2 Integraldarstellungen im Einheitskreis

2.1 Greensche Funktionen höherer Ordnung

Die Greensche Funktion höherer Ordnung von Δ^n, $n \in \mathbb{N}$, kann im Falle des Einheitskreises $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ explizit angegeben werden (s. [Alma99], [Bege02], [Veku68]).

Definition 2.1 *Die Greensche Funktion n–ter Ordnung g_n, $n \in \mathbb{N}$, für den Einheitskreis $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ ist definiert durch*

$$\begin{aligned} g_n(z,\zeta) \quad := \quad & \frac{|z-\zeta|^{2(n-1)}}{(n-1)!^2} \log \left| \frac{1-z\overline{\zeta}}{z-\zeta} \right|^2 \\ & \qquad + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{(-1)^\nu}{\nu} |z-\zeta|^{2(n-1-\nu)} \left(1-|\zeta|^2\right)^\nu \left(1-|z|^2\right)^\nu, \\ & \qquad\qquad z, \zeta \in \overline{\mathbb{D}},\ z \neq \zeta. \end{aligned}$$

Konsistenterweise hat g_n die folgenden Eigenschaften, notiert in (s. [Bege02])

Lemma 2.1 *Es ist*

$$\begin{aligned} \partial_z^\ell g_n(z,\zeta) &= 0 \quad \textit{für} \quad |z| = 1,\ |\zeta| < 1,\ 0 \le \ell \le n-1, \\ \partial_z^n g_n(z,\zeta) &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-z\overline{\zeta}} \right)^n \frac{(\overline{\zeta - z})^{n-1}}{\zeta - z} \qquad (28) \\ & \qquad\qquad \textit{für } z, \zeta \in \mathbb{D},\ z \neq \zeta, \\ \Delta_z^n g_n(z,\zeta) &= 0 \quad \textit{für } z, \zeta \in \mathbb{D},\ z \neq \zeta. \end{aligned}$$

Für einen **Beweis** siehe [Bege02].

2.2 Darstellungen mit Greenschen Funktionen höherer Ordnung

Mit den im vorangegangenen Paragraphen eingeführten Greenschen Funktionen höherer Ordnung läßt sich nun die folgende Integraldarstellung analog zu **Satz 1.2**, S. 7, bzw. **Satz 1.3**, S. 7, gewinnen (s. [Bege02]). Über dieses Ergebnis soll kurz referiert werden.

Satz 2.1 *Jedes* $\omega \in C^n(\mathbb{D};\mathbb{C}) \cap C^{n-1}(\overline{\mathbb{D}};\mathbb{C})$ *hat für* $z \in \mathbb{D}$ *die Darstellung*

$$\omega(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{n}{\nu!} \frac{(\overline{z-\zeta})^\nu}{(1-z\overline{\zeta})^2} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-z\overline{\zeta}}\right)^{n-1} \partial_{\overline{\zeta}}^\nu \omega(\zeta) d\xi d\eta$$
$$- \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{1}{(n-1)!} \frac{(\overline{z-\zeta})^{n-1}}{\zeta - z} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-z\overline{\zeta}}\right)^{n} \partial_{\overline{\zeta}}^n \omega(\zeta) d\xi d\eta$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{n}{\nu!} \frac{(\overline{z-\zeta})^\nu}{(1-z\overline{\zeta})^2} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-z\overline{\zeta}}\right)^{n-1} \partial_{\overline{\zeta}}^\nu \omega(\zeta) d\xi d\eta$$
$$- \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{D}} \partial_z^n g_n(z,\zeta) \partial_{\overline{\zeta}}^n \omega(\zeta) d\xi d\eta.$$

Der **Beweis** folgt [Bege02].
Nach Voraussetzung hat ω für $z \in \mathbb{D}$ gemäß (18), S. 11, die Darstellung

$$\begin{aligned}\omega(z) = \frac{1}{(n-1)!\pi} \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{(\overline{z-\zeta})^{n-1}}{z-\zeta} \partial_{\overline{\zeta}}^n \omega(\zeta) d\xi d\eta \\ - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{(\overline{z-\zeta})^k}{z-\zeta} \partial_{\overline{\zeta}}^k \omega(\zeta) d\zeta.\end{aligned} \tag{29}$$

Unter Beachtung von $|\zeta|^2 = 1$ für $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ folgt, dass die Kerne der Randintegrale von (29) nicht singulär sind, mithin also der **Integralsatz von Gauß 1.1**, S. 4, angewendet werden darf. Damit wird (29) zu

$$\omega(z) = \frac{1}{(n-1)!\pi} \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{(\overline{z-\zeta})^{n-1}}{z-\zeta} \frac{1-|\zeta|^2}{1-z\overline{\zeta}} \partial_{\overline{\zeta}}^n \omega(\zeta) d\xi d\eta$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{m!} \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{(\overline{z-\zeta})^k}{(1-z\overline{\zeta})^2} \partial_{\overline{\zeta}}^k \omega(\zeta) d\zeta.$$

Die Betrachtung der Differenz

$$\frac{1}{(n-1)!\pi} \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{(\overline{z-\zeta})^{n-1}}{z-\zeta} \left[\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-z\overline{\zeta}}\right)^n - \frac{1-|\zeta|^2}{1-z\overline{\zeta}}\right] \partial_{\overline{\zeta}}^n \omega(\zeta) d\xi d\eta$$

führt dann durch mehrmalige Anwendung des **Integralsatzes von Gauß 1.1**, S. 4, zur Behauptung. □

2.3 Darstellungen mit Bergmanschen Kernen zweiter Ordnung

Das in der Einleitung besprochene Konzept, die Bergmansche Kernfunktion betreffend, soll nun auf den Fall $\omega \in \mathrm{C}^2(\mathbb{D};\mathbb{C}) \cap \mathrm{C}^1(\overline{\mathbb{D}};\mathbb{C})$ übertragen werden. Für $z, \zeta \in \mathbb{D}$, $z \neq \zeta$, ist nach **Lemma 2.1**, S. 17,

$$g_2(z,\zeta) = |\zeta - z|^2 \log \left| \frac{1 - z\overline{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2 - \left(1 - |\zeta|^2\right)\left(1 - |z|^2\right),$$

und

$$\partial_z^2 g_2(z,\zeta) = -\left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - z\overline{\zeta}}\right)^2 \frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z}.$$

Für $z, \zeta \in \mathbb{D}$, $z \neq \zeta$, gilt weiter

$$\partial_{\overline{\zeta}} \partial_z^2 g_2(z,\zeta) = -\frac{1}{\zeta - z} \left[\left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - z\overline{\zeta}}\right)^2 + \left(\overline{\zeta - z}\right) 2 \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - z\overline{\zeta}} \frac{z - \zeta}{(1 - z\overline{\zeta})^2} \right].$$

Somit folgt für $z, \zeta \in \mathbb{D}$, $z \neq \zeta$,

$$\begin{aligned}
\partial_{\overline{\zeta}}^2 \partial_z^2 g_2(z,\zeta) &= -\frac{1}{\zeta - z} \Bigg[2 \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - z\overline{\zeta}} \frac{z - \zeta}{(1 - z\overline{\zeta})^2} \\
&\quad + 2\,(z - \zeta) \left(\frac{z - \zeta}{(1 - z\overline{\zeta})^2} \frac{\overline{\zeta - z}}{(1 - z\overline{\zeta})^2} + \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - z\overline{\zeta}} \frac{(1 - z\overline{\zeta})^2 + (\overline{\zeta - z}) 2 (1 - z\overline{\zeta}) z}{(1 - z\overline{\zeta})^4} \right) \Bigg] \\
&= \frac{2}{(1 - z\overline{\zeta})^4} \left[2(1 - |\zeta|^2)(1 - z\overline{\zeta}) + 2(1 - |\zeta|^2) z (\overline{\zeta - z}) - |\zeta - z|^2 \right] \\
&= \frac{2}{(1 - z\overline{\zeta})^4} \left[2(1 - |\zeta|^2)(1 - |z|^2) - |\zeta - z|^2 \right].
\end{aligned}$$

Die Bergmansche Kernfunktion zweiter Ordnung für den Einheitskreis lautet also (s. (17), S. 11)

$$\mathrm{K}_2(z,\overline{\zeta}) = \frac{1}{\pi} \partial_{\overline{\zeta}}^2 \partial_z^2 g_2(z,\zeta) = \frac{2}{\pi (1 - z\overline{\zeta})^4} \left[2(1 - |\zeta|^2)(1 - |z|^2) - |\zeta - z|^2 \right]. \tag{30}$$

Eine zum **Satz 1.3**, S. 7, analoge Aussage macht nun der folgende

Satz 2.2 *Jedes $\omega \in \mathrm{C}^2(\mathbb{D};\mathbb{C}) \cap \mathrm{C}^1(\overline{\mathbb{D}};\mathbb{C})$ hat für $z \in \mathbb{D}$ die Darstellung*

$$\omega(z) = \int_{\mathbb{D}} \mathrm{K}_2(z,\overline{\zeta}) \omega(\zeta) d\xi d\eta - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \partial_z^2 g_2(z,\zeta) \partial_{\overline{\zeta}}^2 \omega(\zeta) d\xi d\eta. \tag{31}$$

