&= (-1)^k \int\limits_{\mathrm{G}} \partial_z \left\{ [\partial_z^{n-(k+1)} g_n(z,\zeta)]\,\overline{\partial_{\overline{z}}^k f(z)} \right\} dxdy \\
&\quad -(-1)^k \int\limits_{\mathrm{G}} [\partial_z^{n-(k+1)} g_n(z,\zeta)]\,\overline{\partial_{\overline{z}}^{k+1} f(z)} dxdy \\
&= (-1)^{k+1} \int\limits_{\mathrm{G}} [\partial_z^{n-(k+1)} g_n(z,\zeta)]\,\overline{\partial_{\overline{z}}^{k+1} f(z)} dxdy
\end{aligned}$$

(wegen der ersten Gleichung aus (20), S. 13).

2) $k = n$:

$$(-1)^n \int\limits_{\mathrm{G}} g_n(z,\zeta)\overline{\partial_{\overline{z}}^n f(z)} dxdy = 0$$

(nach Voraussetzung an f).

Dies zeigt die Behauptung des Lemmas und damit auch des Satzes. □

Entsprechend läßt sich auch eine Zerlegung in den Raum der in G polyantianalytischen Funktionen und sein orthogonales Komplement angeben. Für $n \in \mathbb{N}$ sei dazu:

$$\begin{aligned}\mathcal{AO}_{n,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}) &:= \{f \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G};\mathbb{C}) \mid \partial_z^n f = 0\}\,,\\ \mathcal{AO}_{n,2}^{\perp}(\mathrm{G};\mathbb{C}) &:= \{\varphi \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G};\mathbb{C}) \mid \langle \varphi, f\rangle = 0 \quad \forall\, f \in \mathcal{AO}_{n,2}(\mathrm{G};\mathbb{C})\}\,.\end{aligned}$$

Damit gilt der

Satz 3.5 *Für ein beschränktes Gebiet* $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ *mit glattem Rand und Greenscher Funktion höherer Ordnung sei* $\omega \in \mathrm{C}^n(\mathrm{G};\mathbb{C}) \cap \mathrm{C}^{n-1}(\overline{\mathrm{G}};\mathbb{C})$. *Dann hat* ω *in* G *die Darstellung*

$$\omega = \phi + \psi, \quad \textit{wobei} \quad \phi \in \mathcal{AO}_{n,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}) \ \textit{und}\ \psi \in \mathcal{AO}_{n,2}^{\perp}(\mathrm{G};\mathbb{C}).$$

Beweis
Nach **Satz 3.3** hat ω in G die Darstellung

$$\omega(z) = \frac{(-1)^n}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}} \partial_{\overline{z}}^n \partial_\zeta^n g_n(z,\zeta)\omega(\zeta)d\xi d\eta - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}} \partial_{\overline{z}}^n g_n(z,\zeta)\partial_\zeta^n \omega(\zeta)d\xi d\eta.$$

Die Behauptung folgt dann mit einem zum Beweis von **Satz 3.4** analogen Schluß unter Beachtung von

Lemma 3.2 *Für ein beschränktes Gebiet* $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ *mit glattem Rand und Greenscher Funktion* g_n *der Ordnung* $n \in \mathbb{N}$ *und beliebiges* $f \in \mathcal{AO}_{n,2}(\mathrm{G};\mathbb{C})$ *gilt*

$$\int\limits_{\mathrm{G}} [\partial_{\overline{z}}^n g_n(z,\zeta)]\,\overline{f(z)}dxdy = (-1)^k \int\limits_{\mathrm{G}} \left[\partial_{\overline{z}}^{n-k} g_n(z,\zeta)\right] \overline{\partial_z^k f(z)}dxdy, \quad 0 \le k \le n.$$

□

Für $n \in \mathbb{N}$ implizieren die vorangegangenen Sätze mit

$$\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^{n,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}) := \left\{f \in \mathrm{W}^{n,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}) \mid \partial_z^\nu f = 0 \text{ auf } \partial\mathrm{G} \text{ für } 0 \le \nu \le n-1\right\}$$

und

$$\widetilde{\overset{\circ}{\mathrm{W}}}{}^{n,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}) := \left\{f \in \mathrm{W}^{n,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}) \mid \partial_{\overline{z}}^\nu f = 0 \text{ auf } \partial\mathrm{G} \text{ für } 0 \le \nu \le n-1\right\},$$

wobei $\mathrm{W}^{n,2}(\mathrm{G};\mathbb{C})$ den Sobolevraum aller $f \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G};\mathbb{C})$ bezeichnet, welche schwache Ableitungen bezüglich z bzw. $\overline{z}$ bis zur Ordnung n in $\mathrm{L}_2(\mathrm{G};\mathbb{C})$ haben, nun die folgende Aussage.

Satz 3.6 *Für ein beschränktes Gebiet* $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ *mit glattem Rand und Greenscher Funktion höherer Ordnung* g_n, $n \in \mathbb{N}$, *gilt*

$$\mathrm{L}_2(\mathrm{G};\mathbb{C}) = \mathcal{O}_{n,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}) \oplus \partial_z^n \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^{n,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}) \tag{47}$$

und

$$\mathrm{L}_2(\mathrm{G};\mathbb{C}) = \mathcal{A}O_{n,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}) \oplus \partial_{\overline{z}}^n \overset{\circ}{\widetilde{\mathrm{W}}}{}^{n,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}). \tag{48}$$

Beweis
Es gilt

$$\mathcal{O}_{n,2}^{\perp}(\mathrm{G};\mathbb{C}) = \partial_z^n \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^{n,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}).$$

Für einen Beweis dieser Tatsache siehe [BeDu01] oder [Kaeh99]. In Verbindung mit **Satz 3.4** zeigt dies (47).

Zu (48):

Offenbar genügt es, die Identität $\mathcal{A}O_{n,2}^{\perp}(\mathrm{G};\mathbb{C}) = \partial_{\overline{z}}^n \overset{\circ}{\widetilde{\mathrm{W}}}{}^{n,2}(\mathrm{G};\mathbb{C})$ zu bestätigen. Sei also $q \in \partial_{\overline{z}}^n \overset{\circ}{\widetilde{\mathrm{W}}}{}^{n,2}(\mathrm{G};\mathbb{C})$. Zu diesem q existiert dann ein $r \in \overset{\circ}{\widetilde{\mathrm{W}}}{}^{n,2}(\mathrm{G};\mathbb{C})$ mit

$$\partial_{\overline{z}}^n r = q \text{ in G und } \partial_{\overline{z}}^{\nu} r = 0 \text{ auf } \partial\mathrm{G} \text{ für } 0 \leq \nu \leq n-1.$$

Für $\varphi \in \mathcal{A}O_{n,2}(\mathrm{G};\mathbb{C})$ folgt mit einem zum Beweis von **Satz 3.4** analogen Schluss

$$\langle q, \varphi \rangle = 0, \quad \text{also} \quad q \in \mathcal{A}O_{n,2}^{\perp}(\mathrm{G};\mathbb{C}).$$

Sei nun für $q \in \mathcal{A}O_{n,2}^{\perp}(\mathrm{G};\mathbb{C})$ das folgende Problem betrachtet:

$$\partial_{\overline{z}}^n r = q \text{ in G und } \partial_{\overline{z}}^{\nu} r = 0 \text{ auf } \partial\mathrm{G} \text{ für } 0 \leq \nu \leq n-1. \tag{49}$$

Eine Lösung von (49) ist gegeben durch

$$r(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}} \partial_z^n g_n(z,\zeta)\partial_{\overline{\zeta}}^n r(\zeta)d\xi d\eta = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}} \partial_z^n g_n(z,\zeta)q(\zeta)d\xi d\eta.$$

Denn im Sinne der schwachen Ableitung ist in G

$$\partial_{\overline{z}}^{\nu} r(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}} \partial_{\overline{z}}^{\nu}\partial_z^n g_n(z,\zeta)q(\zeta)d\xi d\eta, \quad 0 \leq \nu \leq n-1,$$

und wegen (26), S. 14, gilt

$$\partial_{\overline{z}}^{\nu} r = 0 \text{ auf } \partial\mathrm{G} \text{ für } 0 \leq \nu \leq n-1.$$

Ebenfalls im Sinne der schwachen Ableitung gilt

$$\partial_{\overline{z}}^{n} r = q \text{ in } \mathrm{G},$$

was aus den entsprechenden Eigenschaften des T–Operators folgt (s. [Bege94], [Veku62]). Damit ist

$$r \in \overset{\circ}{\widetilde{\mathrm{W}}}{}^{n,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}), \quad \text{also} \quad q \in \partial_{\overline{z}}^{n} \overset{\circ}{\widetilde{\mathrm{W}}}{}^{n,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}). \quad \square$$

3.4 Darstellungen mit gemischten Ableitungen der Greenschen Funktionen höherer Ordnung

In diesem Abschnitt wird nun eine Verallgemeinerung von **Satz 1.8**, S. 15, formuliert und bewiesen, die zudem natürlicherweise auch die Aussagen von **Satz 3.2**, S. 42, und **Satz 3.3**, S. 43, als Spezialfälle enthält.

Satz 3.7 *Sei* $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ *ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und Greenscher Funktion höherer Ordnung* g_k, $k \in \mathbb{N}$. *Für beliebige* $n, m \in \mathbb{N}_0$ *mit* $n + m = k$ *hat dann jedes* $\omega \in C^k(\mathrm{G};\mathbb{C}) \cap C^{k-1}(\overline{\mathrm{G}};\mathbb{C})$ *für* $z \in \mathrm{G}$ *die Darstellung*

$$\omega(z) = \frac{(-1)^k}{\pi} \int\limits_{\mathrm{G}} \omega(\zeta) \partial_z^m \partial_{\overline{z}}^n \partial_\zeta^n \partial_{\overline{\zeta}}^m g_k(z,\zeta) d\xi d\eta$$
$$- \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathrm{G}} \partial_z^m \partial_{\overline{z}}^n g_k(z,\zeta) \partial_\zeta^n \partial_{\overline{\zeta}}^m \omega(\zeta) d\xi d\eta.$$

Bemerkung
Für $n = 0$ bzw. $m = 0$ fällt die Aussage von **Satz 3.7** mit der von **Satz 3.2** bzw. von **Satz 3.3** zusammen.

Zum **Beweis** von **Satz 3.7**.

Nach der Aussage von **Satz 1.7**, S. 12, hat ω in G die Darstellung

$$\omega(z) = \mathrm{T}_{\mathrm{G},\mu_k,\nu_k} \partial_z^{\mu_k} \partial_{\overline{z}}^{\nu_k} \omega(z) + \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{2} \int\limits_{\partial\mathrm{G}} K_{\mu_{m+1},\nu_{m+1}}(z-\zeta) \partial_\zeta^{\mu_m} \partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_m} \omega(\zeta)$$
$$\times d\left[(i\zeta)^{\nu_{m+1}-\nu_m}(-i\overline{\zeta})^{\mu_{m+1}-\mu_m}\right],$$

wobei (μ_m, ν_m), $0 \le m \le k$, eine Kette von Bi–Indizes ist mit (vgl. S. 12)

$$\mu_0 = \nu_0 = 0,\ \mu_{m-1} \le \mu_m,\ \nu_{m-1} \le \nu_m,\ \mu_{m-1} + \nu_{m-1} + 1 = \mu_m + \nu_m,\ 1 \le m \le k.$$

Wie bei dem in der Einleitung behandelten Fall für $k = 2$, stellt sich auch im allgemeinen Fall $k \in \mathbb{N}$ heraus, dass sich die Integralkerne der Summanden obiger Summe, ausgedrückt durch geeignete Ableitungen der Greenschen Funktion höherer Ordnung g_k, bis auf einen bestimmten Teil des ersten und des letzten Summanden wegheben. Dies soll jetzt ausgeführt werden. Dazu sind zunächst die Integralkerne $K_{\mu_{m+1},\nu_{m+1}}(z-\zeta)$ der Summanden mittels geeigneter Ableitungen der Fundamentallösung $\widetilde{\omega}_k$ von Δ^k in G (s. (13), S. 9) auszudrücken. Die folgende Fallunterscheidung, die Ketten der Bi–Indizes betreffend, ist dabei deshalb sinnvoll, weil, salopp gesprochen, die Übergänge in den Ketten von $(\mu_\rho, \nu_\rho) = (1, \nu_\rho)$ zu $(\mu_{\rho-1}, \nu_{\rho-1}) = (0, \nu_{\rho-1})$ bzw. von $(\mu_\rho, \nu_\rho) = (\mu_\rho, 1)$ zu $(\mu_{\rho-1}, \nu_{\rho-1}) = (\mu_{\rho-1}, 0)$ die Betrachtung von strukturell anderen Ableitungen von $\widetilde{\omega}_k$ notwendig macht, als beispielsweise die Übergänge $(\mu_\rho, \nu_\rho) = (\mu_{\rho-1}+1, \nu_{\rho-1})$ bzw. $(\mu_\rho, \nu_\rho) = (\mu_{\rho-1}, \nu_{\rho-1}+1)$ für $\mu_{\rho-1}, \nu_{\rho-1} \ge 1$.

Zur Unterscheidung der Ketten der Bi–Indizes.

Für die Ketten (μ_m, ν_m), $0 \le m \le k$, mit

$$\mu_m = 0,\ \nu_m = m \quad \text{bzw.} \quad \mu_m = m,\ \nu_m = 0$$

fällt die Behauptung mit **Satz 3.2**, S. 42, bzw. **Satz 3.3**, S. 43, zusammen.

Für die übrigen Ketten sind entsprechend obiger Ausführungen und **Definition 1.4**, S. 12, offenbar die folgenden Fälle zu betrachten:

I. $\quad k-2 \le m \le k-1, \quad 2 \le k,$

1) $(\mu_k, \nu_k) = (\mu_{k-1}+1, \nu_{k-1}), \quad (\mu_{k-1}, \nu_{k-1}) = (\mu_{k-2}, \nu_{k-2}+1),$
   $\mu_{k-1}, \nu_{k-1} \ge 1,$
2) $(\mu_k, \nu_k) = (\mu_{k-1}+1, \nu_{k-1}), \quad (\mu_{k-1}, \nu_{k-1}) = (\mu_{k-2}+1, \nu_{k-2}),$
   $\mu_{k-1}, \nu_{k-1} \ge 1,$
3) $(\mu_k, \nu_k) = (\mu_{k-1}, \nu_{k-1}+1), \quad (\mu_{k-1}, \nu_{k-1}) = (\mu_{k-2}, \nu_{k-2}+1),$
   $\mu_{k-1}, \nu_{k-1} \ge 1,$
4) $(\mu_k, \nu_k) = (\mu_{k-1}, \nu_{k-1}+1), \quad (\mu_{k-1}, \nu_{k-1}) = (\mu_{k-2}+1, \nu_{k-2}),$
   $\mu_{k-1}, \nu_{k-1} \ge 1,$
5) $(\mu_k, \nu_k) = (1, \nu_k), \quad (\mu_{k-1}, \nu_{k-1}) = (0, \nu_k),$
6) $(\mu_k, \nu_k) = (\mu_k, 1), \quad (\mu_{k-1}, \nu_{k-1}) = (\mu_k, 0),$

II. $\qquad \rho-2\le m\le \rho-1,\quad 4\le\rho\le k-2,\quad 6\le k,$

1) $(\mu_\rho,\nu_\rho)=(\mu_{\rho-1}+1,\nu_{\rho-1}),\quad (\mu_{\rho-1},\nu_{\rho-1})=(\mu_{\rho-2},\nu_{\rho-2}+1),$
$\mu_{\rho-1},\nu_{\rho-1}\ge 1,$
2) $(\mu_\rho,\nu_\rho)=(\mu_{\rho-1}+1,\nu_{\rho-1}),\quad (\mu_{\rho-1},\nu_{\rho-1})=(\mu_{\rho-2}+1,\nu_{\rho-2}),$
$\mu_{\rho-1},\nu_{\rho-1}\ge 1,$
3) $(\mu_\rho,\nu_\rho)=(\mu_{\rho-1},\nu_{\rho-1}+1),\quad (\mu_{\rho-1},\nu_{\rho-1})=(\mu_{\rho-2},\nu_{\rho-2}+1),$
$\mu_{\rho-1},\nu_{\rho-1}\ge 1,$
4) $(\mu_\rho,\nu_\rho)=(\mu_{\rho-1},\nu_{\rho-1}+1),\quad (\mu_{\rho-1},\nu_{\rho-1})=(\mu_{\rho-2}+1,\nu_{\rho-2}),$
$\mu_{\rho-1},\nu_{\rho-1}\ge 1,$
5) $(\mu_\rho,\nu_\rho)=(1,\nu_\rho),\quad (\mu_{\rho-1},\nu_{\rho-1})=(0,\nu_\rho),$
6) $(\mu_\rho,\nu_\rho)=(\mu_\rho,1),\quad (\mu_{\rho-1},\nu_{\rho-1})=(\mu_\rho,0),$

III. $\qquad 0\le m\le 1,$

1) $(\mu_2,\nu_2)=(1,1),\quad (\mu_1,\nu_1)=(0,1),$
2) $(\mu_2,\nu_2)=(1,1),\quad (\mu_1,\nu_1)=(1,0).$

Zu den Ableitungen der Fundamentallösung $\widetilde{\omega}_k$.

Für $z\ne\zeta$ und $0\le m\le k-1$ ist

$$
\begin{aligned}
\partial_z^m\widetilde{\omega}_k(z,\zeta) &= -\frac{(\overline{z-\zeta})^{k-1}}{(k-1)!^2}\left[\sum_{\ell=0}^{m-1}\binom{m}{\ell}\left\{\partial_z^{m-\ell}\log|z-\zeta|^2\right\}\left\{\partial_z^{\ell}(z-\zeta)^{k-1}\right\}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\log|z-\zeta|^2\frac{(k-1)!}{(k-1-m)!}(z-\zeta)^{k-1-m}\right]\\
&= -\frac{(\overline{z-\zeta})^{k-1}}{(k-1)!^2}\sum_{\ell=0}^{m-1}\binom{m}{\ell}(-1)^{m-\ell-1}\frac{(m-\ell-1)!}{(z-\zeta)^{m-\ell}}\frac{(k-1)!}{(k-1-\ell)!}(z-\zeta)^{k-1-\ell}\\
&\qquad\qquad -\frac{(\overline{z-\zeta})^{k-1}}{(k-1)!^2}\log|z-\zeta|^2\frac{(k-1)!}{(k-1-m)!}(z-\zeta)^{k-1-m}\\
&= -\frac{(\overline{z-\zeta})^{k-1}}{(k-1)!}(z-\zeta)^{k-1-m}\\
&\qquad\qquad\times\left[\sum_{\ell=0}^{m-1}\binom{m}{\ell}(-1)^{m-\ell-1}\frac{(m-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!}+\frac{\log|z-\zeta|^2}{(k-1-m)!}\right]\\
&= \frac{(z-\zeta)^{k-1-m}(\overline{z-\zeta})^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{\ell=0}^{m-1}\binom{m}{\ell}(-1)^{m-\ell}\frac{(m-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!}\\
&\qquad\qquad -\frac{(z-\zeta)^{k-1-m}(\overline{z-\zeta})^{k-1}}{(k-1)!(k-1-m)!}\log|z-\zeta|^2.
\end{aligned}
$$

Analog ist für $z \neq \zeta$ und $0 \leq n \leq k-1$

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar z}^n \partial_z^m \widetilde{\omega}_k(z,\zeta) = &\frac{(z-\zeta)^{k-1-m}(\overline{z-\zeta})^{k-1-n}}{(k-1-n)!} \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{m}{\ell} (-1)^{m-\ell} \frac{(m-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!} \\
&+ \frac{(z-\zeta)^{k-1-m}(\overline{z-\zeta})^{k-1-n}}{(k-1-m)!} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \frac{(n-j-1)!}{(k-1-j)!} \\
&- \frac{(z-\zeta)^{k-1-m}(\overline{z-\zeta})^{k-1-n}}{(k-1-m)!(k-1-n)!} \log|z-\zeta|^2.
\end{aligned} \tag{50}$$

Wiederholtes Anwenden obiger Argumentation führt zu folgendem

Lemma 3.3 *Für $z \neq \zeta$ und $m, n, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$ mit*

$$0 \leq m, n \leq k-1, \quad 0 \leq \alpha \leq k-1-m, \quad 0 \leq \beta \leq k-1-n$$

gilt

$$\begin{aligned}
&\partial_{\bar\zeta}^\beta \partial_\zeta^\alpha \partial_{\bar z}^n \partial_z^m \widetilde{\omega}_k(z,\zeta) \\
&= (-1)^{\alpha+\beta} \frac{(z-\zeta)^{k-1-m-\alpha}(\overline{z-\zeta})^{k-1-n-\beta}}{(k-1-m-\alpha)!(k-1-n-\beta)!} \\
&\quad \times \Bigg[(k-1-m)! \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{m}{\ell} (-1)^{m-\ell} \frac{(m-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!} \\
&\quad\quad + (k-1-n)! \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \frac{(n-j-1)!}{(k-1-j)!} \Bigg] \\
&\quad + (-1)^{\beta+1} \frac{(z-\zeta)^{k-1-m-\alpha}(\overline{z-\zeta})^{k-1-n-\beta}}{(k-1-n-\beta)!} \\
&\quad\quad \times \sum_{p=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha}{p} (-1)^{p-1} \frac{(\alpha-p-1)!}{(k-1-m-p)!} \\
&\quad + (-1)^{\alpha+1} \frac{(z-\zeta)^{k-1-m-\alpha}(\overline{z-\zeta})^{k-1-n-\beta}}{(k-1-m-\alpha)!} \\
&\quad\quad \times \sum_{q=0}^{\beta-1} \binom{\beta}{q} (-1)^{q-1} \frac{(\beta-q-1)!}{(k-1-n-q)!} \\
&\quad + (-1)^{\alpha+\beta+1} \frac{(z-\zeta)^{k-1-m-\alpha}(\overline{z-\zeta})^{k-1-n-\beta}}{(k-1-m-\alpha)!(k-1-n-\beta)!} \log|z-\zeta|^2.
\end{aligned}$$

Um eine spätere Argumentation zu vereinfachen, wird noch die Aussage von **Lemma 3.3** in der Situation von Ketten von Bi–Indizes als Folgerung notiert.

Korrolar 3.1 *Sei* (μ_m, ν_m), $0 \leq m \leq k$, $k \in \mathbb{N}$, *eine Kette von Bi–Indizes mit den in den Voraussetzungen von* **Satz 1.7**, S. 12, *formulierten Eigenschaften. Für* $z \neq \zeta$ *und* $1 \leq \mu_k, \nu_k \leq k-1$ *gilt unter Beachtung von* $\mu_k + \nu_k = k$ *für* $1 \leq \mu_\rho \leq \mu_k$, $1 \leq \nu_\rho \leq \nu_k$, $1 \leq \rho \leq k$:

$$
\begin{aligned}
&\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-\nu_\rho} \partial_\zeta^{\mu_k-\mu_\rho} \partial_{\overline{z}}^{\mu_k} \partial_z^{\nu_k} \widetilde{\omega}_k(z,\zeta) \\
&\quad = (-1)^{k-\mu_\rho-\nu_\rho} \frac{(z-\zeta)^{\mu_\rho-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_\rho-1}}{(\mu_\rho-1)!(\nu_\rho-1)!} \\
&\qquad \times \Bigg[(\mu_k-1)! \sum_{\ell=0}^{\nu_k-1} \binom{\nu_k}{\ell} (-1)^{\nu_k-\ell} \frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!} \\
&\qquad\quad + (\nu_k-1)! \sum_{j=0}^{\mu_k-1} \binom{\mu_k}{j} (-1)^{\mu_k-j} \frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-1-j)!} \Bigg] \\
&\quad +(-1)^{\nu_k-\nu_\rho+1} \frac{(z-\zeta)^{\mu_\rho-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_\rho-1}}{(\nu_\rho-1)!} \\
&\qquad \times \sum_{p=0}^{\mu_k-\mu_\rho-1} \binom{\mu_k-\mu_\rho}{p} (-1)^{p-1} \frac{(\mu_k-\mu_\rho-p-1)!}{(\mu_k-1-p)!} \\
&\quad +(-1)^{\mu_k-\mu_\rho+1} \frac{(z-\zeta)^{\mu_\rho-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_\rho-1}}{(\mu_\rho-1)!} \\
&\qquad \times \sum_{q=0}^{\nu_k-\nu_\rho-1} \binom{\nu_k-\nu_\rho}{q} (-1)^{q-1} \frac{(\nu_k-\nu_\rho-q-1)!}{(\nu_k-1-q)!} \\
&\quad +(-1)^{k-\mu_\rho-\nu_\rho+1} \frac{(z-\zeta)^{\mu_\rho-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_\rho-1}}{(\mu_\rho-1)!(\nu_\rho-1)!} \log|z-\zeta|^2.
\end{aligned}
$$

Zur Verifikation der Fälle!