Beweis
Nach **Satz 2.1**, S. 18, hat ω für $z \in \mathbb{D}$ die Darstellung

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{D}} 2\frac{1-|\zeta|^2}{(1-z\overline{\zeta})^3}\omega(\zeta)d\xi d\eta + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{D}} 2\frac{(\overline{z-\zeta})(1-|\zeta|^2)}{(1-z\overline{\zeta})^3}\partial_{\overline{\zeta}}\omega(\zeta)d\xi d\eta$$
$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{D}} \partial_z^2 g_2(z,\zeta)\partial_{\overline{\zeta}}^2\omega(\zeta)d\xi d\eta. \tag{32}$$

Wegen $1 - z\overline{\zeta} \neq 0$ für $z, \zeta \in \mathbb{D}$, ist

$$\partial_{\overline{\zeta}}\left\{\frac{(\overline{z-\zeta})(1-|\zeta|^2)}{(1-z\overline{\zeta})^3}\omega(\zeta)\right\} = \frac{(\overline{z-\zeta})(1-|\zeta|^2)}{(1-z\overline{\zeta})^3}\partial_{\overline{\zeta}}\omega(\zeta)$$
$$+\omega(\zeta)\partial_{\overline{\zeta}}\left\{\frac{(\overline{z-\zeta})(1-|\zeta|^2)}{(1-z\overline{\zeta})^3}\right\} \quad \text{für } z,\zeta \in \mathbb{D}.$$

Mit dem **Integralsatz von Gauß 1.1**, S. 4, ergibt sich für das zweite Integral aus (32)

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{D}} 2\frac{(\overline{z-\zeta})(1-|\zeta|^2)}{(1-z\overline{\zeta})^3}\partial_{\overline{\zeta}}\omega(\zeta)d\xi d\eta = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{D}} 2\partial_{\overline{\zeta}}\left\{\frac{(\overline{z-\zeta})(1-|\zeta|^2)}{(1-z\overline{\zeta})^3}\omega(\zeta)\right\}d\xi d\eta$$
$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{D}} \omega(\zeta)\partial_{\overline{\zeta}}\left\{2\frac{(\overline{z-\zeta})(1-|\zeta|^2)}{(1-z\overline{\zeta})^3}\right\}d\xi d\eta$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{D}} \omega(\zeta)\partial_{\overline{\zeta}}\left\{2\frac{(\overline{z-\zeta})(1-|\zeta|^2)}{(1-z\overline{\zeta})^3}\right\}d\xi d\eta.$$

Mit

$$\partial_{\overline{\zeta}}\left\{\frac{(\overline{z-\zeta})(1-|\zeta|^2)}{(1-z\overline{\zeta})^3}\right\}$$
$$= \frac{1}{(1-z\overline{\zeta})^4}\left[z(\overline{z-\zeta})(1-|\zeta|^2) - (1-|\zeta|^2)(1-|z|^2) + |z-\zeta|^2\right]$$

und demzufolge

$$\frac{1-|\zeta|^2}{(1-z\overline{\zeta})^3} - \partial_{\overline{\zeta}}\left\{\frac{(\overline{z-\zeta})(1-|\zeta|^2)}{(1-z\overline{\zeta})^3}\right\}$$
$$= \frac{1}{(1-z\overline{\zeta})^4}\left[2(1-|\zeta|^2)(1-|z|^2) - |z-\zeta|^2\right]$$

wird (32) zu

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{D}} \frac{2}{(1-z\overline{\zeta})^4}\left[2(1-|\zeta|^2)(1-|z|^2) - |z-\zeta|^2\right]\omega(\zeta)d\xi d\eta$$
$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{D}} \partial_z^2 g_2(z,\zeta)\partial_{\overline{\zeta}}^2\omega(\zeta)d\xi d\eta.$$

Mit Rücksicht auf (30) folgt die Behauptung. □

2.4 Bergmansche Kernfunktionen höherer Ordnung

Um eine zu **Satz 31**, S. 19, analoge Darstellung für Bergmansche Kernfunktionen höherer Ordnung K_n im Einheitskreis angeben zu können, sind diese zunächst zu berechnen. Dies soll jetzt geschehen.

Lemma 2.2 *Die Bergmansche Kernfunktion n–ter Ordnung* K_n $(n \in \mathbb{N})$ *für den Einheitskreis berechnet sich zu*

$$\begin{aligned} K_n(z,\overline{\zeta}) &= \frac{n}{\pi(1-z\overline{\zeta})^{2n}}\sum_{\mu=1}^{n}(-1)^{\mu-1}\binom{n}{\mu}\binom{n-1}{\mu-1}|z-\zeta|^{2(\mu-1)} \\ &\quad\times\left(1-|\zeta|^2\right)^{n-\mu}\left(1-|z|^2\right)^{n-\mu}, \quad z,\zeta \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

Beweis:
Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig fixiert. Unter Beachtung von

$$z,\zeta \in \mathbb{D} \Longrightarrow z\overline{\zeta} \neq 1$$

gilt dann für $0 \leq n \leq k$

$$\partial_{\overline{\zeta}}^n \frac{1}{(1-z\overline{\zeta})^k} = \frac{k(k+1)\ldots(k+n-1)z^n}{(1-z\overline{\zeta})^{k+n}}$$

und

$$\partial_{\overline{\zeta}}^n\left(1-|\zeta|^2\right)^k = k(k-1)\ldots(k-n+1)\left(1-|\zeta|^2\right)^{k-n}(-\zeta)^n.$$

Mit der Produktregel von Leibniz ist damit für $0 \leq \ell \leq k$

$$\partial_{\overline{\zeta}}^\ell\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-z\overline{\zeta}}\right)^k = \sum_{n=0}^{\ell}\binom{\ell}{n}\left\{\partial_{\overline{\zeta}}^n\frac{1}{(1-z\overline{\zeta})^k}\right\}\left\{\partial_{\overline{\zeta}}^{\ell-n}\left(1-|\zeta|^2\right)^k\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\ell} \binom{\ell}{n} \frac{k(k+1)\dots(k+n-1)z^n}{(1-z\overline{\zeta})^{k+n}}$$
$$\times\, k(k-1)\dots(k-\ell+n+1)\left(1-|\zeta|^2\right)^{k-\ell+n}(-\zeta)^{\ell-n}$$
$$= k\frac{\left(1-|\zeta|^2\right)^{k-\ell}}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^k} \sum_{n=0}^{\ell} \binom{\ell}{n} \frac{(k+n-1)!}{(k-\ell+n)!} \left(\frac{z(1-|\zeta|^2)}{1-z\overline{\zeta}}\right)^n (-\zeta)^{\ell-n}.$$

Da für $p \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\partial_{\overline{\zeta}}^p \left(\overline{\zeta - z}\right)^{k-1} = \begin{cases} (k-1)(k-2)\dots(k-p)\left(\overline{\zeta-z}\right)^{k-1-p} & : \quad 0 \le p \le k-1, \\ 0 & : \quad p \ge k, \end{cases}$$

folgt, unter Beachtung obiger Differentiationen, wieder mit der Produktregel von Leibniz:

$$\partial_{\overline{\zeta}}^k \left\{ \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-z\overline{\zeta}}\right)^k \left(\overline{\zeta-z}\right)^{k-1} \right\}$$
$$= \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \left\{ \partial_{\overline{\zeta}}^{\ell} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-z\overline{\zeta}}\right)^k \right\} \underbrace{\left\{ \partial_{\overline{\zeta}}^{k-\ell} \left(\overline{\zeta-z}\right)^{k-1} \right\}}_{=0 \text{ für } \ell=0}$$
$$= \sum_{\ell=1}^{k} \binom{k}{\ell} k \frac{\left(1-|\zeta|^2\right)^{k-\ell}}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^k} \sum_{n=0}^{\ell} \binom{\ell}{n} \frac{(k+n-1)!}{(k-\ell+n)!} \left(\frac{z(1-|\zeta|^2)}{1-z\overline{\zeta}}\right)^n (-\zeta)^{\ell-n}$$
$$\times \frac{(k-1)!}{(\ell-1)!}\left(\overline{\zeta-z}\right)^{\ell-1}$$
$$= k! \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-z\overline{\zeta}}\right)^k \sum_{\ell=1}^{k} \binom{k}{\ell} \left(\frac{1}{1-|\zeta|^2}\right)^{\ell} \frac{\left(\overline{\zeta-z}\right)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \sum_{n=0}^{\ell} \binom{\ell}{n} \frac{(k+n-1)!}{(k-\ell+n)!}$$
$$\times \left(\frac{z(1-|\zeta|^2)}{1-z\overline{\zeta}}\right)^n (-\zeta)^{\ell-n}$$
$$= k! \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-z\overline{\zeta}}\right)^k \sum_{\ell=1}^{k} \binom{k}{\ell} \left(\frac{1}{1-|\zeta|^2}\right)^{\ell} \frac{\left(\overline{\zeta-z}\right)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \sum_{n=0}^{\ell} \binom{\ell}{n} \frac{(k+n-1)!}{(k-\ell+n)!}$$
$$\times \frac{[z(1-|\zeta|^2)]^n}{(1-z\overline{\zeta})^n} \frac{(1-z\overline{\zeta})^{k-\ell+\ell-n}}{(1-z\overline{\zeta})^{k-n}} (-\zeta)^{\ell-n}$$
$$= k! \frac{(1-|\zeta|^2)^k}{(1-z\overline{\zeta})^{2k}} \sum_{\ell=1}^{k} \binom{k}{\ell} \frac{(1-|\zeta|^2)^{k-\ell}}{(1-|\zeta|^2)^k} \frac{\left(\overline{\zeta-z}\right)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} (1-z\overline{\zeta})^{k-\ell}$$
$$\times \sum_{n=0}^{\ell} \binom{\ell}{n} \frac{(k+n-1)!}{(k-\ell+n)!} \left[z(1-|\zeta|^2)\right]^n \left[(-\zeta)(1-z\overline{\zeta})\right]^{\ell-n}$$