• Zu I.1):

Mit (50), S. 51, für $m = \nu_k$ und $n = \mu_k$ gilt für $z \neq \zeta$

$$
\begin{aligned}
\pi \mathrm{K}_{\mu_k,\nu_k}(z-\zeta) &= \frac{(z-\zeta)^{\mu_k-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}}{(\mu_k-1)!(\nu_k-1)!} \log|z-\zeta|^2 \\
&\qquad - \frac{(z-\zeta)^{\mu_k-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}}{(\mu_k-1)!(\nu_k-1)!} \left[\sum_{y_1=1}^{\mu_k-1} \frac{1}{y_1} + \sum_{y_2=1}^{\nu_k-1} \frac{1}{y_2} \right] \\
&= -\partial_{\overline{z}}^{\mu_k} \partial_z^{\nu_k} \widetilde{\omega}_k(z,\zeta) + (z-\zeta)^{\mu_k-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1} \\
&\qquad \times \Bigg[\frac{1}{(\nu_k-1)!} \sum_{\ell=0}^{\nu_k-1} \binom{\nu_k}{\ell} (-1)^{\nu_k-\ell} \frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{(\mu_k-1)!}\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-1-j)!}\Bigg]$$
$$-\frac{(z-\zeta)^{\mu_k-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}}{(\mu_k-1)!(\nu_k-1)!}\left[\sum_{y_1=1}^{\mu_k-1}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_k-1}\frac{1}{y_2}\right].$$

Unter Beachtung von **Definition 1.2**, S. 10, gilt also

$$\frac{1}{2}\int_{\partial G}\mathrm{K}_{\mu_k,\nu_k}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_k-1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-1}\omega(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{i}$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\Big\{\partial_\zeta^{\mu_k-1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-1}\omega(\zeta)\Big\}\Big\{\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)-\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}g_k(z,\zeta)$$
$$+(z-\zeta)^{\mu_k-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}\Bigg[\frac{1}{(\nu_k-1)!}\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!}$$
$$+\frac{1}{(\mu_k-1)!}\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-1-j)!}\Bigg]$$
$$-\frac{(z-\zeta)^{\mu_k-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}}{(\mu_k-1)!(\nu_k-1)!}\left[\sum_{y_1=1}^{\mu_k-1}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_k-1}\frac{1}{y_2}\right]\Bigg\}d\overline{\zeta}.$$

Wegen (26), S. 14, ist $\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}g_k(z,\zeta)=0$ für $\zeta\in\partial G$. Da weiterhin h_k regulär ist, kann voranstehendes Integral mit dem **Integralsatz von Gauß 1.1**, S. 4, ausgewertet werden. Es folgt also weiter

$$\frac{1}{2}\int_{\partial G}\mathrm{K}_{\mu_k,\nu_k}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_k-1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-1}\omega(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{i}$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int_G\partial_\zeta\Bigg(\Big\{\partial_\zeta^{\mu_k-1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-1}\omega(\zeta)\Big\}\Big\{\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)+(z-\zeta)^{\mu_k-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}$$
$$\times\Bigg[\frac{1}{(\nu_k-1)!}\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!}$$
$$+\frac{1}{(\mu_k-1)!}\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-1-j)!}\Bigg]$$
$$-\frac{(z-\zeta)^{\mu_k-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}}{(\mu_k-1)!(\nu_k-1)!}\left[\sum_{y_1=1}^{\mu_k-1}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_k-1}\frac{1}{y_2}\right]\Big\}\Bigg)d\xi d\eta$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int_G\Big\{\partial_\zeta^{\mu_k-1+1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-1}\omega(\zeta)\Big\}\Big\{\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)+(z-\zeta)^{\mu_k-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}$$

$$
\times\left[\frac{1}{(\nu_k-1)!}\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!}\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{(\mu_k-1)!}\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-1-j)!}\right]
$$

$$
-\frac{(z-\zeta)^{\mu_k-1}\overline{(z-\zeta)}^{\nu_k-1}}{(\mu_k-1)!(\nu_k-1)!}\left[\sum_{y_1=1}^{\mu_k-1}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_k-1}\frac{1}{y_2}\right]\Bigg\}d\xi d\eta
$$

$$
-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\left\{\partial_\zeta^{\mu_{k-1}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{k-1}}\omega(\zeta)\right\}\Bigg\{\partial_\zeta\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)-(\mu_k-1)(z-\zeta)^{\mu_k-2}\overline{(z-\zeta)}^{\nu_k-1}
$$

$$
\times\left[\frac{1}{(\nu_k-1)!}\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!}\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{(\mu_k-1)!}\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-1-j)!}\right]
$$

$$
+\frac{(z-\zeta)^{\mu_k-2}\overline{(z-\zeta)}^{\nu_k-1}}{(\mu_k-2)!(\nu_k-1)!}\left[\sum_{y_1=1}^{\mu_k-1}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_k-1}\frac{1}{y_2}\right]\Bigg\}d\xi d\eta. \tag{51}
$$

Für den $(k-2)$–ten Summanden gilt unter Beachtung von

$$
\mu_k=\mu_{k-1}+1,\ \nu_k=\nu_{k-1},\ \mu_{k-1}=\mu_{k-2}\text{ und }\nu_{k-1}=\nu_{k-2}+1
$$

$$
\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathrm{G}}\mathrm{K}_{\mu_{k-1},\nu_{k-1}}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_{k-2}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{k-2}}\omega(\zeta)id\zeta
$$

$$
=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathrm{G}}\left\{\partial_\zeta^{\mu_{k-2}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{k-2}}\omega(\zeta)\right\}\Bigg\{\frac{(z-\zeta)^{\mu_{k-1}-1}\overline{(z-\zeta)}^{\nu_{k-1}-1}}{(\mu_{k-1}-1)!(\nu_{k-1}-1)!}\log|z-\zeta|^2
$$

$$
-\frac{(z-\zeta)^{\mu_{k-1}-1}\overline{(z-\zeta)}^{\nu_{k-1}-1}}{(\mu_{k-1}-1)!(\nu_{k-1}-1)!}\left[\sum_{y_1=1}^{\mu_{k-1}-1}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_{k-1}-1}\frac{1}{y_2}\right]\Bigg\}d\zeta
$$

$$
=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathrm{G}}\left\{\partial_\zeta^{\mu_{k-2}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{k-2}}\omega(\zeta)\right\}\Bigg\{\frac{(z-\zeta)^{\mu_k-2}\overline{(z-\zeta)}^{\nu_k-1}}{(\mu_k-2)!(\nu_k-1)!}\log|z-\zeta|^2
$$

$$
-\frac{(z-\zeta)^{\mu_k-2}\overline{(z-\zeta)}^{\nu_k-1}}{(\mu_k-2)!(\nu_k-1)!}\left[\sum_{y_1=1}^{\mu_k-2}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_k-1}\frac{1}{y_2}\right]\Bigg\}d\zeta. \tag{52}
$$

Unter Berücksichtigung von $\mu_k+\nu_k=k$ liefert Einsetzen von (vgl. **Lemma 3.3**, S. 51)

$$
\frac{(z-\zeta)^{\mu_k-2}\overline{(z-\zeta)}^{\nu_k-1}}{(\mu_k-2)!(\nu_k-1)!}\log|z-\zeta|^2
$$

$$= \partial_\zeta \partial_{\overline{z}}^{\mu_k} \partial_z^{\nu_k} \widetilde{\omega}_k(z,\zeta) - \frac{1}{\mu_k - 1} \frac{(z-\zeta)^{\mu_k-2}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}}{(\mu_k-2)!(\nu_k-1)!}$$
$$+(\mu_k-1)(z-\zeta)^{\mu_k-2}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}$$
$$\times \left[\frac{1}{(\nu_k-1)!} \sum_{\ell=0}^{\nu_k-1} \binom{\nu_k}{\ell} (-1)^{\nu_k-\ell} \frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(\mu_k-1)!} \sum_{j=0}^{\mu_k-1} \binom{\mu_k}{j} (-1)^{\mu_k-j} \frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-1-j)!} \right]$$

in (52) wieder unter Beachtung von **Definition 1.2**, S. 10, und (26), S. 14,

$$\frac{1}{2} \int_{\partial G} \mathrm{K}_{\mu_{k-1},\nu_{k-1}}(z-\zeta) \partial_\zeta^{\mu_k-2} \partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-2} \omega(\zeta) i d\zeta$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \left\{ \partial_\zeta^{\mu_k-2} \partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-2} \omega(\zeta) \right\} \left\{ \partial_\zeta \partial_{\overline{z}}^{\mu_k} \partial_z^{\nu_k} h_k(z,\zeta) - (\mu_k-1)(z-\zeta)^{\mu_k-2}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1} \right.$$
$$\times \left[\frac{1}{(\nu_k-1)!} \sum_{\ell=0}^{\nu_k-1} \binom{\nu_k}{\ell} (-1)^{\nu_k-\ell} \frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(\mu_k-1)!} \sum_{j=0}^{\mu_k-1} \binom{\mu_k}{j} (-1)^{\mu_k-j} \frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-1-j)!} \right]$$
$$\left. + \frac{(z-\zeta)^{\mu_k-2}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}}{(\mu_k-2)!(\nu_k-1)!} \left[\frac{1}{\mu_k-1} + \sum_{y_1=1}^{\mu_k-2} \frac{1}{y_1} + \sum_{y_2=1}^{\nu_k-1} \frac{1}{y_2} \right] \right\} d\zeta.$$

Mit dem **Integralsatz von Gauß 1.1**, S. 4, folgt weiter

$$\frac{1}{2} \int_{\partial G} \mathrm{K}_{\mu_{k-1},\nu_{k-1}}(z-\zeta) \partial_\zeta^{\mu_k-2} \partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-2} \omega(\zeta) i d\zeta$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{G} \partial_{\overline{\zeta}} \left(\left\{ \partial_\zeta^{\mu_k-2} \partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-2} \omega(\zeta) \right\} \right.$$
$$\times \left\{ \partial_\zeta \partial_{\overline{z}}^{\mu_k} \partial_z^{\nu_k} h_k(z,\zeta) - (\mu_k-1)(z-\zeta)^{\mu_k-2}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1} \right.$$
$$\times \left[\frac{1}{(\nu_k-1)!} \sum_{\ell=0}^{\nu_k-1} \binom{\nu_k}{\ell} (-1)^{\nu_k-\ell} \frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(\mu_k-1)!} \sum_{j=0}^{\mu_k-1} \binom{\mu_k}{j} (-1)^{\mu_k-j} \frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-1-j)!} \right]$$
$$\left. \left. + \frac{(z-\zeta)^{\mu_k-2}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}}{(\mu_k-2)!(\nu_k-1)!} \left[\frac{1}{\mu_k-1} + \sum_{y_1=1}^{\mu_k-2} \frac{1}{y_1} + \sum_{y_2=1}^{\nu_k-1} \frac{1}{y_2} \right] \right\} \right) d\xi d\eta$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int\limits_{G} \Big\{ \partial_\zeta^{\mu_{k-2}} \partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{k-2}+1} \omega(\zeta) \Big\} \\
&\qquad \times \Bigg\{ \partial_\zeta \partial_{\overline{z}}^{\mu_k} \partial_z^{\nu_k} h_k(z,\zeta) - (\mu_k - 1)(z-\zeta)^{\mu_k - 2} (\overline{z-\zeta})^{\nu_k - 1} \\
&\qquad\qquad \times \Bigg[\frac{1}{(\nu_k - 1)!} \sum_{\ell=0}^{\nu_k - 1} \binom{\nu_k}{\ell} (-1)^{\nu_k - \ell} \frac{(\nu_k - \ell - 1)!}{(k-1-\ell)!} \\
&\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{(\mu_k - 1)!} \sum_{j=0}^{\mu_k - 1} \binom{\mu_k}{j} (-1)^{\mu_k - j} \frac{(\mu_k - j - 1)!}{(k-1-j)!} \Bigg] \\
&\qquad + \frac{(z-\zeta)^{\mu_k - 2} (\overline{z-\zeta})^{\nu_k - 1}}{(\mu_k - 2)!(\nu_k - 1)!} \Bigg[\frac{1}{\mu_k - 1} + \sum_{y_1=1}^{\mu_k - 2} \frac{1}{y_1} + \sum_{y_2=1}^{\nu_k - 1} \frac{1}{y_2} \Bigg] \Bigg\} d\xi d\eta \\
&+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{G} \Big\{ \partial_\zeta^{\mu_{k-2}} \partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{k-2}} \omega(\zeta) \Big\} \\
&\qquad \times \partial_{\overline{\zeta}} \Bigg\{ \partial_\zeta \partial_{\overline{z}}^{\mu_k} \partial_z^{\nu_k} h_k(z,\zeta) - (\mu_k - 1)(z-\zeta)^{\mu_k - 2} (\overline{z-\zeta})^{\nu_k - 1} \\
&\qquad\qquad \times \Bigg[\frac{1}{(\nu_k - 1)!} \sum_{\ell=0}^{\nu_k - 1} \binom{\nu_k}{\ell} (-1)^{\nu_k - \ell} \frac{(\nu_k - \ell - 1)!}{(k-1-\ell)!} \\
&\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{(\mu_k - 1)!} \sum_{j=0}^{\mu_k - 1} \binom{\mu_k}{j} (-1)^{\mu_k - j} \frac{(\mu_k - j - 1)!}{(k-1-j)!} \Bigg] \\
&\qquad + \frac{(z-\zeta)^{\mu_k - 2} (\overline{z-\zeta})^{\nu_k - 1}}{(\mu_k - 2)!(\nu_k - 1)!} \Bigg[\frac{1}{\mu_k - 1} + \sum_{y_1=1}^{\mu_k - 2} \frac{1}{y_1} + \sum_{y_2=1}^{\nu_k - 1} \frac{1}{y_2} \Bigg] \Bigg\} d\xi d\eta.
\end{aligned}
$$

Mit (51), S. 54, und unter Beachtung von $\mu_{k-1} = \mu_k - 1$ bzw. $\nu_{k-1} = \nu_k$ gilt damit

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int\limits_{\partial G} \mathrm{K}_{\mu_k,\nu_k}(z-\zeta) \partial_\zeta^{\mu_{k-1}} \partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{k-1}} \omega(\zeta) \frac{d\overline{\zeta}}{i} + \frac{1}{2} \int\limits_{\partial G} \mathrm{K}_{\mu_{k-1},\nu_{k-1}}(z-\zeta) \partial_\zeta^{\mu_{k-2}} \partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{k-2}} \omega(\zeta) i d\zeta \\
&\quad = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{G} \Big\{ \partial_\zeta^{\mu_k} \partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k} \omega(\zeta) \Big\} \Bigg\{ \partial_{\overline{z}}^{\mu_k} \partial_z^{\nu_k} h_k(z,\zeta) + (z-\zeta)^{\mu_k - 1} (\overline{z-\zeta})^{\nu_k - 1} \\
&\qquad\qquad \times \Bigg[\frac{1}{(\nu_k - 1)!} \sum_{\ell=0}^{\nu_k - 1} \binom{\nu_k}{\ell} (-1)^{\nu_k - \ell} \frac{(\nu_k - \ell - 1)!}{(k-1-\ell)!} \\
&\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{(\mu_k - 1)!} \sum_{j=0}^{\mu_k - 1} \binom{\mu_k}{j} (-1)^{\mu_k - j} \frac{(\mu_k - j - 1)!}{(k-1-j)!} \Bigg]
\end{aligned}
$$

$$-\frac{(z-\zeta)^{\mu_k-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}}{(\mu_k-1)!(\nu_k-1)!}\left[\sum_{y_1=1}^{\mu_k-1}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_k-1}\frac{1}{y_2}\right]\Bigg\}d\xi d\eta$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\left\{\partial_\zeta^{\mu_{k-2}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{k-2}}\omega(\zeta)\right\}$$

$$\times\partial_{\overline{\zeta}}\Bigg\{\partial_\zeta\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)-(\mu_k-1)(z-\zeta)^{\mu_k-2}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}$$

$$\times\left[\frac{1}{(\nu_k-1)!}\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(\mu_k-1)!}\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-1-j)!}\right]$$

$$+\frac{(z-\zeta)^{\mu_k-2}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}}{(\mu_k-2)!(\nu_k-1)!}\left[\frac{1}{\mu_k-1}+\sum_{y_1=1}^{\mu_k-2}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_k-1}\frac{1}{y_2}\right]\Bigg\}d\xi d\eta. \qquad (53)$$