$$= \frac{k!}{(1-z\overline{\zeta})^{2k}} \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{n=0}^{\ell} \binom{k}{\ell} \binom{\ell}{n} \frac{(k+n-1)!}{(k-\ell+n)!} \frac{\left(\overline{\zeta - z}\right)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} (1-|\zeta|^2)^{k-\ell}$$
$$\times (1-z\overline{\zeta})^{k-\ell} \left[z(1-|\zeta|^2)\right]^n \left[(-\zeta)(1-z\overline{\zeta})\right]^{\ell-n}.$$

Eine Anwendung von

Lemma A.2 (s. S. 101) *Sei* K *ein Körper,* $a, b \in \mathrm{K}$ *und* $\ell \in \mathbb{N}$*. Dann gilt für beliebige* $q_{n,\ell} \in \mathrm{K}$, $0 \leq n \leq \ell$

$$\sum_{n=0}^{\ell} q_{n,\ell} a^n b^{\ell-n} = \sum_{n=0}^{\ell} c_{n,\ell} \, (a+b)^n \, a^{\ell-n},$$

wobei

$$c_{n,\ell} = \sum_{\nu=0}^{\ell-n} (-1)^\nu \binom{n+\nu}{\nu} q_{\ell-n-\nu,\ell}, \quad 0 \leq n \leq \ell.$$

für

$$q_{n,\ell} := \binom{\ell}{n} \frac{(k+n-1)!}{(k-\ell+n)!}, \quad 0 \leq n \leq \ell,$$

(wobei $z(1-|\zeta|^2)$ die Rolle von a und $(-\zeta)(1-z\overline{\zeta})$ die von b übernimmt, was $a+b = z(1-|\zeta|^2) + (-\zeta)(1-z\overline{\zeta}) = z - \zeta$ zur Folge hat) ergibt weiter:

$$\frac{k!}{(1-z\overline{\zeta})^{2k}} \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{n=0}^{\ell} \binom{k}{\ell} \binom{\ell}{n} \frac{(k+n-1)!}{(k-\ell+n)!} \frac{\left(\overline{\zeta - z}\right)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} (1-|\zeta|^2)^{k-\ell}$$
$$\times (1-z\overline{\zeta})^{k-\ell} \left[z(1-|\zeta|^2)\right]^n \left[(-\zeta)(1-z\overline{\zeta})\right]^{\ell-n}$$
$$= \frac{k!}{(1-z\overline{\zeta})^{2k}} \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{n=1}^{\ell} \binom{k}{\ell} c_{n,\ell} \frac{\left(\overline{\zeta - z}\right)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} (1-|\zeta|^2)^{k-\ell}$$
$$\times (1-z\overline{\zeta})^{k-\ell} (z-\zeta)^n \left[z(1-|\zeta|^2)\right]^{\ell-n}.$$

Die Darstellung für die $c_{n,\ell}$ aus **Lemma A.2** eingesetzt führt zu:

$$\sum_{\ell=1}^{k} \sum_{n=1}^{\ell} \binom{k}{\ell} c_{n,\ell} \frac{\left(\overline{\zeta - z}\right)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} (1-|\zeta|^2)^{k-\ell} (1-z\overline{\zeta})^{k-\ell} (z-\zeta)^n \left[z(1-|\zeta|^2)\right]^{\ell-n}$$
$$= \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{n=1}^{\ell} \sum_{\nu=0}^{\ell-n} (-1)^\nu \binom{n+\nu}{\nu} \binom{\ell}{\ell-n-\nu} \frac{(k+\ell-n-\nu-1)!}{(k-\ell+\ell-n-\nu)!} \binom{k}{\ell} \frac{1}{(\ell-1)!}$$
$$\times \left(\overline{\zeta - z}\right)^{\ell-1} (1-|\zeta|^2)^{k-\ell} (1-z\overline{\zeta})^{k-\ell} (z-\zeta)^n \left[z(1-|\zeta|^2)\right]^{\ell-n}$$
$$= \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{n=1}^{\ell} \sum_{\nu=0}^{\ell-n} \frac{(n+\nu)!}{\nu! n!} \frac{\ell!}{(\ell-n-\nu)!(n+\nu)!} \frac{(k+\ell-n-\nu-1)!}{(k-n-\nu)!(\ell-1)!} \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad \times (-1)^\nu \left(\overline{\zeta - z}\right)^{\ell-1} (1-|\zeta|^2)^{k-\ell}(1-z\overline{\zeta})^{k-\ell} (z-\zeta)^n \left[z(1-|\zeta|^2)\right]^{\ell-n} \\
&= \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{n=1}^{\ell} \sum_{\nu=0}^{\ell-n} (-1)^\nu \binom{k-1+\ell-n-\nu}{k-1} \binom{k-n}{\nu} \binom{k}{n} \binom{k-1}{\ell-1} \\
&\qquad \times \left(\overline{\zeta - z}\right)^{\ell-1} (1-|\zeta|^2)^{k-\ell}(1-z\overline{\zeta})^{k-\ell} (z-\zeta)^n \left[z(1-|\zeta|^2)\right]^{\ell-n}.
\end{aligned}
$$

Wegen

$$
\sum_{\nu=0}^{\ell-n} (-1)^\nu \binom{k-1+\ell-n-\nu}{k-1} \binom{k-n}{\nu} = \binom{\ell-1}{n-1},
$$

(das ist die Aussage von **Lemma A.1**, S. 100, für $\alpha = k-n$ und $\beta = k-1$) folgt weiter:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\ell=1}^{k} \sum_{n=1}^{\ell} \binom{k}{\ell} c_{n,\ell} \frac{\left(\overline{\zeta - z}\right)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} (1-|\zeta|^2)^{k-\ell}(1-z\overline{\zeta})^{k-\ell} (z-\zeta)^n \left[z(1-|\zeta|^2)\right]^{\ell-n} \\
&\quad = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{n=1}^{\ell} \binom{\ell-1}{n-1} \binom{k}{n} \binom{k-1}{\ell-1} \left(\overline{\zeta - z}\right)^{\ell-1} (z-\zeta)^n \\
&\qquad\qquad \times (1-|\zeta|^2)^{k-\ell}(1-z\overline{\zeta})^{k-\ell} \left[z(1-|\zeta|^2)\right]^{\ell-n}.
\end{aligned}
$$

Unter Beachtung von

$$
\begin{aligned}
\binom{\ell-1}{n-1} \binom{k-1}{\ell-1} &= \frac{(\ell-1)!}{(n-1)!(\ell-n)!} \frac{(k-1)!}{(\ell-1)!(k-\ell)!} \\
&= \frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} \frac{(k-n)!}{(\ell-n)!(k-\ell)!} = \binom{k-1}{n-1} \binom{k-n}{\ell-n}
\end{aligned}
$$

impliziert eine Vertauschung der Summationsreihenfolge:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\ell=1}^{k} \sum_{n=1}^{\ell} \binom{\ell-1}{n-1} \binom{k}{n} \binom{k-1}{\ell-1} \left(\overline{\zeta - z}\right)^{\ell-1} (z-\zeta)^n \\
&\qquad\qquad \times (1-|\zeta|^2)^{k-\ell}(1-z\overline{\zeta})^{k-\ell} \left[z(1-|\zeta|^2)\right]^{\ell-n} \\
&\quad = \sum_{n=1}^{k} \sum_{\ell=n}^{k} \binom{k-1}{n-1} \binom{k}{n} \binom{k-n}{\ell-n} \left(\overline{\zeta - z}\right)^{\ell-1} (z-\zeta)^n \\
&\qquad\qquad \times (1-|\zeta|^2)^{k-\ell}(1-z\overline{\zeta})^{k-\ell} \left[z(1-|\zeta|^2)\right]^{\ell-n} \\
&\quad = \sum_{n=1}^{k} \sum_{\ell=0}^{k-n} \binom{k-1}{n-1} \binom{k}{n} \binom{k-n}{\ell} \left(\overline{\zeta - z}\right)^{\ell+n-1} (z-\zeta)^n \\
&\qquad\qquad \times (1-|\zeta|^2)^{k-\ell-n}(1-z\overline{\zeta})^{k-\ell-n} \left[z(1-|\zeta|^2)\right]^{\ell}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{k} \binom{k-1}{n-1} \binom{k}{n} \left(\overline{\zeta - z}\right)^{n-1} (z-\zeta)^n \\
&\qquad\qquad \times \sum_{\ell=0}^{k-n} \binom{k-n}{\ell} \left(\overline{\zeta - z}\right)^{\ell} \left[z(1-|\zeta|^2)\right]^{\ell} \left[(1-|\zeta|^2)(1-z\overline{\zeta})\right]^{k-\ell-n} \\
&= \sum_{n=1}^{k} \binom{k-1}{n-1} \binom{k}{n} (-1)^n (\zeta - z)|\zeta - z|^{2(n-1)} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times \left[(z\overline{\zeta} - |z|^2)(1-|\zeta|^2) + (1-z\overline{\zeta})(1-|\zeta|^2)\right]^{k-n} \\
&= \sum_{n=1}^{k} \binom{k-1}{n-1} \binom{k}{n} (-1)^n (\zeta - z)|\zeta - z|^{2(n-1)} (1-|\zeta|^2)^{k-n} (1-|z|^2)^{k-n}.
\end{aligned}
$$

Mit der Aussage von **Lemma 2.1**, S. 17, gilt also für $\zeta \neq z$ wie behauptet

$$
\begin{aligned}
\partial_{\overline{\zeta}}^{n} \partial_{z}^{n} g_n(z,\zeta) &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{1}{\zeta - z} \frac{n!}{(1-z\overline{\zeta})^{2n}} \\
&\quad \times \sum_{\mu=1}^{n} \binom{n-1}{\mu-1} \binom{n}{\mu} (-1)^{\mu} (\zeta - z)|\zeta - z|^{2(\mu-1)} (1-|\zeta|^2)^{n-\mu} (1-|z|^2)^{n-\mu} \\
&= \frac{(-1)^{n-1} n}{(1-z\overline{\zeta})^{2n}} \sum_{\mu=1}^{n} \binom{n-1}{\mu-1} \binom{n}{\mu} (-1)^{\mu} |\zeta - z|^{2(\mu-1)} (1-|\zeta|^2)^{n-\mu} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times (1-|z|^2)^{n-\mu}. \quad \square
\end{aligned}
$$

Die benötigten Eigenschaften von K_n fasst das folgende Lemma zusammen.

Lemma 2.3 *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$
\mathrm{K}_n \in C^n(\mathbb{D}^2;\mathbb{C}) \quad \textit{und} \quad \partial_{\overline{z}}^{n} \mathrm{K}_n(z,\overline{\zeta}) = \partial_{\zeta}^{n} \mathrm{K}_n(z,\overline{\zeta}) = 0 \quad \textit{für} \quad z,\zeta \in \mathbb{D}.
$$

Beweis
Für $1 \leq \mu \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, ist

$$
\begin{aligned}
&|z-\zeta|^{2(\mu-1)} \left(1-|z|^2\right)^{n-\mu} \\
&\qquad = (z-\zeta)^{\mu-1} \sum_{\tau=0}^{\mu-1} \binom{\mu-1}{\tau} \overline{z}^{\tau} \left(-\overline{\zeta}\right)^{\mu-1-\tau} \sum_{\ell=0}^{n-\mu} \binom{n-\mu}{\ell} z^{\ell} \left(-\overline{z}\right)^{\ell}.
\end{aligned}
$$

In der Darstellung von K_n aus **Lemma 2.2**, S. 21, ist also $n-1$ die höchste Potenz von $\overline{z}$. Dies zeigt die Polyanalytizität von K_n in z. Analog folgt die Polyantianalytizität von K_n in ζ. $\square$

2.5 Darstellungen mit Bergmanschen Kernen höherer Ordnung

Satz 2.3 *Jedes* $\omega \in \mathrm{C}^n(\mathbb{D};\mathbb{C}) \cap \mathrm{C}^{n-1}(\overline{\mathbb{D}};\mathbb{C})$ *hat für* $z \in \mathbb{D}$ *die Darstellung*

$$\omega(z) = \int_{\mathbb{D}} \mathrm{K}_n(z,\overline{\zeta})\omega(\zeta)d\xi d\eta - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \partial_z^n g_n(z,\zeta)\partial_{\overline{\zeta}}^n\omega(\zeta)d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Zum Beweis wird folgendes Lemma benötigt.

Lemma 2.4 *Für* $f, g \in \mathrm{C}^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, *gilt*

$$f\partial_{\overline{\zeta}}^\nu g - (-1)^\nu \left(\partial_{\overline{\zeta}}^\nu f\right) g = \partial_{\overline{\zeta}} \sum_{\ell=0}^{\nu-1} (-1)^\ell \left(\partial_{\overline{\zeta}}^\ell f\right)\left(\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu-1-\ell} g\right).$$

Beweis

$$\begin{aligned}
&\partial_{\overline{\zeta}} \sum_{\ell=0}^{\nu-1} (-1)^\ell \left(\partial_{\overline{\zeta}}^\ell f\right)\left(\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu-1-\ell} g\right) \\
&\quad = \sum_{\ell=0}^{\nu-1} (-1)^\ell \left[\left(\partial_{\overline{\zeta}}^{\ell+1} f\right)\left(\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu-1-\ell} g\right) + \left(\partial_{\overline{\zeta}}^\ell f\right)\left(\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu-\ell} g\right)\right] \\
&\quad = \sum_{\ell=0}^{\nu-1} (-1)^\ell \left(\partial_{\overline{\zeta}}^{\ell+1} f\right)\left(\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu-1-\ell} g\right) + \sum_{\ell=0}^{\nu-1} (-1)^\ell \left(\partial_{\overline{\zeta}}^\ell f\right)\left(\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu-\ell} g\right) \\
&\quad = (-1)^{\nu-1}\left(\partial_{\overline{\zeta}}^\nu f\right) g + \sum_{\ell=1}^{\nu-1} (-1)^{\ell-1} \left(\partial_{\overline{\zeta}}^\ell f\right)\left(\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu-\ell} g\right) \\
&\qquad\quad + f\left(\partial_{\overline{\zeta}}^\nu g\right) + \sum_{\ell=1}^{\nu-1} (-1)^\ell \left(\partial_{\overline{\zeta}}^\ell f\right)\left(\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu-\ell} g\right). \quad \square
\end{aligned}$$

Zum **Beweis** von **Satz 2.3**!

Nach **Satz 2.1** hat ω die Darstellung

$$\begin{aligned}
\omega(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{n}{\nu!} \frac{\left(\overline{z-\zeta}\right)^\nu}{(1-z\overline{\zeta})^2} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-z\overline{\zeta}}\right)^{n-1} \partial_{\overline{\zeta}}^\nu \omega(\zeta)d\xi d\eta \\
-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \partial_z^n g_n(z,\zeta)\partial_{\overline{\zeta}}^n\omega(\zeta)d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

Für $1 \leq \nu \leq n-1$ gilt mit **Lemma 2.4**

$$\begin{aligned}
&\frac{(\overline{z-\zeta})^{\nu}}{\nu!}\frac{(1-|\zeta|^2)^{n-1}}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{n+1}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu}\omega(\zeta) = (-1)^{\nu}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu}\left(\frac{(\overline{z-\zeta})^{\nu}}{\nu!}\frac{(1-|\zeta|^2)^{n-1}}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{n+1}}\right)\omega(\zeta)\\
&\qquad +\partial_{\overline{\zeta}}\sum_{\ell=0}^{\nu-1}(-1)^{\ell}\partial_{\overline{\zeta}}^{\ell}\left(\frac{(\overline{z-\zeta})^{\nu}}{\nu!}\frac{(1-|\zeta|^2)^{n-1}}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{n+1}}\right)\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu-1-\ell}\omega(\zeta)\\
&= (-1)^{\nu}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu}\left(\frac{(\overline{z-\zeta})^{\nu}}{\nu!}\frac{(1-|\zeta|^2)^{n-1}}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{n+1}}\right)\omega(\zeta)\\
&\qquad +\partial_{\overline{\zeta}}\sum_{\ell=0}^{\nu-1}(-1)^{\ell}\left(\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu-1-\ell}\omega(\zeta)\right)\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}(-1)^{\nu}\frac{(\overline{\zeta-z})^{\nu-\ell+k}}{(\nu-\ell+k)!}\\
&\qquad\quad\times\sum_{t=0}^{k}\binom{k}{t}\frac{(n+t)!}{n!}\frac{(n-1)!}{(n-1-k+t)!}z^{t}(-\zeta)^{k-t}\frac{(1-|\zeta|^2)^{n-1-k+t}}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{n+1+t}}.
\end{aligned}$$