Zu I.2):

Beim $(k-1)$–ten Summanden ändert sich nichts. Für den $(k-2)$–ten Summanden gilt unter Beachtung von $\mu_k=\mu_{k-1}+1$, $\nu_k=\nu_{k-1}$, $\mu_{k-1}=\mu_{k-2}+1$ und $\nu_{k-1}=\nu_{k-2}$ mit zum Fall I.1) analogen Betrachtungen

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathrm{G}}\mathrm{K}_{\mu_{k-1},\nu_{k-1}}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_{k-2}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{k-2}}\omega(\zeta)d(-i\overline{\zeta})$$

$$=\frac{1}{2i}\int\limits_{\partial\mathrm{G}}\mathrm{K}_{\mu_{k-1},\nu_{k-1}}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_{k-1}-1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{k-1}}\omega(\zeta)d\overline{\zeta}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathrm{G}}\left\{\partial_\zeta^{\mu_{k-1}-1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{k-1}}\omega(\zeta)\right\}\Bigg\{\frac{(z-\zeta)^{\mu_k-2}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}}{(\mu_k-2)!(\nu_k-1)!}\log|z-\zeta|^2$$

$$-\frac{(z-\zeta)^{\mu_k-2}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}}{(\mu_k-2)!(\nu_k-1)!}\left[\sum_{y_1=1}^{\mu_k-2}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_k-1}\frac{1}{y_2}\right]\Bigg\}d\overline{\zeta}$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\partial_\zeta\Bigg(\left\{\partial_\zeta^{\mu_{k-1}-1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{k-1}}\omega(\zeta)\right\}\Bigg\{(-1)\partial_\zeta\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)$$

$$+(\mu_k-1)(z-\zeta)^{\mu_k-2}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}$$

$$\times\left[\frac{1}{(\nu_k-1)!}\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!}\right.$$

$$+\frac{1}{(\mu_k-1)!}\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-1-j)!}\Bigg]$$

$$-\frac{(z-\zeta)^{\mu_k-2}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}}{(\mu_k-2)!(\nu_k-1)!}\left[\frac{1}{\mu_k-1}+\sum_{y_1=1}^{\mu_k-2}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_k-1}\frac{1}{y_2}\right]\Bigg\}\Bigg)\,d\xi d\eta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}}\Big\{\partial_\zeta^{\mu_{k-1}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{k-1}}\omega(\zeta)\Big\}\Bigg\{\partial_\zeta\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)$$

$$-(\mu_k-1)(z-\zeta)^{\mu_k-2}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}$$

$$\times\Bigg[\frac{1}{(\nu_k-1)!}\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!}$$

$$+\frac{1}{(\mu_k-1)!}\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-1-j)!}\Bigg]$$

$$+\frac{(z-\zeta)^{\mu_k-2}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}}{(\mu_k-2)!(\nu_k-1)!}\left[\frac{1}{\mu_k-1}+\sum_{y_1=1}^{\mu_k-2}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_k-1}\frac{1}{y_2}\right]\Bigg\}d\xi d\eta$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}}\Big\{\partial_\zeta^{\mu_{k-1}-1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{k-1}}\omega(\zeta)\Big\}\partial_\zeta\Bigg\{\partial_\zeta\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)$$

$$-(\mu_k-1)(z-\zeta)^{\mu_k-2}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}$$

$$\times\Bigg[\frac{1}{(\nu_k-1)!}\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!}$$

$$+\frac{1}{(\mu_k-1)!}\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-1-j)!}\Bigg]$$

$$+\frac{(z-\zeta)^{\mu_k-2}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}}{(\mu_k-2)!(\nu_k-1)!}\left[\frac{1}{\mu_k-1}+\sum_{y_1=1}^{\mu_k-2}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_k-1}\frac{1}{y_2}\right]\Bigg\}d\xi d\eta.$$

Dies in Verbindung mit (51), S. 54, liefert analog zu Fall I.1)

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\mathrm{G}}\mathrm{K}_{\mu_k,\nu_k}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_{k-1}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{k-1}}\omega(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{i}+\frac{1}{2}\int_{\partial\mathrm{G}}\mathrm{K}_{\mu_{k-1},\nu_{k-1}}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_{k-2}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{k-2}}\omega(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{i}$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}}\Big\{\partial_\zeta^{\mu_k}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k}\omega(\zeta)\Big\}\Bigg\{\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)+(z-\zeta)^{\mu_k-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}$$

$$\times\Bigg[\frac{1}{(\nu_k-1)!}\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{(\mu_k-1)!}\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-1-j)!}\Bigg]\\
&\qquad - \frac{(z-\zeta)^{\mu_k-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}}{(\mu_k-1)!(\nu_k-1)!}\left[\sum_{y_1=1}^{\mu_k-1}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_k-1}\frac{1}{y_2}\right]\Bigg\}d\xi d\eta\\
&+\frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}}\Big\{\partial_\zeta^{\mu_{k-1}-1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{k-1}-1}\omega(\zeta)\Big\}\partial_\zeta\Bigg\{\partial_\zeta\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)\\
&\qquad\qquad -(\mu_k-1)(z-\zeta)^{\mu_k-2}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}\\
&\qquad\qquad \times\Bigg[\frac{1}{(\nu_k-1)!}\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!}\\
&\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{(\mu_k-1)!}\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-1-j)!}\Bigg]\\
&\qquad + \frac{(z-\zeta)^{\mu_k-2}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}}{(\mu_k-2)!(\nu_k-1)!}\left[\frac{1}{\mu_k-1}+\sum_{y_1=1}^{\mu_k-2}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_k-1}\frac{1}{y_2}\right]\Bigg\}d\xi d\eta. \qquad (54)
\end{aligned}
$$

Zu I.3):

Analog zu den vorangegangenen Fällen ist

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\partial\mathrm{G}}\mathrm{K}_{\mu_k,\nu_k}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_{k-1}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{k-1}}\omega(\zeta)id\zeta+\frac{1}{2}\int_{\partial\mathrm{G}}\mathrm{K}_{\mu_{k-1},\nu_{k-1}}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_{k-2}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{k-2}}\omega(\zeta)id\zeta\\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}}\Big\{\partial_\zeta^{\mu_k}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k}\omega(\zeta)\Big\}\Bigg\{\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)+(z-\zeta)^{\mu_k-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}\\
&\qquad \times\Bigg[\frac{1}{(\nu_k-1)!}\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!}\\
&\qquad\qquad + \frac{1}{(\mu_k-1)!}\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-1-j)!}\Bigg]\\
&\qquad - \frac{(z-\zeta)^{\mu_k-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}}{(\mu_k-1)!(\nu_k-1)!}\left[\sum_{y_1=1}^{\mu_k-1}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_k-1}\frac{1}{y_2}\right]\Bigg\}d\xi d\eta\\
&+\frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}}\Big\{\partial_\zeta^{\mu_{k-2}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{k-2}}\omega(\zeta)\Big\}\partial_{\overline{\zeta}}\Bigg\{\partial_{\overline{\zeta}}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)\\
&\qquad -\frac{(z-\zeta)^{\mu_k-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-2}}{(\mu_k-1)!(\nu_k-2)!}
\end{aligned}
$$

$$\times\left[(\mu_k-1)!\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!}\right.$$

$$\left.+(\nu_k-1)!\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-1-j)!}\right]$$

$$+\frac{(z-\zeta)^{\mu_k-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-2}}{(\mu_k-1)!(\nu_k-2)!}\left[\frac{1}{\nu_k-1}+\sum_{y_1=1}^{\mu_k-1}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_k-2}\frac{1}{y_2}\right]\Bigg\}d\xi d\eta. \tag{55}$$

Zu I.4):

Es ist entsprechend

$$\frac{1}{2}\int_{\partial \mathrm{G}}\mathrm{K}_{\mu_k,\nu_k}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_k-1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-1}\omega(\zeta)id\zeta+\frac{1}{2}\int_{\partial \mathrm{G}}\mathrm{K}_{\mu_{k-1},\nu_{k-1}}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_k-2}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-2}\omega(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{i}$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}}\Big\{\partial_\zeta^{\mu_k}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k}\omega(\zeta)\Big\}\Bigg\{\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)+(z-\zeta)^{\mu_k-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}$$

$$\times\left[\frac{1}{(\nu_k-1)!}\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(\mu_k-1)!}\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-1-j)!}\right]$$

$$-\frac{(z-\zeta)^{\mu_k-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}}{(\mu_k-1)!(\nu_k-1)!}\left[\sum_{y_1=1}^{\mu_k-1}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_k-1}\frac{1}{y_2}\right]\Bigg\}d\xi d\eta$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}}\Big\{\partial_\zeta^{\mu_k-2}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-2}\omega(\zeta)\Big\}\partial_\zeta\Bigg\{\partial_{\overline{\zeta}}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)$$

$$-\frac{(z-\zeta)^{\mu_k-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-2}}{(\mu_k-1)!(\nu_k-2)!}$$

$$\times\left[(\mu_k-1)!\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!}\right.$$

$$\left.+(\nu_k-1)!\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-1-j)!}\right]$$

$$+\frac{(z-\zeta)^{\mu_k-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-2}}{(\mu_k-1)!(\nu_k-2)!}\left[\frac{1}{\nu_k-1}+\sum_{y_1=1}^{\mu_k-1}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_k-2}\frac{1}{y_2}\right]\Bigg\}d\xi d\eta. \tag{56}$$

Zu I.5):

Für $n = \mu_k = 1$ und $m = \nu_k$ lautet (50), S. 51,

$$
\begin{aligned}
\pi \mathrm{K}_{1,\nu_k}(z-\zeta) &= \frac{\left(\overline{z-\zeta}\right)^{\nu_k-1}}{(\nu_k-1)!}\log|z-\zeta|^2 - \frac{\left(\overline{z-\zeta}\right)^{\nu_k-1}}{(\nu_k-1)!}\sum_{y_2=1}^{\nu_k-1}\frac{1}{y_2} \\
&= -\partial_{\overline{z}}\partial_z^{\nu_k}\widetilde{\omega}_k(z,\zeta) + \frac{\left(\overline{z-\zeta}\right)^{\nu_k-1}}{(\nu_k-1)!}\left[\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-1-\ell)!}{(k-1-\ell)!}\right. \\
&\qquad\left. -\frac{(\nu_k-1)!}{(k-1)!} - \sum_{y_2=1}^{\nu_k-1}\frac{1}{y_2}\right].
\end{aligned}
$$

Also

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\partial \mathrm{G}} \mathrm{K}_{1,\nu_k}(z-\zeta)\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-1}\omega(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{i} \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}} \partial_\zeta\left\{\left(\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-1}\omega(\zeta)\right)\left(\partial_{\overline{z}}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta) + \frac{\left(\overline{z-\zeta}\right)^{\nu_k-1}}{(\nu_k-1)!}\right.\right. \\
&\quad\left.\left.\times\left[\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-1-\ell)!}{(k-1-\ell)!} - \frac{(\nu_k-1)!}{(k-1)!} - \sum_{y_2=1}^{\nu_k-1}\frac{1}{y_2}\right]\right)\right\} d\xi d\eta \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}} \left(\partial_\zeta\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-1}\omega(\zeta)\right)\left(\partial_{\overline{z}}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta) + \frac{\left(\overline{z-\zeta}\right)^{\nu_k-1}}{(\nu_k-1)!}\right. \\
&\quad\left.\times\left[\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-1-\ell)!}{(k-1-\ell)!} - \frac{(\nu_k-1)!}{(k-1)!} - \sum_{y_2=1}^{\nu_k-1}\frac{1}{y_2}\right]\right) d\xi d\eta \\
&\quad -\frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}} \left(\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-1}\omega(\zeta)\right)\left(\partial_\zeta\partial_{\overline{z}}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)\right) d\xi d\eta. \qquad (57)
\end{aligned}
$$

Für den $(k-2)$–ten Summanden gilt

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\partial \mathrm{G}} \mathrm{K}_{0,\nu_{k-1}}(z-\zeta)\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-2}\omega(\zeta) i d\zeta \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial \mathrm{G}} \frac{1}{(\nu_{k-1}-1)!}\frac{(\overline{z-\zeta})^{\nu_{k-1}-1}}{z-\zeta}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-2}\omega(\zeta)d\zeta \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}} \left(\partial_\zeta\partial_{\overline{z}}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)\right)\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{k-2}+1}\omega(\zeta)d\xi d\eta \\
&\qquad + \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}} \frac{1}{(\nu_{k-1}-2)!}\frac{(\overline{z-\zeta})^{\nu_{k-1}-2}}{z-\zeta}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-2}\omega(\zeta)d\xi d\eta.
\end{aligned}
$$