Der Gaußsche Integralsatz liefert

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\partial_{\overline{\zeta}}\sum_{\ell=0}^{\nu-1}(-1)^{\ell}\left(\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu-1-\ell}\omega(\zeta)\right)\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}(-1)^{\nu}\frac{(\overline{\zeta-z})^{\nu-\ell+k}}{(\nu-\ell+k)!}\\
&\qquad\times\sum_{t=0}^{k}\binom{k}{t}\frac{(n+t)!}{n!}\frac{(n-1)!}{(n-1-k+t)!}z^{t}(-\zeta)^{k-t}\frac{(1-|\zeta|^2)^{n-1-k+t}}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{n+1+t}}d\xi d\eta\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\sum_{\ell=0}^{\nu-1}(-1)^{\ell}\left(\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu-1-\ell}\omega(\zeta)\right)\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}(-1)^{\nu}\frac{(\overline{\zeta-z})^{\nu-\ell+k}}{(\nu-\ell+k)!}\\
&\qquad\times\sum_{t=0}^{k}\binom{k}{t}\frac{(n+t)!}{n!}\frac{(n-1)!}{(n-1-k+t)!}z^{t}(-\zeta)^{k-t}\frac{(1-|\zeta|^2)^{n-1-k+t}}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{n+1+t}}d\zeta\\
&= 0, \quad \text{da} \quad n-1-k+t \geq 1.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\frac{n}{\nu!}\frac{(\overline{z-\zeta})^{\nu}}{(1-z\overline{\zeta})^2}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-z\overline{\zeta}}\right)^{n-1}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu}\omega(\zeta)d\xi d\eta\\
&= \frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|\zeta|^2)^{n-1}}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{n+1}}\omega(\zeta)d\xi d\eta + \sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\frac{(\overline{z-\zeta})^{\nu}}{\nu!}\frac{(1-|\zeta|^2)^{n-1}}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{n+1}}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu}\omega(\zeta)d\xi d\eta\\
&= \frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|\zeta|^2)^{n-1}}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{n+1}}\omega(\zeta)d\xi d\eta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\Bigg[(-1)^{\nu}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu}\left\{\frac{(\overline{z-\zeta})^{\nu}}{\nu!}\frac{(1-|\zeta|^2)^{n-1}}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{n+1}}\right\}\omega(\zeta)\\
&\quad+\partial_{\overline{\zeta}}\sum_{\ell=0}^{\nu-1}(-1)^{\ell}\partial_{\overline{\zeta}}^{\ell}\left\{\frac{(\overline{z-\zeta})^{\nu}}{\nu!}\frac{(1-|\zeta|^2)^{n-1}}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{n+1}}\right\}\left\{\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu-1-\ell}\omega(\zeta)\right\}\Bigg]\,d\xi d\eta\\
&=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{D}}(-1)^{\nu}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu}\left\{\frac{(\overline{z-\zeta})^{\nu}}{\nu!}\frac{(1-|\zeta|^2)^{n-1}}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{n+1}}\right\}\omega(\zeta)d\xi d\eta.
\end{aligned}
$$

Es ist

$$
\begin{aligned}
&n\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{\nu}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu}\left\{\frac{(\overline{z-\zeta})^{\nu}}{\nu!}\frac{(1-|\zeta|^2)^{n-1}}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{n+1}}\right\}\\
&\quad=n\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{\nu}\sum_{\ell=0}^{\nu}\binom{\nu}{\ell}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu-\ell}\frac{(\overline{z-\zeta})^{\nu}}{\nu!}\partial_{\overline{\zeta}}^{\ell}\left\{\frac{(1-|\zeta|^2)^{n-1}}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{n+1}}\right\}\\
&\quad=n\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{\nu}\binom{\nu}{\ell}\frac{(\overline{\zeta-z})^{\ell}}{\ell!}\partial_{\overline{\zeta}}^{\ell}\left\{\frac{(1-|\zeta|^2)^{n-1}}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{n+1}}\right\}\\
&\quad=n\sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{n-1-\ell}\binom{\nu+\ell}{\ell}\frac{(\overline{\zeta-z})^{\ell}}{\ell!}\partial_{\overline{\zeta}}^{\ell}\left\{\frac{(1-|\zeta|^2)^{n-1}}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{n+1}}\right\}\\
&\quad=n\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n}{\ell+1}\frac{(\overline{\zeta-z})^{\ell}}{\ell!}\partial_{\overline{\zeta}}^{\ell}\left\{\frac{(1-|\zeta|^2)^{n-1}}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{n+1}}\right\}\\
&\quad=\frac{n}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{2n}}\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n}{\ell+1}(\overline{\zeta-z})^{\ell}\left(1-|\zeta|^2\right)^{n-1-\ell}\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{n-1-\ell}\\
&\qquad\times\sum_{k=0}^{\ell}\underbrace{\binom{\ell}{k}\frac{(n+k)!}{n!\ell!}\frac{(n-1)!}{(n-1-\ell+k)!}}_{=\frac{\ell+1}{n}\binom{n+k}{\ell+1}\binom{\ell}{k}}\left(z(1-|\zeta|^2)\right)^{k}\left(-\zeta(1-z\overline{\zeta})\right)^{\ell-k}\\
&\quad=\frac{n}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{2n}}\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}(\overline{\zeta-z})^{\ell}\left(1-|\zeta|^2\right)^{n-1-\ell}\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{n-1-\ell}\\
&\qquad\qquad\times\sum_{k=0}^{\ell}\underbrace{\binom{\ell}{k}\binom{n+k}{\ell+1}}_{q_{k,\ell}}\left(z(1-|\zeta|^2)\right)^{k}\left(-\zeta(1-z\overline{\zeta})\right)^{\ell-k}\\
&\quad=\frac{n}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{2n}}\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}(\overline{\zeta-z})^{\ell}\left(1-|\zeta|^2\right)^{n-1-\ell}\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{n-1-\ell}\\
&\qquad\qquad\times\sum_{k=0}^{\ell}c_{k,\ell}\left(z-\zeta\right)^{k}\left(z(1-|\zeta|^2)\right)^{\ell-k}\quad(\text{mit }\textbf{Lemma A.2})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{2n}} \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} (\overline{\zeta - z})^{\ell} \left(1-|\zeta|^2\right)^{n-1-\ell} \left(1-z\overline{\zeta}\right)^{n-1-\ell} \\
&\qquad \times \sum_{k=0}^{\ell} \sum_{\nu=0}^{\ell-k} (-1)^{\nu} \underbrace{\binom{k+\nu}{k} \binom{n+\ell-k-\nu}{\ell+1} \binom{\ell}{k+\nu}}_{=\frac{k+1}{\ell+1}\binom{n}{k+1}\binom{n+\ell-k-\nu}{n}\binom{n-k-1}{\nu}} \\
&\qquad\qquad \times (z-\zeta)^k \left(z(1-|\zeta|^2)\right)^{\ell-k} \\
&= \frac{n}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{2n}} \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} (\overline{\zeta - z})^{\ell} \left(1-|\zeta|^2\right)^{n-1-\ell} \left(1-z\overline{\zeta}\right)^{n-1-\ell} \\
&\qquad \times \sum_{k=0}^{\ell} \frac{k+1}{\ell+1} \binom{n}{k+1} \underbrace{\sum_{\nu=0}^{\ell-k} (-1)^{\nu} \binom{n-k-1}{\nu} \binom{n+\ell-k-\nu}{n}}_{=\binom{\ell+1}{k+1} \quad (\text{mit } \textbf{Lemma A.1})} \\
&\qquad\qquad \times (z-\zeta)^k \left(z(1-|\zeta|^2)\right)^{\ell-k} \\
&= \frac{n}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{2n}} \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n-1}{\ell} \binom{n}{k+1} \binom{\ell}{k} (\overline{\zeta - z})^{\ell} \left(1-|\zeta|^2\right)^{n-1-\ell} \\
&\qquad\qquad \times \left(1-z\overline{\zeta}\right)^{n-1-\ell} (z-\zeta)^k \left(z(1-|\zeta|^2)\right)^{\ell-k} \\
&= \frac{n}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=k}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} \binom{n}{k+1} \binom{\ell}{k} (\overline{\zeta - z})^{\ell} \left(1-|\zeta|^2\right)^{n-1-\ell} \\
&\qquad\qquad \times \left(1-z\overline{\zeta}\right)^{n-1-\ell} (z-\zeta)^k \left(z(1-|\zeta|^2)\right)^{\ell-k} \\
&= \frac{n}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1-k} \binom{n-1}{\ell+k} \binom{n}{k+1} \binom{\ell+k}{k} (\overline{\zeta - z})^{\ell+k} \\
&\qquad \times \left(1-|\zeta|^2\right)^{n-1-\ell-k} \left(1-z\overline{\zeta}\right)^{n-1-\ell-k} (z-\zeta)^k \left(z(1-|\zeta|^2)\right)^{\ell} \\
&= \frac{n}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} (-1)^k |\zeta - z|^{2k} \left(1-|\zeta|^2\right)^{n-1-k} \\
&\qquad \times \sum_{\ell=0}^{n-1-k} \underbrace{\binom{n-1}{\ell+k} \binom{\ell+k}{k}}_{=\binom{n-1-k}{\ell}\binom{n-1}{k}} \left(z\left(\overline{\zeta - z}\right)\right)^{\ell} \left(1-z\overline{\zeta}\right)^{n-1-k-\ell} \\
&= \frac{n}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} \binom{n-1}{k} (-1)^k |\zeta - z|^{2k} \left(1-|\zeta|^2\right)^{n-1-k}
\end{aligned}
$$

$$
\times \sum_{\ell=0}^{n-1-k} \underbrace{\binom{n-1-k}{\ell}}_{q_{\ell,n-1-k}} \left(z\left(\overline{\zeta - z}\right)\right)^{\ell} \left(1 - z\overline{\zeta}\right)^{n-1-k-\ell}
$$

$$
= \frac{n}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1}\binom{n-1}{k}(-1)^k |\zeta - z|^{2k} \left(1-|\zeta|^2\right)^{n-1-k}
$$

$$
\times \sum_{\ell=0}^{n-1-k} c_{\ell,n-1-k} \left(1-|z|^2\right)^{\ell} \left(z\left(\overline{\zeta - z}\right)\right)^{n-1-k-\ell}
$$

$$
= \frac{n}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1}\binom{n-1}{k}(-1)^k |\zeta - z|^{2k} \left(1-|\zeta|^2\right)^{n-1-k}
$$

$$
\times \sum_{\ell=0}^{n-1-k} \sum_{\nu=0}^{n-1-k-\ell} (-1)^{\nu} \binom{\ell+\nu}{\ell} \binom{n-1-k}{\ell+\nu} \left(1-|z|^2\right)^{\ell} \left(z\left(\overline{\zeta - z}\right)\right)^{n-1-k-\ell}
$$

$$
= \frac{n}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1}\binom{n-1}{k}(-1)^k |\zeta - z|^{2k} \left(1-|\zeta|^2\right)^{n-1-k}
$$

$$
\times \sum_{\ell=0}^{n-1-k} \binom{n-1-k}{\ell} \sum_{\nu=0}^{n-1-k-\ell} (-1)^{\nu} \binom{n-1-k-\ell}{\nu}
$$

$$
\times \left(1-|z|^2\right)^{\ell} \left(z\left(\overline{\zeta - z}\right)\right)^{n-1-k-\ell}
$$

$$
= \frac{n}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1}\binom{n-1}{k}(-1)^k |\zeta - z|^{2k} \left(1-|\zeta|^2\right)^{n-1-k}
$$

$$
\times \left(1-|z|^2\right)^{n-1-k}
$$

$$
= \frac{n}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^{2n}} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\binom{n-1}{k-1}(-1)^{k-1} |\zeta - z|^{2(k-1)} \left(1-|\zeta|^2\right)^{n-k}
$$

$$
\times \left(1-|z|^2\right)^{n-k}.
$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Bemerkung
Zu dem gleichen Ergebnis kommen H. Begehr und A. Dzhuraev in [BeDz04], wenn auch mit anderen Methoden und ohne die Erwähnung, dass es sich um eine Darstellung mit Bergmanschen Kernen höherer Ordnung handelt.

Für $f \in \mathrm{C}^1(\mathrm{G};\mathbb{C})$, $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$, $f = u + iv$ und $z \in \mathrm{G}$, $z = x + iy$, ist

$$\begin{aligned}
\overline{\partial_{\bar z} f(z)} &= \frac{1}{2}\overline{(\partial_x u(x,y) + i\partial_y u(x,y) + i\partial_x v(x,y) - \partial_y v(x,y))} \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_x u(x,y) - i\partial_y u(x,y) - i\partial_x v(x,y) - \partial_y v(x,y)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_x u(x,y) - i\partial_y u(x,y) - [\partial_x iv(x,y) - i\partial_y iv(x,y)]\right) \\
&= \partial_z \overline{f(z)}.
\end{aligned} \tag{33}$$

Damit ergibt sich durch komplexe Konjugation der Aussage von **Satz 2.3** zusätzlich der

Satz 2.4 *Jedes $\omega \in \mathrm{C}^n(\mathbb{D};\mathbb{C}) \cap \mathrm{C}^{n-1}(\overline{\mathbb{D}};\mathbb{C})$ hat für $z \in \mathbb{D}$ die Darstellung*

$$\omega(z) = \frac{(-1)^n}{\pi}\int\limits_{\mathbb{D}} \omega(\zeta)\partial_{\bar z}^n \partial_\zeta^n g_n(z,\zeta)d\xi d\eta - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{D}} \partial_{\bar z}^n g_n(z,\zeta)\partial_\zeta^n \omega(\zeta)d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

2.6 Orthogonale Zerlegungen

Als Folgerung aus **Satz 2.3**, S. 26, bzw. **Satz 2.4** läßt sich eine explizite Zerlegung des Hilbertraums $\mathrm{L}_2(\overline{\mathbb{D}};\mathbb{C})$ in den Raum der in $\mathbb{D}$ polyanalytischen Funktionen und dessen orthogonalem Komplement (s. [Bege02]) bzw. in den Raum der in $\mathbb{D}$ polyantianalytischen Funktionen und dessen orthogonalem Komplement angeben. Folgende Definition erscheint dazu sinnvoll (s. [Bege02]).

Definition 2.2 *Für $n \in \mathbb{N}$ wird definiert:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{n,2}(\mathbb{D};\mathbb{C}) &:= \left\{ f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{D};\mathbb{C}) \mid \partial_{\bar z}^n f = 0 \ in\ \mathbb{D} \right\}, \\
\mathcal{AO}_{n,2}(\mathbb{D};\mathbb{C}) &:= \left\{ f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{D};\mathbb{C}) \mid \partial_z^n f = 0 \ in\ \mathbb{D} \right\}, \\
\mathcal{O}_{n,2}^{\perp}(\mathbb{D};\mathbb{C}) &:= \left\{ \varphi \in \mathrm{L}_2(\mathbb{D};\mathbb{C}) \mid \langle \varphi, f \rangle = 0 \quad \forall\, f \in \mathcal{O}_{n,2}(\mathbb{D};\mathbb{C}) \right\}, \\
\mathcal{AO}_{n,2}^{\perp}(\mathbb{D};\mathbb{C}) &:= \left\{ \varphi \in \mathrm{L}_2(\mathbb{D};\mathbb{C}) \mid \langle \varphi, f \rangle = 0 \quad \forall\, f \in \mathcal{AO}_{n,2}(\mathbb{D};\mathbb{C}) \right\}.
\end{aligned}$$

Damit gilt dann der folgende

Satz 2.5 *Jedes $\omega \in \mathrm{C}^n(\mathbb{D};\mathbb{C}) \cap \mathrm{C}^{n-1}(\overline{\mathbb{D}};\mathbb{C})$ hat in $\mathbb{D}$ die Darstellung $\omega = \phi + \psi$, wobei $\phi \in \mathcal{O}_{n,2}(\mathbb{D};\mathbb{C})$ und $\psi \in \mathcal{O}_{n,2}^{\perp}(\mathbb{D};\mathbb{C})$, oder $\phi \in \mathcal{AO}_{n,2}(\mathbb{D};\mathbb{C})$ und $\psi \in \mathcal{AO}_{n,2}^{\perp}(\mathbb{D};\mathbb{C})$.*

Beweis
In [Bege02] ist die erste Behauptung bereits bewiesen worden. Allerdings läßt sich mit Hilfe der Bergmanschen Kerne höherer Ordnung der dort angegebene Beweis wie folgt abkürzen.

Nach der Aussage von **Satz 2.3**, S. 26, hat ω in $\mathbb{D}$ die Darstellung

$$\omega(z) = \int_{\mathbb{D}} \mathrm{K}_n(z, \overline{\zeta})\omega(\zeta)d\xi d\eta - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \partial_z^n g_n(z,\zeta)\partial_{\overline{\zeta}}^n \omega(\zeta)d\xi d\eta. \tag{34}$$

Das erste Integral von (34) ist aus $\mathcal{O}_{n,2}(\mathbb{D};\mathbb{C})$. Denn mit der ersten Aussage von **Lemma 2.3**, S. 25, folgt, dass Integration und Differentiation vertauscht werden dürfen. Die zweite Aussage desselben Lemmas hat dann die Polyanalytizität dieses Integrals zur Konsequenz. Da das zweite Integral von (34) aus $\mathcal{O}_{n,2}^{\perp}(\mathbb{D};\mathbb{C})$ ist (s. [Bege02]), folgt die erste Behauptung.