Unter Beachtung von (57), S. 61, und $\nu_{k-2}+1=\nu_{k-1}$ folgt damit

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\partial G} \mathrm{K}_{1,\nu_k}(z-\zeta)\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{k-1}}\omega(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{i}+\frac{1}{2}\int\limits_{\partial G}\mathrm{K}_{0,\nu_{k-1}}(z-\zeta)\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{k-2}}\omega(\zeta)id\zeta$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{G}\left(\partial_\zeta\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{k-1}}\omega(\zeta)\right)\left(\partial_{\overline{z}}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)+\frac{\left(\overline{z-\zeta}\right)^{\nu_k-1}}{(\nu_k-1)!}\right.$$
$$\left.\times\left[\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-1-\ell)!}{(k-1-\ell)!}-\frac{(\nu_k-1)!}{(k-1)!}-\sum_{y_2=1}^{\nu_k-1}\frac{1}{y_2}\right]\right)d\xi d\eta$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{G}\frac{1}{(\nu_{k-1}-2)!}\frac{(\overline{z-\zeta})^{\nu_{k-1}-2}}{z-\zeta}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{k-2}}\omega(\zeta)d\xi d\eta. \tag{58}$$

Zu I.6):

Analog zum Fall I.5) ist

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\partial G}\mathrm{K}_{\mu_k,1}(z-\zeta)\partial_{\zeta}^{\mu_{k-1}}\omega(\zeta)id\zeta+\frac{1}{2}\int\limits_{\partial G}\mathrm{K}_{\mu_{k-1},0}(z-\zeta)\partial_{\zeta}^{\mu_{k-2}}\omega(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{i}$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{G}\left(\partial_{\overline{\zeta}}\partial_{\zeta}^{\mu_{k-1}}\omega(\zeta)\right)\left(\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z h_k(z,\zeta)+\frac{(z-\zeta)^{\mu_k-1}}{(\mu_k-1)!}\right.$$
$$\left.\times\left[\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-1-j)!}{(k-1-j)!}-\frac{(\mu_k-1)!}{(k-1)!}-\sum_{y_1=1}^{\mu_k-1}\frac{1}{y_1}\right]\right)d\xi d\eta$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{G}\left[\partial_\zeta\partial_{\overline{\zeta}}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z h_k(z,\zeta)\right]\partial_\zeta^{\mu_{k-2}}\omega(\zeta)d\xi d\eta. \tag{59}$$

Zu II.1):

Für den $(\rho-1)$–ten Summanden gilt nach Aussage von **Korrolar (3.1)**, S. 52,

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\partial G}\mathrm{K}_{\mu_\rho,\nu_\rho}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_{\rho-1}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-1}}\omega(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{i}$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\left((-1)^{k-\mu_\rho-\nu_\rho+1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-\nu_\rho}\partial_\zeta^{\mu_k-\mu_\rho}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}\widetilde{\omega}_k(z,\zeta)-\frac{(z-\zeta)^{\mu_\rho-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_\rho-1}}{(\mu_\rho-1)!(\nu_\rho-1)!}\right.$$
$$\times\left[(-1)^{\mu_k-\mu_\rho}(\mu_\rho-1)!\sum_{p=0}^{\mu_k-\mu_\rho-1}\binom{\mu_k-\mu_\rho}{p}(-1)^{p-1}\frac{(\mu_k-\mu_\rho-p-1)!}{(\mu_k-p-1)!}\right.$$
$$+(-1)^{\nu_k-\nu_\rho}(\nu_\rho-1)!\sum_{q=0}^{\nu_k-\nu_\rho-1}\binom{\nu_k-\nu_\rho}{q}(-1)^{q-1}\frac{(\nu_k-\nu_\rho-q-1)!}{(\nu_k-q-1)!}$$

$$
\begin{aligned}
&-(\mu_k-1)!\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-\ell-1)!}\\
&-(\nu_k-1)!\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-j-1)!}+\sum_{y_1=1}^{\mu_\rho-1}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_\rho-1}\frac{1}{y_2}\Bigg]\Bigg)\\
&\qquad\times\partial_\zeta^{\mu_\rho-1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_\rho-1}\omega(\zeta)d\overline{\zeta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=-\frac{1}{\pi}\int_{G}&\Bigg((-1)^{k-\mu_\rho-\nu_\rho+2}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-\nu_\rho}\partial_\zeta^{\mu_k-\mu_\rho}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)-\frac{(z-\zeta)^{\mu_\rho-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_\rho-1}}{(\mu_\rho-1)!(\nu_\rho-1)!}\\
\times&\Bigg[(-1)^{\mu_k-\mu_\rho}(\mu_\rho-1)!\sum_{p=0}^{\mu_k-\mu_\rho-1}\binom{\mu_k-\mu_\rho}{p}(-1)^{p-1}\frac{(\mu_k-\mu_\rho-p-1)!}{(\mu_k-p-1)!}\\
&+(-1)^{\nu_k-\nu_\rho}(\nu_\rho-1)!\sum_{q=0}^{\nu_k-\nu_\rho-1}\binom{\nu_k-\nu_\rho}{q}(-1)^{q-1}\frac{(\nu_k-\nu_\rho-q-1)!}{(\nu_k-q-1)!}\\
&-(\mu_k-1)!\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-\ell-1)!}\\
&-(\nu_k-1)!\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-j-1)!}+\sum_{y_1=1}^{\mu_\rho-1}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_\rho-1}\frac{1}{y_2}\Bigg]\Bigg)\\
&\qquad\times\partial_\zeta^{\mu_\rho-1+1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_\rho-1}\omega(\zeta)d\xi d\eta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\pi}\int_{G}&\Bigg((-1)^{k-\mu_{\rho-1}-\nu_{\rho-1}+1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-\nu_{\rho-1}}\partial_\zeta^{\mu_k-\mu_{\rho-1}}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)\\
&+\frac{(z-\zeta)^{\mu_{\rho-1}-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_{\rho-1}-1}}{(\mu_{\rho-1}-1)!(\nu_{\rho-1}-1)!}\Bigg[(-1)^{\mu_k-\mu_{\rho-1}-1}(\mu_{\rho-1})!\\
&\quad\times\sum_{p=0}^{\mu_k-\mu_{\rho-1}-2}\binom{\mu_k-\mu_{\rho-1}-1}{p}(-1)^{p-1}\frac{(\mu_k-\mu_{\rho-1}-p-2)!}{(\mu_k-p-1)!}\\
&+(-1)^{\nu_k-\nu_{\rho-1}}(\nu_{\rho-1}-1)!\\
&\quad\times\sum_{q=0}^{\nu_k-\nu_{\rho-1}-1}\binom{\nu_k-\nu_{\rho-1}}{q}(-1)^{q-1}\frac{(\nu_k-\nu_{\rho-1}-q-1)!}{(\nu_k-q-1)!}\\
&-(\mu_k-1)!\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-\ell-1)!}\\
&-(\nu_k-1)!\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-j-1)!}+\sum_{y_1=1}^{\mu_{\rho-1}}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_{\rho-1}-1}\frac{1}{y_2}\Bigg]\Bigg)\\
&\qquad\times\partial_\zeta^{\mu_\rho-1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_\rho-1}\omega(\zeta)d\xi d\eta.
\end{aligned}
$$

Es sei für den Moment

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_1 := -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}} \Bigg(& (-1)^{k-\mu_{\rho-1}-\nu_{\rho-1}+1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-\nu_{\rho-1}}\partial_{\zeta}^{\mu_k-\mu_{\rho-1}}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta) \\
& +\frac{(z-\zeta)^{\mu_{\rho-1}-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_{\rho-1}-1}}{(\mu_{\rho-1}-1)!(\nu_{\rho-1}-1)!}\Bigg[(-1)^{\mu_k-\mu_{\rho-1}-1}(\mu_{\rho-1})! \\
& \qquad \times\sum_{p=0}^{\mu_k-\mu_{\rho-1}-2}\binom{\mu_k-\mu_{\rho-1}-1}{p}(-1)^{p-1}\frac{(\mu_k-\mu_{\rho-1}-p-2)!}{(\mu_k-p-1)!} \\
& +(-1)^{\nu_k-\nu_{\rho-1}}(\nu_{\rho-1}-1)! \\
& \qquad \times\sum_{q=0}^{\nu_k-\nu_{\rho-1}-1}\binom{\nu_k-\nu_{\rho-1}}{q}(-1)^{q-1}\frac{(\nu_k-\nu_{\rho-1}-q-1)!}{(\nu_k-q-1)!} \\
& -(\mu_k-1)!\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-\ell-1)!} \\
& -(\nu_k-1)!\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-j-1)!}+\sum_{y_1=1}^{\mu_{\rho-1}}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_{\rho-1}-1}\frac{1}{y_2}\Bigg]\Bigg) \\
& \qquad\qquad \times\partial_{\zeta}^{\mu_{\rho-1}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-1}}\omega(\zeta)d\xi d\eta.
\end{aligned}
$$

Für den $(\rho-2)$–ten Summanden gilt entsprechend

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathrm{G}}\mathrm{K}_{\mu_{\rho-1},\nu_{\rho-1}}(z-\zeta)\partial_{\zeta}^{\mu_{\rho-2}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-2}}\omega(\zeta)id\zeta \\
& = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\Bigg((-1)^{k-\mu_{\rho-1}-\nu_{\rho-1}+2}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-\nu_{\rho-1}}\partial_{\zeta}^{\mu_k-\mu_{\rho-1}}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta) \\
& \qquad -\frac{(z-\zeta)^{\mu_{\rho-1}-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_{\rho-1}-1}}{(\mu_{\rho-1}-1)!(\nu_{\rho-1}-1)!}\Bigg[(-1)^{\mu_k-\mu_{\rho-1}}(\mu_{\rho-1}-1)! \\
& \qquad\qquad \times\sum_{p=0}^{\mu_k-\mu_{\rho-1}-1}\binom{\mu_k-\mu_{\rho-1}}{p}(-1)^{p-1}\frac{(\mu_k-\mu_{\rho-1}-p-1)!}{(\mu_k-p-1)!} \\
& \qquad +(-1)^{\nu_k-\nu_{\rho-1}}(\nu_{\rho-1}-1)! \\
& \qquad\qquad \times\sum_{q=0}^{\nu_k-\nu_{\rho-1}-1}\binom{\nu_k-\nu_{\rho-1}}{q}(-1)^{q-1}\frac{(\nu_k-\nu_{\rho-1}-q-1)!}{(\nu_k-q-1)!} \\
& \qquad -(\mu_k-1)!\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-\ell-1)!}
\end{aligned}
$$

$$
-(\nu_k-1)!\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-j-1)!}+\sum_{y_1=1}^{\mu_{\rho-1}-1}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_{\rho-1}-1}\frac{1}{y_2}\Bigg]\Bigg)
$$
$$
\times\partial_\zeta^{\mu_{\rho-1}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-1}}\omega(\zeta)d\xi d\eta
$$
$$
-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\Bigg\{\partial_{\overline{\zeta}}\Bigg((-1)^{k-\mu_{\rho-1}-\nu_{\rho-1}+2}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-\nu_{\rho-1}}\partial_\zeta^{\mu_k-\mu_{\rho-1}}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)
$$
$$
-\frac{(z-\zeta)^{\mu_{\rho-1}-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_{\rho-1}-1}}{(\mu_{\rho-1}-1)!(\nu_{\rho-1}-1)!}\Bigg[(-1)^{\mu_k-\mu_{\rho-1}}(\mu_{\rho-1}-1)!
$$
$$
\times\sum_{p=0}^{\mu_k-\mu_{\rho-1}-1}\binom{\mu_k-\mu_{\rho-1}}{p}(-1)^{p-1}\frac{(\mu_k-\mu_{\rho-1}-p-1)!}{(\mu_k-p-1)!}
$$
$$
+(-1)^{\nu_k-\nu_{\rho-1}}(\nu_{\rho-1}-1)!
$$
$$
\times\sum_{q=0}^{\nu_k-\nu_{\rho-1}-1}\binom{\nu_k-\nu_{\rho-1}}{q}(-1)^{q-1}\frac{(\nu_k-\nu_{\rho-1}-q-1)!}{(\nu_k-q-1)!}
$$
$$
-(\mu_k-1)!\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-\ell-1)!}
$$
$$
-(\nu_k-1)!\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-j-1)!}+\sum_{y_1=1}^{\mu_{\rho-1}-1}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_{\rho-1}-1}\frac{1}{y_2}\Bigg]\Bigg)\Bigg\}
$$
$$
\times\partial_\zeta^{\mu_{\rho-2}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-2}}\omega(\zeta)d\xi d\eta.
$$

Wieder sei für den Moment

$$
\mathrm{I}_2:=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\Bigg((-1)^{k-\mu_{\rho-1}-\nu_{\rho-1}+2}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-\nu_{\rho-1}}\partial_\zeta^{\mu_k-\mu_{\rho-1}}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)
$$
$$
-\frac{(z-\zeta)^{\mu_{\rho-1}-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_{\rho-1}-1}}{(\mu_{\rho-1}-1)!(\nu_{\rho-1}-1)!}\Bigg[(-1)^{\mu_k-\mu_{\rho-1}}(\mu_{\rho-1}-1)!
$$
$$
\times\sum_{p=0}^{\mu_k-\mu_{\rho-1}-1}\binom{\mu_k-\mu_{\rho-1}}{p}(-1)^{p-1}\frac{(\mu_k-\mu_{\rho-1}-p-1)!}{(\mu_k-p-1)!}
$$
$$
+(-1)^{\nu_k-\nu_{\rho-1}}(\nu_{\rho-1}-1)!
$$
$$
\times\sum_{q=0}^{\nu_k-\nu_{\rho-1}-1}\binom{\nu_k-\nu_{\rho-1}}{q}(-1)^{q-1}\frac{(\nu_k-\nu_{\rho-1}-q-1)!}{(\nu_k-q-1)!}
$$
$$
-(\mu_k-1)!\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-\ell-1)!}
$$

$$
\begin{aligned}
-(\nu_k-1)!\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-j-1)!}+\sum_{y_1=1}^{\mu_{\rho-1}-1}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_{\rho-1}-1}\frac{1}{y_2}\Bigg]\Bigg)\\
\times\partial_\zeta^{\mu_{\rho-1}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-1}}\omega(\zeta)d\xi d\eta.
\end{aligned}
$$