Die zweite Behauptung folgt analog zur ersten unter Beachtung, dass ω in $\mathbb{D}$ nach **Satz 2.4**, S. 31, auch wie folgt dargestellt werden kann:

$$\omega(z) = \frac{(-1)^n}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \omega(\zeta)\partial_{\overline{z}}^n\partial_{\zeta}^n g_n(z,\zeta)d\xi d\eta - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \partial_{\overline{z}}^n g_n(z,\zeta)\partial_{\zeta}^n\omega(\zeta)d\xi d\eta. \quad \square$$

Mit

$$\mathrm{W}_0^{k,2}(\mathbb{D};\mathbb{C}) := \left\{ f \in \mathrm{W}^{k,2}(\mathbb{D};\mathbb{C}) \mid \partial_z^{\nu} f = 0 \text{ auf } \partial\mathbb{D} \text{ für } 0 \leq \nu \leq k-1 \right\}, k \in \mathbb{N},$$

wobei $\mathrm{W}^{k,2}(\mathbb{D};\mathbb{C})$ der Sobolevraum aller $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{D};\mathbb{C})$ mit schwachen Ableitungen bis zur Ordnung k aus $\mathrm{L}_2(\mathbb{D};\mathbb{C})$ ist, gilt damit der

Satz 2.6 *Für* $1 \leq k$ *ist*

$$\mathrm{L}_2(\overline{\mathbb{D}};\mathbb{C}) = \mathcal{O}_{k,2}(\mathbb{D};\mathbb{C}) \cap \mathrm{L}_2(\overline{\mathbb{D}};\mathbb{C}) \oplus \partial_z^k \mathrm{W}_0^{k,2}(\mathbb{D};\mathbb{C})$$

und

$$\mathrm{L}_2(\overline{\mathbb{D}};\mathbb{C}) = \mathcal{A}\mathcal{O}_{k,2}(\mathbb{D};\mathbb{C}) \cap \mathrm{L}_2(\overline{\mathbb{D}};\mathbb{C}) \oplus \partial_{\overline{z}}^k \mathrm{W}_0^{k,2}(\mathbb{D};\mathbb{C}).$$

Für einen **Beweis** siehe [Bege02] oder [BeDu01].

2.7 Darstellungen mit gemischten Ableitungen der Greenschen Funktionen höherer Ordnung

Wie in der Einleitung erwähnt, lassen sich die in der Cauchy–Pompeiu–Formel höherer Ordnung auftretenden Integralkerne der Randintegrale nur in einem bestimmten Fall als Gebietsintegral mit Bergmanschem Kern zusammenfassen. Der allgemeine Fall soll nun behandelt werden.

Eine Anwendung von **Satz 1.8**, S. 15, für $n=2$ und $\mathrm{G}=\mathbb{D}$ zeigt, dass jedes $\omega \in \mathrm{C}^2(\mathbb{D};\mathbb{C}) \cap \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}};\mathbb{C})$ in $\mathbb{D}$ unter Beachtung von

$$\partial_{\overline{\zeta}}\partial_\zeta\partial_{\overline{z}}\partial_z g_2(z,\zeta) = \frac{1}{(1-\overline{z}\zeta)^2} + \frac{1}{(1-z\overline{\zeta})^2} - 1$$

und

$$\partial_{\overline{z}}\partial_z g_2(z,\zeta) = \log\left|\frac{1-z\overline{\zeta}}{z-\zeta}\right|^2 - 2 - \frac{\overline{\zeta}(z-\zeta)}{1-z\overline{\zeta}} - \frac{\zeta(\overline{z-\zeta})}{1-\overline{z}\zeta} + 1 - |\zeta|^2$$

die Darstellung

$$\begin{aligned}\omega(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{D}}&\left[\frac{1}{(1-\overline{z}\zeta)^2} + \frac{1}{(1-z\overline{\zeta})^2} - 1\right]\omega(\zeta)d\xi d\eta \\ &-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{D}}\left[\log\left|\frac{1-z\overline{\zeta}}{z-\zeta}\right|^2 - \frac{\overline{\zeta}(z-\zeta)}{1-z\overline{\zeta}} - \frac{\zeta(\overline{z-\zeta})}{1-\overline{z}\zeta} - 1 - |\zeta|^2\right] \\ &\qquad\qquad \times\partial_{\overline{\zeta}}\partial_\zeta\omega(\zeta)d\xi d\eta\end{aligned} \tag{35}$$

besitzt.

Dieser Darstellung soll nun eine andere gegenübergestellt werden, welche sich durch ein zum Beweis von **Satz 2.1**, S. 18, analoges Vorgehen ergibt.

Unter Beachtung von $|\zeta|^2 = 1$ für $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ wird (19), S. 13, für $\omega \in \mathrm{C}^2(\mathbb{D};\mathbb{C}) \cap \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}};\mathbb{C})$ und $z \in \mathbb{D}$ zu

$$\begin{aligned}\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathbb{D}}\omega(\zeta)\frac{\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}d\zeta &+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathbb{D}}\log|1-z\overline{\zeta}|^2\partial_{\overline{\zeta}}\omega(\zeta)d\overline{\zeta} \\ &+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{D}}\log|z-\zeta|^2\partial_{\overline{\zeta}}\partial_\zeta\omega(\zeta)d\xi d\eta.\end{aligned} \tag{36}$$

Die Randintegrale von (36) lassen sich mittels des **Integralsatzes von Gauß 1.1**, S. 4, in Gebietsintegrale transformieren, da $1 - z\overline{\zeta} \neq 0$ für $z,\zeta \in \mathbb{D}$. Damit ergibt sich (36) zu

$$\begin{aligned}\omega(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{D}}\frac{\omega(\zeta)}{(1-z\overline{\zeta})^2}d\xi d\eta &+ \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{D}}\left[\frac{\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}} + \frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}\right]\partial_{\overline{\zeta}}\omega(\zeta)d\xi d\eta \\ &-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{D}}\log\left|\frac{1-z\overline{\zeta}}{z-\zeta}\right|^2\partial_{\overline{\zeta}}\partial_\zeta\omega(\zeta)d\xi d\eta.\end{aligned} \tag{37}$$

Durch langwierige Rechnungen, die hier nicht vorgeführt werden sollen, ist es möglich, die Darstellung (37) auf die Form (35) zu bringen. Auch für den Fall $n = 3$ ist diese Transformation möglich. Allerdings war der Rechenaufwand noch erheblicher. Dieser Umstand führte unter anderem dazu, allgemeine Greensche Funktionen höherer Ordnung zu betrachten. Es sei in diesem Zusammenhang auf die entsprechenden Darstellungen in **Kapitel 3** verwiesen.

2.8 Allgemeine orthogonale Zerlegungen

Mit der Darstellung (35) läßt sich eine explizite Zerlegung des Hilbertraumes $\mathrm{L}_2(\mathbb{D};\mathbb{C})$ in den Raum der Funktionen $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, für die in $\mathbb{D}$ $\partial_{\overline{z}}\partial_z f = 0$ gilt und dessen orthogonalem Komplement angeben. Folgende Definition erscheint dazu sinnvoll.

Definition 2.3

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{1,1,2}(\mathbb{D};\mathbb{C}) &:= \{f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{D};\mathbb{C}) \mid \partial_{\overline{z}}\partial_z f = 0\}, \\ \mathcal{O}^{\perp}_{1,1,2}(\mathbb{D};\mathbb{C}) &:= \{\varphi \in \mathrm{L}_2(\mathbb{D};\mathbb{C}) \mid \langle \varphi, f\rangle = 0 \quad \forall f \in \mathcal{O}_{1,1,2}(\mathbb{D};\mathbb{C})\}. \end{aligned}$$

Damit gilt

Satz 2.7 *Jedes $\omega \in \mathrm{C}^2(\mathbb{D};\mathbb{C}) \cap \mathrm{C}^1(\overline{\mathbb{D}};\mathbb{C})$ hat in $\mathbb{D}$ die Darstellung*

$$\omega = \phi + \psi, \quad \textit{wobei} \quad \phi \in \mathcal{O}_{1,1,2}(\mathbb{D};\mathbb{C}) \ \textit{und}\ \psi \in \mathcal{O}^{\perp}_{1,1,2}(\mathbb{D};\mathbb{C}).$$

Beweis
Für $z \in \mathbb{D}$ sei

$$\phi(z) := \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{D}} \left[\frac{1}{(1-\overline{z}\zeta)^2} + \frac{1}{(1-z\overline{\zeta})^2} - 1\right]\omega(\zeta)d\xi d\eta$$

und

$$\psi(z) := \\ -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{D}} \left[\log\left|\frac{1-z\overline{\zeta}}{z-\zeta}\right|^2 - \frac{\overline{\zeta}(z-\zeta)}{1-z\overline{\zeta}} - \frac{\zeta(\overline{z-\zeta})}{1-\overline{z}\zeta} - 1 - |\zeta|^2\right]\partial_{\overline{\zeta}}\partial_\zeta\omega(\zeta)d\xi d\eta.$$

Nach (35) hat ω in $\mathbb{D}$ also die Darstellung $\omega = \phi + \psi$.