Wie in den vorangegangenen Fällen, stellt sich auch in diesem Fall heraus, dass sich bei der Addition von

$$
\frac{1}{2}\int_{\partial \mathrm{G}}\mathrm{K}_{\mu_\rho,\nu_\rho}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_{\rho-1}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-1}}\omega(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{i}
$$

und

$$
\frac{1}{2}\int_{\partial \mathrm{G}}\mathrm{K}_{\mu_{\rho-1},\nu_{\rho-1}}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_{\rho-2}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-2}}\omega(\zeta)id\zeta
$$

I_1 und I_2 gegeneinander wegheben. Denn für $\mu_k \geq 3$ und $\mu_{\rho-1}\geq 1$ mit $\mu_k-2\geq \mu_{\rho-1}$ gilt nun nach der Aussage von **Lemma A.4**, S. 103,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_{\rho-1}}+(-1)^{\mu_k-\mu_{\rho-1}-1}(\mu_{\rho-1}-1)!\mu_{\rho-1}\sum_{p=0}^{\mu_k-\mu_{\rho-1}-2}\binom{\mu_k-\mu_{\rho-1}-1}{p}\\
\times(-1)^{p-1}\frac{(\mu_k-\mu_{\rho-1}-p-2)!}{(\mu_k-1-p)!}\\
=(-1)^{\mu_k-\mu_{\rho-1}}(\mu_{\rho-1}-1)!\sum_{p=0}^{\mu_k-\mu_{\rho-1}-1}\binom{\mu_k-\mu_{\rho-1}}{p}\\
\times(-1)^{p-1}\frac{(\mu_k-\mu_{\rho-1}-p-1)!}{(\mu_k-1-p)!}.
\end{aligned}
$$

Es folgt also

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\partial \mathrm{G}}\mathrm{K}_{\mu_\rho,\nu_\rho}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_{\rho-1}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-1}}\omega(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{i}+\frac{1}{2}\int_{\partial \mathrm{G}}\mathrm{K}_{\mu_{\rho-1},\nu_{\rho-1}}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_{\rho-2}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-2}}\omega(\zeta)id\zeta\\
=-\frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}}\Bigg(\Big((-1)^{k-\mu_\rho-\nu_\rho+2}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-\nu_\rho}\partial_\zeta^{\mu_k-\mu_\rho}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)-\frac{(z-\zeta)^{\mu_\rho-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_\rho-1}}{(\mu_\rho-1)!(\nu_\rho-1)!}\\
\times\Bigg[(-1)^{\mu_k-\mu_\rho}(\mu_\rho-1)!\sum_{p=0}^{\mu_k-\mu_\rho-1}\binom{\mu_k-\mu_\rho}{p}(-1)^{p-1}\frac{(\mu_k-\mu_\rho-p-1)!}{(\mu_k-p-1)!}\\
+(-1)^{\nu_k-\nu_\rho}(\nu_\rho-1)!\sum_{q=0}^{\nu_k-\nu_\rho-1}\binom{\nu_k-\nu_\rho}{q}(-1)^{q-1}\frac{(\nu_k-\nu_\rho-q-1)!}{(\nu_k-q-1)!}
\end{aligned}
$$

$$-(\mu_k-1)!\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-\ell-1)!}$$

$$-(\nu_k-1)!\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-j-1)!}+\sum_{y_1=1}^{\mu_\rho-1}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_\rho-1}\frac{1}{y_2}\Bigg]\Bigg)$$

$$\times\partial_\zeta^{\mu_{\rho-1}+1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-1}}\omega(\zeta)d\xi d\eta$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\Bigg\{\partial_{\overline{\zeta}}\Bigg((-1)^{k-\mu_{\rho-1}-\nu_{\rho-1}+2}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-\nu_{\rho-1}}\partial_\zeta^{\mu_k-\mu_{\rho-1}}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)$$

$$-\frac{(z-\zeta)^{\mu_{\rho-1}-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_{\rho-1}-1}}{(\mu_{\rho-1}-1)!(\nu_{\rho-1}-1)!}\Bigg[(-1)^{\mu_k-\mu_{\rho-1}}(\mu_{\rho-1}-1)!$$

$$\times\sum_{p=0}^{\mu_k-\mu_{\rho-1}-1}\binom{\mu_k-\mu_{\rho-1}}{p}(-1)^{p-1}\frac{(\mu_k-\mu_{\rho-1}-p-1)!}{(\mu_k-p-1)!}$$

$$+(-1)^{\nu_k-\nu_{\rho-1}}(\nu_{\rho-1}-1)!$$

$$\times\sum_{q=0}^{\nu_k-\nu_{\rho-1}-1}\binom{\nu_k-\nu_{\rho-1}}{q}(-1)^{q-1}\frac{(\nu_k-\nu_{\rho-1}-q-1)!}{(\nu_k-q-1)!}$$

$$-(\mu_k-1)!\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-\ell-1)!}$$

$$-(\nu_k-1)!\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-j-1)!}+\sum_{y_1=1}^{\mu_{\rho-1}-1}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_{\rho-1}-1}\frac{1}{y_2}\Bigg]\Bigg)\Bigg\}$$

$$\times\partial_\zeta^{\mu_{\rho-2}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-2}}\omega(\zeta)d\xi d\eta.$$

Zu II.2):

Analog zu den in Fall II.1) gemachten Betrachtungen gilt

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathrm{G}}\mathrm{K}_{\mu_\rho,\nu_\rho}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_{\rho-1}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-1}}\omega(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{i}+\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathrm{G}}\mathrm{K}_{\mu_{\rho-1},\nu_{\rho-1}}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_{\rho-2}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-2}}\omega(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{i}$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\Bigg((-1)^{k-\mu_\rho-\nu_\rho+2}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-\nu_\rho}\partial_\zeta^{\mu_k-\mu_\rho}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)-\frac{(z-\zeta)^{\mu_\rho-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_\rho-1}}{(\mu_\rho-1)!(\nu_\rho-1)!}$$

$$\times\Bigg[(-1)^{\mu_k-\mu_\rho}(\mu_\rho-1)!\sum_{p=0}^{\mu_k-\mu_\rho-1}\binom{\mu_k-\mu_\rho}{p}(-1)^{p-1}\frac{(\mu_k-\mu_\rho-p-1)!}{(\mu_k-p-1)!}$$

$$+(-1)^{\nu_k-\nu_\rho}(\nu_\rho-1)!\sum_{q=0}^{\nu_k-\nu_\rho-1}\binom{\nu_k-\nu_\rho}{q}(-1)^{q-1}\frac{(\nu_k-\nu_\rho-q-1)!}{(\nu_k-q-1)!}$$

$$-(\mu_k-1)!\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-\ell-1)!}$$

$$-(\nu_k-1)!\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-j-1)!}+\sum_{y_1=1}^{\mu_\rho-1}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_\rho-1}\frac{1}{y_2}\Bigg]\Bigg)$$

$$\times\partial_\zeta^{\mu_{\rho-1}+1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-1}}\omega(\zeta)d\xi d\eta$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}}\Bigg\{\partial_\zeta\Bigg((-1)^{k-\mu_{\rho-1}-\nu_{\rho-1}+2}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-\nu_{\rho-1}}\partial_\zeta^{\mu_k-\mu_{\rho-1}}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)$$

$$-\frac{(z-\zeta)^{\mu_{\rho-1}-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_{\rho-1}-1}}{(\mu_{\rho-1}-1)!(\nu_{\rho-1}-1)!}\Bigg[(-1)^{\mu_k-\mu_{\rho-1}}(\mu_{\rho-1}-1)!$$

$$\times\sum_{p=0}^{\mu_k-\mu_{\rho-1}-1}\binom{\mu_k-\mu_{\rho-1}}{p}(-1)^{p-1}\frac{(\mu_k-\mu_{\rho-1}-p-1)!}{(\mu_k-p-1)!}$$

$$+(-1)^{\nu_k-\nu_{\rho-1}}(\nu_{\rho-1}-1)!$$

$$\times\sum_{q=0}^{\nu_k-\nu_{\rho-1}-1}\binom{\nu_k-\nu_{\rho-1}}{q}(-1)^{q-1}\frac{(\nu_k-\nu_{\rho-1}-q-1)!}{(\nu_k-q-1)!}$$

$$-(\mu_k-1)!\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-\ell-1)!}$$

$$-(\nu_k-1)!\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-j-1)!}+\sum_{y_1=1}^{\mu_{\rho-1}-1}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_{\rho-1}-1}\frac{1}{y_2}\Bigg]\Bigg)\Bigg\}$$

$$\times\partial_\zeta^{\mu_{\rho-2}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-2}}\omega(\zeta)d\xi d\eta.$$

Zu II.3):

Es ist analog

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\mathrm{G}}\mathrm{K}_{\mu_\rho,\nu_\rho}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_{\rho-1}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-1}}\omega(\zeta)id\zeta+\frac{1}{2}\int_{\partial\mathrm{G}}\mathrm{K}_{\mu_{\rho-1},\nu_{\rho-1}}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_{\rho-2}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-2}}\omega(\zeta)id\zeta$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}}\Bigg((-1)^{k-\mu_\rho-\nu_\rho+2}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-\nu_\rho}\partial_\zeta^{\mu_k-\mu_\rho}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)-\frac{(z-\zeta)^{\mu_\rho-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_\rho-1}}{(\mu_\rho-1)!(\nu_\rho-1)!}$$

$$\times\Bigg[(-1)^{\mu_k-\mu_\rho}(\mu_\rho-1)!\sum_{p=0}^{\mu_k-\mu_\rho-1}\binom{\mu_k-\mu_\rho}{p}(-1)^{p-1}\frac{(\mu_k-\mu_\rho-p-1)!}{(\mu_k-p-1)!}$$

$$+(-1)^{\nu_k-\nu_\rho}(\nu_\rho-1)!\sum_{q=0}^{\nu_k-\nu_\rho-1}\binom{\nu_k-\nu_\rho}{q}(-1)^{q-1}\frac{(\nu_k-\nu_\rho-q-1)!}{(\nu_k-q-1)!}$$

$$-(\mu_k-1)!\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-\ell-1)!}$$

$$-(\nu_k-1)!\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-j-1)!}+\sum_{y_1=1}^{\mu_\rho-1}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_\rho-1}\frac{1}{y_2}\Bigg]\Bigg)$$

$$\times\partial_\zeta^{\mu_{\rho-1}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-1}+1}\omega(\zeta)d\xi d\eta$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\Bigg\{\partial_{\overline{\zeta}}\Bigg((-1)^{k-\mu_{\rho-1}-\nu_{\rho-1}+2}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-\nu_{\rho-1}}\partial_\zeta^{\mu_k-\mu_{\rho-1}}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)$$

$$-\frac{(z-\zeta)^{\mu_{\rho-1}-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_{\rho-1}-1}}{(\mu_{\rho-1}-1)!(\nu_{\rho-1}-1)!}\Bigg[(-1)^{\mu_k-\mu_{\rho-1}}(\mu_{\rho-1}-1)!$$

$$\times\sum_{p=0}^{\mu_k-\mu_{\rho-1}-1}\binom{\mu_k-\mu_{\rho-1}}{p}(-1)^{p-1}\frac{(\mu_k-\mu_{\rho-1}-p-1)!}{(\mu_k-p-1)!}$$

$$+(-1)^{\nu_k-\nu_{\rho-1}}(\nu_{\rho-1}-1)!$$

$$\times\sum_{q=0}^{\nu_k-\nu_{\rho-1}-1}\binom{\nu_k-\nu_{\rho-1}}{q}(-1)^{q-1}\frac{(\nu_k-\nu_{\rho-1}-q-1)!}{(\nu_k-q-1)!}$$

$$-(\mu_k-1)!\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-\ell-1)!}$$

$$-(\nu_k-1)!\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-j-1)!}+\sum_{y_1=1}^{\mu_{\rho-1}-1}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_{\rho-1}-1}\frac{1}{y_2}\Bigg]\Bigg)\Bigg\}$$

$$\times\partial_\zeta^{\mu_{\rho-2}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-2}}\omega(\zeta)d\xi d\eta.$$

Zu II.4):