Offenbar ist ϕ in $\mathbb{D}$ harmonisch. Somit bleibt zu zeigen, dass für beliebiges $f \in \mathcal{O}_{1,1,2}(\mathbb{D};\mathbb{C})$ gilt: $\langle \psi, f\rangle = 0$. Sei also $f \in \mathcal{O}_{1,1,2}(\mathbb{D};\mathbb{C})$ beliebig fixiert. Dann ist

$$\langle \psi, f\rangle = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{D}}\int\limits_{\mathbb{D}}\left[\log\left|\frac{1-z\overline{\zeta}}{z-\zeta}\right|^2 - \frac{\overline{\zeta}(z-\zeta)}{1-z\overline{\zeta}} - \frac{\zeta(\overline{z-\zeta})}{1-\overline{z}\zeta} - 1 - |\zeta|^2\right]$$
$$\times \partial_{\overline{\zeta}}\partial_\zeta \omega(\zeta)\overline{f(z)}d\xi d\eta dx dy.$$

Es reicht also, zu zeigen:

$$\int\limits_{\mathbb{D}}\left[\log\left|\frac{1-z\overline{\zeta}}{z-\zeta}\right|^2 - \frac{\overline{\zeta}(z-\zeta)}{1-z\overline{\zeta}} - \frac{\zeta(\overline{z-\zeta})}{1-\overline{z}\zeta} - 1 - |\zeta|^2\right]\overline{f(z)}dxdy = 0.$$

Zweimalige Anwendung des **Integralsatzes von Gauß 1.1**, S. 4, zeigt unter Beachtung von (33), S. 31, und der ersten Aussage von **Lemma 2.1**, S. 17,

$$\int\limits_{\mathbb{D}}\left[\log\left|\frac{1-z\overline{\zeta}}{z-\zeta}\right|^2 - \frac{\overline{\zeta}(z-\zeta)}{1-z\overline{\zeta}} - \frac{\zeta(\overline{z-\zeta})}{1-\overline{z}\zeta} - 1 - |\zeta|^2\right]\overline{f(z)}dxdy$$
$$= \int\limits_{\mathbb{D}}\partial_{\overline{z}}\left\{\left[\left(\overline{z-\zeta}\right)\left[\log\left|\frac{1-z\overline{\zeta}}{z-\zeta}\right|^2 - 1\right] - |z-\zeta|^2\frac{\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(1-|\zeta|^2\right)\overline{z}\right]\overline{f(z)}\right\}dxdy$$
$$- \int\limits_{\mathbb{D}}\left[\left(\overline{z-\zeta}\right)\left[\log\left|\frac{1-z\overline{\zeta}}{z-\zeta}\right|^2 - 1\right] - |z-\zeta|^2\frac{\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right.$$
$$\left. + \left(1-|\zeta|^2\right)\overline{z}\right]\overline{\partial_z f(z)}dxdy$$
$$= -\int\limits_{\mathbb{D}}\left[\left(\overline{z-\zeta}\right)\left[\log\left|\frac{1-z\overline{\zeta}}{z-\zeta}\right|^2 - 1\right] - |z-\zeta|^2\frac{\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right.$$
$$\left. + \left(1-|\zeta|^2\right)\overline{z}\right]\overline{\partial_z f(z)}dxdy$$
$$= -\int\limits_{\mathbb{D}}\partial_z\left\{\left[|z-\zeta|^2\log\left|\frac{1-z\overline{\zeta}}{z-\zeta}\right|^2 - \left(1-|\zeta|^2\right)\left(1-|z|^2\right)\right]\overline{\partial_z f(z)}\right\}dxdy$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{D}}\left[|z-\zeta|^2\log\left|\frac{1-z\overline{\zeta}}{z-\zeta}\right|^2 - \left(1-|\zeta|^2\right)\left(1-|z|^2\right)\right]\overline{\partial_{\overline{z}}\partial_z f(z)}dxdy$$
$$= \int\limits_{\mathbb{D}}\left[|z-\zeta|^2\log\left|\frac{1-z\overline{\zeta}}{z-\zeta}\right|^2 - \left(1-|\zeta|^2\right)\left(1-|z|^2\right)\right]\overline{\partial_{\overline{z}}\partial_z f(z)}dxdy = 0,$$

nach Voraussetzung an f. $\square$

Sei nun

$$\overset{\circ}{\widetilde{\mathrm{W}}}{}^{2,2}(\mathbb{D};\mathbb{C}) := \Big\{ f \in \widetilde{\mathrm{W}}^{2,2}(\mathbb{D};\mathbb{C}) \mid \partial_z^\nu \partial_{\overline{z}}^\mu f = 0 \text{ auf } \partial\mathbb{D} \text{ für } 0 \le \nu + \mu \le 1, \\ 0 \le \nu \le 1, 0 \le \mu \le 1 \Big\},$$

wobei $\widetilde{\mathrm{W}}^{2,2}(\mathbb{D};\mathbb{C})$ den Sobolevraum aller $f \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G};\mathbb{C})$ bezeichnet, die schwache Ableitungen $\partial_z^\nu \partial_{\overline{z}}^\mu f$, $0 \le \nu \le 1$, $0 \le \mu \le 1$, aus $\mathrm{L}_2(\mathbb{D};\mathbb{C})$ besitzen. Damit ist alles bereitgestellt, um die angekündigte explizite, direkte, orthogonale Zerlegung von $\mathrm{L}_2(\mathbb{D};\mathbb{C})$ formulieren zu können.

Satz 2.8

$$\mathrm{L}_2(\mathbb{D};\mathbb{C}) = \mathcal{O}_{1,1,2}(\mathbb{D};\mathbb{C}) \oplus \partial_{\overline{z}}\partial_z \overset{\circ}{\widetilde{\mathrm{W}}}{}^{2,2}(\mathbb{D};\mathbb{C}).$$

Beweis

Nach der Aussage von **Satz 2.7** genügt es offenbar, die Identität

$$\mathcal{O}_{1,1,2}^{\perp}(\mathbb{D};\mathbb{C}) = \partial_{\overline{z}}\partial_z \overset{\circ}{\widetilde{\mathrm{W}}}{}^{2,2}(\mathbb{D};\mathbb{C})$$

zu bestätigen.

Sei also $q \in \partial_{\overline{z}}\partial_z \overset{\circ}{\widetilde{\mathrm{W}}}{}^{2,2}(\mathbb{D};\mathbb{C})$ beliebig vorgelegt. Dann existiert zu diesem q ein $r \in \overset{\circ}{\widetilde{\mathrm{W}}}{}^{2,2}(\mathbb{D};\mathbb{C})$ mit

$$\begin{aligned} \partial_{\overline{z}}\partial_z r &= q \text{ in } \mathbb{D}, \\ \partial_{\overline{z}}^\mu \partial_z^\nu r &= 0 \text{ auf } \partial\mathbb{D} \text{ für } 0 \le \nu + \mu \le 1,\ 0 \le \nu \le 1,\ 0 \le \mu \le 1. \end{aligned}$$

Für beliebiges $\varphi \in \mathcal{O}_{1,1,2}(\mathbb{D};\mathbb{C})$ folgt dann analog zum Beweis von **Satz 2.7** weiter

$$\langle q, \varphi \rangle = \langle \partial_{\overline{z}}\partial_z r, \varphi \rangle = 0,$$

also $q \in \mathcal{O}_{1,1,2}^{\perp}(\mathbb{D};\mathbb{C})$.

Sei jetzt $q \in \mathcal{O}_{1,1,2}^{\perp}(\mathbb{D};\mathbb{C})$ beliebig vorgelegt. Für dieses q wird folgendes überbestimmtes Problem betrachtet:

$$
\begin{aligned}
\partial_{\bar z}\partial_z r &= q \text{ in } \mathbb{D}, \\
\partial_{\bar z}^{\mu}\partial_z^{\nu} r &= 0 \text{ auf } \partial\mathbb{D} \text{ für } 0 \le \nu+\mu \le 1,\ 0 \le \nu \le 1,\ 0 \le \mu \le 1.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Aufgrund der Eigenschaften des T– bzw. des $\overline{\mathrm{T}}$–Operators (s. [Bege94]) ist eine Lösung r von (38) gegeben durch

$$
r(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \partial_{\bar z}\partial_z g_2(z,\zeta) q(\zeta) d\xi d\eta.
$$

Also gilt $q \in \partial_{\bar z}\partial_z \overset{\circ}{\widetilde{\mathrm{W}}}{}^{2,2}(\mathbb{D};\mathbb{C})$. $\square$