Wie gehabt ist

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathrm{G}}\mathrm{K}_{\mu_\rho,\nu_\rho}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_{\rho-1}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-1}}\omega(\zeta)id\zeta+\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathrm{G}}\mathrm{K}_{\mu_{\rho-1},\nu_{\rho-1}}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_{\rho-2}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-2}}\omega(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{i}$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\Bigg((-1)^{k-\mu_\rho-\nu_\rho+2}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-\nu_\rho}\partial_\zeta^{\mu_k-\mu_\rho}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)-\frac{(z-\zeta)^{\mu_\rho-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_\rho-1}}{(\mu_\rho-1)!(\nu_\rho-1)!}$$

$$\times\Bigg[(-1)^{\mu_k-\mu_\rho}(\mu_\rho-1)!\sum_{p=0}^{\mu_k-\mu_\rho-1}\binom{\mu_k-\mu_\rho}{p}(-1)^{p-1}\frac{(\mu_k-\mu_\rho-p-1)!}{(\mu_k-p-1)!}$$

$$+(-1)^{\nu_k-\nu_\rho}(\nu_\rho-1)!\sum_{q=0}^{\nu_k-\nu_\rho-1}\binom{\nu_k-\nu_\rho}{q}(-1)^{q-1}\frac{(\nu_k-\nu_\rho-q-1)!}{(\nu_k-q-1)!}$$

$$-(\mu_k-1)!\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-\ell-1)!}$$

$$-(\nu_k-1)!\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-j-1)!}+\sum_{y_1=1}^{\mu_\rho-1}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_\rho-1}\frac{1}{y_2}\Bigg]\Bigg)$$

$$\times\partial_\zeta^{\mu_{\rho-1}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-1}+1}\omega(\zeta)d\xi d\eta$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}}\Bigg\{\partial_\zeta\Bigg((-1)^{k-\mu_{\rho-1}-\nu_{\rho-1}+2}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-\nu_{\rho-1}}\partial_\zeta^{\mu_k-\mu_{\rho-1}}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)$$

$$-\frac{(z-\zeta)^{\mu_{\rho-1}-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_{\rho-1}-1}}{(\mu_{\rho-1}-1)!(\nu_{\rho-1}-1)!}\Bigg[(-1)^{\mu_k-\mu_{\rho-1}}(\mu_{\rho-1}-1)!$$

$$\times\sum_{p=0}^{\mu_k-\mu_{\rho-1}-1}\binom{\mu_k-\mu_{\rho-1}}{p}(-1)^{p-1}\frac{(\mu_k-\mu_{\rho-1}-p-1)!}{(\mu_k-p-1)!}$$

$$+(-1)^{\nu_k-\nu_{\rho-1}}(\nu_{\rho-1}-1)!$$

$$\times\sum_{q=0}^{\nu_k-\nu_{\rho-1}-1}\binom{\nu_k-\nu_{\rho-1}}{q}(-1)^{q-1}\frac{(\nu_k-\nu_{\rho-1}-q-1)!}{(\nu_k-q-1)!}$$

$$-(\mu_k-1)!\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-\ell-1)!}$$

$$-(\nu_k-1)!\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-j-1)!}+\sum_{y_1=1}^{\mu_{\rho-1}-1}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_{\rho-1}-1}\frac{1}{y_2}\Bigg]\Bigg)\Bigg\}$$

$$\times\partial_\zeta^{\mu_{\rho-2}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-2}}\omega(\zeta)d\xi d\eta.$$

Zu II.5):

Für den $(\rho-1)$–ten Summanden gilt

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\mathrm{G}}\mathrm{K}_{\mu_\rho,\nu_\rho}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_{\rho-1}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-1}}\omega(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{i}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathrm{G}}\Bigg[(-1)^{k-\nu_\rho+1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-\nu_\rho}\partial_\zeta^{\mu_k-1}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)-(-1)^{k+1}\frac{\left(\overline{z-\zeta}\right)^{\nu_\rho-1}}{(\nu_\rho-1)!}$$

$$\times\Bigg[(\mu_k-1)!\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!}$$

$$+(\nu_k-1)!\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-1-j)!}\Bigg]$$

$$
\begin{aligned}
&-(-1)^{k+\nu_k+1}\frac{\left(\overline{z-\zeta}\right)^{\nu_\rho-1}}{(\nu_\rho-1)!}\sum_{p=0}^{\mu_k-2}\binom{\mu_k-1}{p}(-1)^{p-1}\frac{(\mu_k-p-2)!}{(\mu_k-p-1)!}\\
&-(-1)^{k+\mu_k-\nu_\rho}\left(\overline{z-\zeta}\right)^{\nu_\rho-1}\sum_{q=0}^{\nu_k-\nu_\rho-1}\binom{\nu_k-\nu_\rho}{q}(-1)^{q-1}\frac{(\nu_k-\nu_\rho-q-1)!}{(\nu_k-q-1)!}\\
&-\left.\frac{\left(\overline{z-\zeta}\right)^{\nu_\rho-1}}{(\nu_\rho-1)!}\sum_{y_2=1}^{\nu_\rho-1}\frac{1}{y_2}\right]\partial_\zeta^{\mu_{\rho-1}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-1}}\omega(\zeta)d\overline{\zeta}\\
=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}&\left[\partial_\zeta^{\mu_{\rho-1}+1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-1}}\omega(\zeta)\right]\left[(-1)^{k-\nu_\rho+1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-\nu_\rho}\partial_\zeta^{\mu_k-1}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)\right.\\
&-(-1)^{k+1}\frac{\left(\overline{z-\zeta}\right)^{\nu_\rho-1}}{(\nu_\rho-1)!}\left[(\mu_k-1)!\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!}\right.\\
&\left.+(\nu_k-1)!\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-1-j)!}\right]\\
&-(-1)^{k+\nu_k+1}\frac{\left(\overline{z-\zeta}\right)^{\nu_\rho-1}}{(\nu_\rho-1)!}\sum_{p=0}^{\mu_k-2}\binom{\mu_k-1}{p}(-1)^{p-1}\frac{(\mu_k-p-2)!}{(\mu_k-p-1)!}\\
&-(-1)^{k+\mu_k-\nu_\rho}\left(\overline{z-\zeta}\right)^{\nu_\rho-1}\sum_{q=0}^{\nu_k-\nu_\rho-1}\binom{\nu_k-\nu_\rho}{q}(-1)^{q-1}\frac{(\nu_k-\nu_\rho-q-1)!}{(\nu_k-q-1)!}\\
&-\left.\frac{\left(\overline{z-\zeta}\right)^{\nu_\rho-1}}{(\nu_\rho-1)!}\sum_{y_2=1}^{\nu_\rho-1}\frac{1}{y_2}\right]d\xi d\eta\\
&-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\left[\partial_\zeta^{\mu_{\rho-1}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-1}}\omega(\zeta)\right](-1)^{k-\nu_\rho+1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-\nu_\rho}\partial_\zeta^{\mu_k}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)d\xi d\eta.
\end{aligned}
$$

Mit

$$
\begin{aligned}
\pi\mathrm{K}_{\mu_{\rho-1},\nu_{\rho-1}}(z-\zeta)&=\frac{1}{(\nu_{\rho-1}-1)!}\frac{\left(\overline{z-\zeta}\right)^{\nu_{\rho-1}-1}}{z-\zeta}\\
&=(-1)^{k-\nu_\rho}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-\nu_\rho}\partial_\zeta^{\mu_k}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)\quad\text{für}\quad\zeta\in\partial\mathrm{G}
\end{aligned}
$$

gilt für den $(\rho-2)$–ten Summanden

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathrm{G}}\mathrm{K}_{\mu_{\rho-1},\nu_{\rho-1}}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_{\rho-2}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-2}}\omega(\zeta)id\zeta\\
&\quad=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\left[(-1)^{k-\nu_\rho}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-\nu_\rho}\partial_\zeta^{\mu_k}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)\right]\partial_\zeta^{\mu_{\rho-2}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-2}+1}\omega(\zeta)d\xi d\eta
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\left[(-1)^{k-\nu_\rho}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-\nu_\rho+1}\partial_\zeta^{\mu_k}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)\right]\partial_\zeta^{\mu_\rho-2}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_\rho-2}\omega(\zeta)d\xi d\eta.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathrm{G}}\mathrm{K}_{\mu_\rho,\nu_\rho}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_\rho-1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_\rho-1}\omega(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{i}+\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathrm{G}}\mathrm{K}_{\mu_{\rho-1},\nu_{\rho-1}}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_\rho-2}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_\rho-2}\omega(\zeta)id\zeta\\
&\quad=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\left[\partial_\zeta^{\mu_{\rho-1}+1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_\rho-1}\omega(\zeta)\right]\Bigg[(-1)^{k-\nu_\rho+1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-\nu_\rho}\partial_\zeta^{\mu_k-1}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)\\
&\qquad-(-1)^{k+1}\frac{\left(\overline{z-\zeta}\right)^{\nu_\rho-1}}{(\nu_\rho-1)!}\Bigg[(\mu_k-1)!\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!}\\
&\qquad+(\nu_k-1)!\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-1-j)!}\Bigg]\\
&\qquad-(-1)^{k+\nu_k+1}\frac{\left(\overline{z-\zeta}\right)^{\nu_\rho-1}}{(\nu_\rho-1)!}\sum_{p=0}^{\mu_k-2}\binom{\mu_k-1}{p}(-1)^{p-1}\frac{(\mu_k-p-2)!}{(\mu_k-p-1)!}\\
&\qquad-(-1)^{k+\mu_k-\nu_\rho}\left(\overline{z-\zeta}\right)^{\nu_\rho-1}\sum_{q=0}^{\nu_k-\nu_\rho-1}\binom{\nu_k-\nu_\rho}{q}(-1)^{q-1}\frac{(\nu_k-\nu_\rho-q-1)!}{(\nu_k-q-1)!}\\
&\qquad-\frac{\left(\overline{z-\zeta}\right)^{\nu_\rho-1}}{(\nu_\rho-1)!}\sum_{y_2=1}^{\nu_\rho-1}\frac{1}{y_2}\Bigg]d\xi d\eta\\
&\quad-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\left[(-1)^{k-\nu_\rho}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-\nu_\rho+1}\partial_\zeta^{\mu_k}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)\right]\partial_\zeta^{\mu_\rho-2}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_\rho-2}\omega(\zeta)d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

Zu II.6):

Analog zu II.5) ist

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathrm{G}}\mathrm{K}_{\mu_\rho,\nu_\rho}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_\rho-1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_\rho-1}\omega(\zeta)id\zeta+\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathrm{G}}\mathrm{K}_{\mu_{\rho-1},\nu_{\rho-1}}(z-\zeta)\partial_\zeta^{\mu_\rho-2}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_\rho-2}\omega(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{i}\\
&\quad=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\left[\partial_\zeta^{\mu_\rho-1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_{\rho-1}+1}\omega(\zeta)\right]\Bigg[(-1)^{k-\mu_\rho+1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-1}\partial_\zeta^{\mu_k-\mu_\rho}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)\\
&\qquad-(-1)^{k+1}\frac{(z-\zeta)^{\mu_\rho-1}}{(\mu_\rho-1)!}\Bigg[(\mu_k-1)!\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!}\\
&\qquad+(\nu_k-1)!\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-1-j)!}\Bigg]
\end{aligned}$$

$$-(-1)^{k+\nu_k-\mu_\rho}(z-\zeta)^{\mu_\rho-1}\sum_{p=0}^{\mu_k-\mu_\rho-1}\binom{\mu_k-\mu_\rho}{p}(-1)^{p-1}\frac{(\mu_k-\mu_\rho-p-1)!}{(\mu_k-p-1)!}$$

$$-(-1)^{k+\mu_k-1}\frac{(z-\zeta)^{\mu_\rho-1}}{(\mu_\rho-1)!}\sum_{q=0}^{\nu_k-2}\binom{\nu_k-1}{q}(-1)^{q-1}\frac{(\nu_k-q-2)!}{(\nu_k-q-1)!}$$

$$\left.-\frac{(z-\zeta)^{\mu_\rho-1}}{(\mu_\rho-1)!}\sum_{y_1=1}^{\mu_\rho-1}\frac{1}{y_1}\right]d\xi d\eta$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{G}\left[(-1)^{k-\mu_\rho}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k}\partial_{\zeta}^{\mu_k-\mu_\rho+1}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_{z}^{\nu_k}h_k(z,\zeta)\right]\partial_{\zeta}^{\mu_\rho-2}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_\rho-2}\omega(\zeta)d\xi d\eta.$$

Zu III.1):

Es ist

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\partial G}\mathrm{K}_{\mu_2,\nu_2}(z-\zeta)\partial_{\zeta}^{\mu_1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_1}\omega(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{i}+\frac{1}{2}\int\limits_{\partial G}\mathrm{K}_{\mu_1,\nu_1}(z-\zeta)\omega(\zeta)id\zeta$$

$$=\frac{(-1)^k}{\pi}\int\limits_{G}\left[\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k}\partial_{\zeta}^{\mu_k}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_{z}^{\nu_k}h_k(z,\zeta)\right]\omega(\zeta)d\xi d\eta$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{G}\Big[(-1)^k\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k-1}\partial_{\zeta}^{\mu_k-1}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_{z}^{\nu_k}h_k(z,\zeta)$$

$$+(\mu_k-1)!\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!}$$

$$+(\nu_k-1)!\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-1-j)!}$$

$$+(-1)^{\nu_k+k}\sum_{p=0}^{\mu_k-2}\binom{\mu_k-1}{p}(-1)^{p}\frac{(\mu_k-p-2)!}{(\mu_k-1-p)!}$$

$$\left.+(-1)^{\mu_k+k}\sum_{q=0}^{\nu_k-2}\binom{\nu_k-1}{q}(-1)^{q}\frac{(\nu_k-q-2)!}{(\nu_k-1-q)!}\right]$$

$$\times\partial_{\zeta}\partial_{\overline{\zeta}}\omega(\zeta)d\xi d\eta. \tag{60}$$

Zu III.2):

Das Ergebnis in diesem Fall ist identisch mit dem aus III.1).

Damit bleibt von der Summe nur jeweils der erste Term von (53), (54), (55), (56), (58), (59) und (60) übrig. Also

$$\begin{aligned}
\omega(z) &= \mathrm{T}_{\mathrm{G},\mu_k,\nu_k}\partial_z^{\mu_k}\partial_{\overline{z}}^{\nu_k}\omega(z) + \frac{(-1)^k}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\left[\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k}\partial_\zeta^{\mu_k}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)\right]\omega(\zeta)d\xi d\eta \\
&\quad -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\left\{\partial_\zeta^{\mu_k}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k}\omega(\zeta)\right\}\Bigg\{\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta) + (z-\zeta)^{\mu_k-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1} \\
&\quad\times\left[\frac{1}{(\nu_k-1)!}\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!}\right. \\
&\quad\left.+\frac{1}{(\mu_k-1)!}\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-1-j)!}\right] \\
&\quad -\frac{(z-\zeta)^{\mu_k-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}}{(\mu_k-1)!(\nu_k-1)!}\left[\sum_{y_1=1}^{\mu_k-1}\frac{1}{y_1}+\sum_{y_2=1}^{\nu_k-1}\frac{1}{y_2}\right]\Bigg\}d\xi d\eta \\
&= \frac{(-1)^k}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\left[\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k}\partial_\zeta^{\mu_k}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta)\right]\omega(\zeta)d\xi d\eta \\
&\quad -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\left\{\partial_\zeta^{\mu_k}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k}\omega(\zeta)\right\}\Bigg\{\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta) + \frac{(z-\zeta)^{\mu_k-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}}{(\mu_k-1)!(\nu_k-1)!} \\
&\quad\times\left[(\mu_k-1)!\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!}\right. \\
&\quad\left.+(\nu_k-1)!\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-1-j)!} - \log|z-\zeta|^2\right]\Bigg\}d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

Nun ist zunächst nur für $z \neq \zeta$ (s. (50), S. 51)

$$\begin{aligned}
-\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}g_k(z,\zeta) &= -\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}h_k(z,\zeta) \\
&\quad -\frac{(z-\zeta)^{\mu_k-1}(\overline{z-\zeta})^{\nu_k-1}}{(\mu_k-1)!(\nu_k-1)!}\left[(\mu_k-1)!\sum_{\ell=0}^{\nu_k-1}\binom{\nu_k}{\ell}(-1)^{\nu_k-\ell}\frac{(\nu_k-\ell-1)!}{(k-1-\ell)!}\right. \\
&\quad\left.+(\nu_k-1)!\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\binom{\mu_k}{j}(-1)^{\mu_k-j}\frac{(\mu_k-j-1)!}{(k-1-j)!} - \log|z-\zeta|^2\right].
\end{aligned}$$

Ein zum Beweis von **Satz 3.1**, S. 38ff, analoger Schluß führt jedoch wieder zu

$$\omega(z) = \frac{(-1)^k}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\left[\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k}\partial_\zeta^{\mu_k}\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_z^{\nu_k}g_k(z,\zeta)\right]\omega(\zeta)d\xi d\eta$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{G}\left[\partial_{\zeta}^{\mu_k}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_k}\omega(\zeta)\right]\partial_{\overline{z}}^{\mu_k}\partial_{z}^{\nu_k}g_k(z,\zeta)d\xi d\eta. \quad \square$$

3.5 Allgemeine orthogonale Zerlegungen

Analog zu **Satz 3.4**, S. 44, bzw. **Satz 3.5**, S. 46, läßt sich eine explizite Zerlegung des Hilbertraumes $\mathrm{L}_2(\mathrm{G};\mathbb{C})$ in den Raum der Funktionen $f:\mathrm{G}\to\mathbb{C}$, für die gilt

$$\partial_{\overline{z}}^{m}\partial_{z}^{n}f=0 \quad \text{in} \quad \mathrm{G} \quad (n,m\in\mathbb{N})$$

und dessen orthogonalem Komplement mittels **Satz 3.7**, S. 48, angeben. Folgende Definition erscheint dazu sinnvoll.

Definition 3.2 *Für $n,m\in\mathbb{N}$ sei*

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{n,m,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}) &:= \left\{f\in\mathrm{L}_2(\mathrm{G};\mathbb{C}) \mid \partial_{\overline{z}}^{m}\partial_{z}^{n}f=0\right\},\\ \mathcal{O}_{n,m,2}^{\perp}(\mathrm{G};\mathbb{C}) &:= \left\{\varphi\in\mathrm{L}_2(\mathrm{G};\mathbb{C}) \mid \langle\varphi,f\rangle=0 \quad \forall\, f\in\mathcal{O}_{n,m,2}(\mathrm{G};\mathbb{C})\right\}.\end{aligned}$$

Damit gilt

Satz 3.8 *Sei $\mathrm{G}\subset\mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und Greenscher Funktion höherer Ordnung g_k, $k\in\mathbb{N}$, und*

$$\omega\in\mathrm{C}^{k}(\mathrm{G};\mathbb{C})\cap\mathrm{C}^{k-1}(\overline{\mathrm{G}};\mathbb{C}).$$

Für beliebige $n,m\in\mathbb{N}$ mit $n+m=k$ hat ω dann in G die Darstellung

$$\omega=\phi+\psi, \quad \textit{wobei} \quad \phi\in\mathcal{O}_{n,m,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}) \;\textit{und}\; \psi\in\mathcal{O}_{n,m,2}^{\perp}(\mathrm{G};\mathbb{C}).$$

Beweis
Nach **Satz 3.7**, S. 48, hat ω in G die Darstellung

$$\begin{aligned}\omega(z)=\frac{(-1)^k}{\pi}&\int\limits_{G}\omega(\zeta)\partial_{z}^{m}\partial_{\overline{z}}^{n}\partial_{\zeta}^{n}\partial_{\overline{\zeta}}^{m}g_k(z,\zeta)d\xi d\eta\\ &-\frac{1}{\pi}\int\limits_{G}\partial_{z}^{m}\partial_{\overline{z}}^{n}g_k(z,\zeta)\partial_{\zeta}^{n}\partial_{\overline{\zeta}}^{m}\omega(\zeta)d\xi d\eta.\end{aligned} \tag{61}$$

Nach Definition von g_k ist h_k reguläre Lösung von $\Delta^k u=0$ in G. Da für $m+n=k$

$$\partial_{z}^{m}\partial_{\overline{z}}^{n}\partial_{\zeta}^{n}\partial_{\overline{\zeta}}^{m}g_k(z,\zeta)=\partial_{z}^{m}\partial_{\overline{z}}^{n}\partial_{\zeta}^{n}\partial_{\overline{\zeta}}^{m}h_k(z,\zeta) \quad \text{in} \quad \mathrm{G},$$

ist also auch

$$\partial_{\bar z}^m \partial_z^n \partial_z^m \partial_{\bar z}^n \partial_\zeta^n \partial_{\bar\zeta}^m g_k(z,\zeta) = 0 \quad \text{in} \quad \mathrm{G}.$$

Somit ist das erste Integral von (61) beschränkt, mithin der Satz von der majorisierten Konvergenz anwendbar und also Differentiation und Integration vertauschbar. Woraus

$$\partial_{\bar z}^m \partial_z^n \frac{(-1)^k}{\pi} \int_{\mathrm{G}} \omega(\zeta) \partial_z^m \partial_{\bar z}^n \partial_\zeta^n \partial_{\bar\zeta}^m g_k(z,\zeta) d\xi d\eta = 0$$

folgt. Daher bleibt zu zeigen:

$$\int_{\mathrm{G}} [\partial_z^m \partial_{\bar z}^n g_k(z,\zeta)] \overline{f(z)} dxdy = 0 \quad \text{für beliebiges } f \in \mathcal{O}_{n,m,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}).$$

Mit **Lemma 3.1**, S. 44, folgt für $f \in \mathcal{O}_{n,m,2}(\mathrm{G};\mathbb{C})$

$$\int_{\mathrm{G}} [\partial_z^m \partial_{\bar z}^n g_k(z,\zeta)] \overline{f(z)} dxdy = (-1)^m \int_{\mathrm{G}} [\partial_{\bar z}^n g_k(z,\zeta)] \overline{\partial_{\bar z}^m f(z)} dxdy.$$

Und mit **Lemma 3.2**, S. 46, folgt weiter

$$(-1)^m \int_{\mathrm{G}} [\partial_{\bar z}^n g_k(z,\zeta)] \overline{\partial_{\bar z}^m f(z)} dxdy = (-1)^{m+n} \int_{\mathrm{G}} g_k(z,\zeta) \overline{\partial_z^n \partial_{\bar z}^m f(z)} dxdy = 0,$$

da $f \in \mathcal{O}_{n,m,2}(\mathrm{G};\mathbb{C})$. □

Sei nun für $m, n, k \in \mathbb{N}$ mit $m + n = k$

$$\overset{\circ}{\widetilde{\mathrm{W}}}{}^{k,2}_{m,n}(\mathrm{G};\mathbb{C}) := \Big\{ f \in \widetilde{\mathrm{W}}^{k,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}) \mid \partial_z^\mu \partial_{\bar z}^\nu f = 0 \text{ auf } \partial\mathrm{G} \text{ für } 0 \le \nu + \mu \le k-1, \\ 0 \le \mu \le m, 0 \le \nu \le n \Big\},$$

wobei $\widetilde{\mathrm{W}}^{k,2}(\mathrm{G};\mathbb{C})$ für $n + m = k$ den Sobolevraum aller $f \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G};\mathbb{C})$ bezeichnet, die schwache Ableitungen $\partial_z^\mu \partial_{\bar z}^\nu f$, $0 \le \mu \le m$, $0 \le \nu \le n$, in $\mathrm{L}_2(\mathrm{G};\mathbb{C})$ besitzen. Damit ist alles bereitgestellt, um die angekündigte explizite, direkte orthogonale Zerlegung von $\mathrm{L}_2(\mathrm{G};\mathbb{C})$ formulieren zu können.

Satz 3.9 *Sei* $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ *ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und Greenscher Funktion* g_k *der Ordnung* $k \in \mathbb{N}$. *Für* $n, m \in \mathbb{N}$ *mit* $n + m = k$ *gilt dann*

$$\mathrm{L}_2(\mathrm{G};\mathbb{C}) = \mathcal{O}_{n,m,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}) \oplus \partial_{\bar z}^n \partial_z^m \overset{\circ}{\widetilde{\mathrm{W}}}{}^{k,2}_{m,n}(\mathrm{G};\mathbb{C}).$$

Beweis

Offenbar genügt es, die Identität $\mathcal{O}^{\perp}_{n,m,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}) = \partial^n_{\overline{z}}\partial^m_z \overset{\circ}{\widetilde{\mathrm{W}}}{}^{k,2}_{m,n}(\mathrm{G};\mathbb{C})$ zu verifizieren.

Sei also $q \in \partial^n_{\overline{z}}\partial^m_z \overset{\circ}{\widetilde{\mathrm{W}}}{}^{k,2}_{m,n}(\mathrm{G};\mathbb{C})$ beliebig vorgelegt. Dann existiert zu diesem q ein $r \in \overset{\circ}{\widetilde{\mathrm{W}}}{}^{k,2}_{m,n}(\mathrm{G};\mathbb{C})$ mit

$$\begin{aligned} \partial^n_{\overline{z}}\partial^m_z r &= q \text{ in G}, \\ \partial^\mu_{\overline{z}}\partial^\nu_z r &= 0 \text{ auf } \partial\mathrm{G} \text{ für } 0 \le \nu+\mu \le k-1,\ 0 \le \nu \le m,\ 0 \le \mu \le n. \end{aligned}$$

Für beliebiges $\varphi \in \mathcal{O}_{n,m,2}(\mathrm{G};\mathbb{C})$ folgt dann weiter

$$\begin{aligned} \langle q,\varphi\rangle = \langle \partial^n_{\overline{z}}\partial^m_z r,\varphi\rangle = \int\limits_{\mathrm{G}} \partial^n_{\overline{z}}\partial^m_z r(z)\overline{\varphi(z)}dxdy &= (-1)^n \int\limits_{\mathrm{G}} \partial^m_z r(z)\overline{\partial^n_z\varphi(z)}dxdy \\ &= (-1)^{n+m}\int\limits_{\mathrm{G}} r(z)\overline{\partial^m_{\overline{z}}\partial^n_z\varphi(z)}dxdy = 0, \end{aligned}$$

also $q \in \mathcal{O}^{\perp}_{n,m,2}(\mathrm{G};\mathbb{C})$.

Sei jetzt $q \in \mathcal{O}^{\perp}_{n,m,2}(\mathrm{G};\mathbb{C})$ beliebig vorgelegt. Für dieses q wird das folgende Problem betrachtet:

$$\begin{aligned} \partial^n_{\overline{z}}\partial^m_z r &= q \text{ in G}, \\ \partial^\mu_{\overline{z}}\partial^\nu_z r &= 0 \text{ auf } \partial\mathrm{G} \text{ für } 0 \le \nu+\mu \le k-1,\ 0 \le \nu \le m,\ 0 \le \mu \le n. \end{aligned} \tag{62}$$

Eine Lösung von (62) ist gegeben durch

$$r(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}} \partial^n_z\partial^m_{\overline{z}} g_k(z,\zeta)\partial^n_{\overline{\zeta}}\partial^m_\zeta r(\zeta)d\xi d\eta = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}} \partial^n_z\partial^m_{\overline{z}} g_k(z,\zeta)q(\zeta)d\xi d\eta$$

und die Behauptung folgt unter Beachtung der Eigenschaften von g_k auf $\partial\mathrm{G}$ sowie der entsprechenden Eigenschaften des T– bzw. des $\overline{\mathrm{T}}$–Operators (s. [Bege94], [Veku62]). □