1 Einleitung

Für ein beschränktes Gebiet $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ mit glattem Rand $\partial\mathrm{G}$ hat eine Funktion $\omega \in \mathrm{C}^1(\mathrm{G};\mathbb{C}) \cap \mathrm{C}(\overline{\mathrm{G}};\mathbb{C})$ für $z \in \mathrm{G}$ nach der Cauchy–Pompeiu–Formel (s. [Bege94], [Bege99], [Pomp13], [Veku62]) die Darstellung

$$\omega(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathrm{G}} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}} \omega_{\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}, \quad \zeta = \xi + i\eta. \tag{1}$$

Existiert für G darüberhinaus die Greensche Funktion g, so lassen sich die Integralkerne der Darstellung (1) mittels geeigneter Ableitungen von g ausdrücken. Dies soll zunächst erläutert werden.

Sei also $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\mathrm{G}$ und $z = x + iy$ ein fester Punkt in G, im folgenden als Parameterpunkt bezeichnet. Weiter sei

$$h(z,\cdot) : \mathrm{G} \to \mathbb{R}$$

eine in G harmonische Funktion mit den vorgelegten Randwerten

$$h(z,\zeta) = \log|z - \zeta|^2, \quad \zeta \in \partial\mathrm{G}$$

(so eine Funktion existiert nach [Cour50]). Die Greensche Funktion

$$g(z,\cdot) : \mathrm{G} \to \mathbb{R}$$

von G für den Laplaceoperator

$$\Delta = 4\partial_z\partial_{\overline{z}},$$

wobei

$$\partial_z := \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \quad \text{und} \quad \partial_{\overline{z}} := \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$$

die nach Wirtinger benannten Differentialoperatoren sind (s. [Remm95]), ist dann definiert durch (s. [Bege94])

$$g(z,\zeta) := \log\frac{1}{|z-\zeta|^2} + h(z,\zeta), \quad z \neq \zeta, \tag{2}$$

und hat die folgenden Eigenschaften:

i) $g(z,\zeta)$ ist harmonisch in $\zeta \in \mathrm{G} \setminus \{z\}$;

ii) $g(z,\zeta) + \log|z - \zeta|^2$ ist harmonisch in $\zeta = z$;

iii) $\lim\limits_{\zeta \to \partial\mathrm{G}} g(z,\zeta) = 0.$

Zusätzlich ist g symmetrisch in ihren Argumenten, d.h.

$$g(z, \zeta) = g(\zeta, z) \quad \text{(s. [Bege94])},$$

so dass ebenso ζ statt z die Rolle des Parameterpunktes übernehmen kann. Ist demzufolge die Greensche Funktion eines beschränkten Gebietes G mit glattem Rand bekannt, gibt die Darstellungsformel von Green für harmonische Funktionen $u : \mathrm{G} \to \mathbb{R}$ (s. [Bege94], [ReRo92])

$$u(z) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial \mathrm{G}} u(\zeta) \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial \nu_\zeta} ds_\zeta, \tag{3}$$

wobei ν_ζ den äußeren Normalenvektor im Punkte ζ bezeichnet, eine eindeutige Lösung des Dirichlet Problems für harmonische Funktionen an.

Mit der Greenschen Funktion lassen sich darüberhinaus auch Integraldarstellungen für $\omega \in \mathrm{C}^1(\mathrm{G}; \mathbb{C}) \cap \mathrm{C}(\overline{\mathrm{G}}; \mathbb{C})$ angeben, welche z.B. explizite, direkte Zerlegungen des Hilbertraums $\mathrm{L}_2(\mathrm{G}; \mathbb{C})$ in den Raum der in G analytischen Funktionen und dessen orthogonales Komplement bzw. in den Raum der in G antianalytischen Funktionen und dessen orthogonales Komplement liefern (s. [Bege02], [BeDu01], [BeDz04], [Dzhu00]). Diese Darstellungen werden nun hergeleitet.

Mit iii) gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial \mathrm{G}} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial \mathrm{G}} \left[\frac{1}{\zeta - z} - \partial_z g(z, \zeta) \right] \omega(\zeta) d\zeta \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial \mathrm{G}} \partial_z h(z, \zeta) \omega(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \tag{4}$$

Das letzte Integral von (4) kann mit dem

Satz 1.1 (Integralsatz von Gauß) *Sei* $(\tau_1, \tau_2) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$ *und* $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ *ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Dann gilt für* $\omega \in \mathrm{C}^1(\mathrm{G}; \mathbb{C}) \cap \mathrm{C}(\overline{\mathrm{G}}; \mathbb{C})$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial G} \omega(z) d((iz)^{\tau_1} (-i\overline{z})^{\tau_2}) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_G \partial_{\overline{z}}^{\tau_1} \partial_z^{\tau_2} \omega(z) dx dy.$$

(s. [Bege94], [Veku62]) ausgewertet werden, da $\partial_\zeta \partial_z h(z, \zeta)$ existiert (und damit ebenso $\partial_{\overline{\zeta}} \partial_z h(z, \zeta)$).

Nach Definition (2) gilt für $z, \zeta \in \mathrm{G}$ mit $z \neq \zeta$

$$\partial_{\overline{\zeta}} \partial_z h(z, \zeta) = \partial_{\overline{\zeta}} \left(\frac{1}{z - \zeta} + \partial_z g(z, \zeta) \right) = \partial_{\overline{\zeta}} \partial_z g(z, \zeta). \tag{5}$$

Der letzte Term von (5) ist bis auf einen konstanten Faktor die Bergmansche Kernfunktion von G. Dies soll festgehalten werden in folgender

Definition 1.1 *Sei* G $\subset$ $\mathbb{C}$ *ein Gebiet mit Greenscher Funktion* $g(z,\zeta)$. *Die Funktion*

$$K(z,\overline{\zeta}) := -\frac{1}{\pi}\partial_{\overline{\zeta}}\partial_z g(z,\zeta)$$

heißt Bergmansche Kernfunktion von G
(s. [Berg50], [BeSc53], [Cour50], [Bege94]).

Bemerkung
Bergmansche Kernfunktionen – oder allgemeiner: reproduzierende Kernfunktionen – erfreuen sich nach wie vor regen wissenschaftlichen Interesses (s. z.B. [Sait03]).

Zurück zur Auswertung von (4). Mit dem **Integralsatz von Gauß 1.1** und den vorangegangenen Überlegungen folgt nun

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\partial_z h(z,\zeta)\omega(\zeta)d\zeta &= \frac{1}{\pi}\int_{G}\partial_{\overline{\zeta}}\left[\partial_z h(z,\zeta)\omega(\zeta)\right]d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{G}\left(\left[\partial_{\overline{\zeta}}\partial_z h(z,\zeta)\right]\omega(\zeta) + \partial_z h(z,\zeta)\partial_{\overline{\zeta}}\omega(\zeta)\right)d\xi d\eta.\end{aligned} \tag{6}$$

Unter Beachtung von (4) und (6) transformiert sich also (1) zu

$$\begin{aligned}\omega(z) = &-\frac{1}{\pi}\int_{G}\left[\partial_{\overline{\zeta}}\partial_z h(z,\zeta)\right]\omega(\zeta)d\xi d\eta \\ &-\frac{1}{\pi}\int_{G}\left(\frac{1}{\zeta - z} + \partial_z h(z,\zeta)\right)\omega_{\overline{\zeta}}(\zeta)d\xi d\eta.\end{aligned} \tag{7}$$

Der Integralkern des zweiten Integrals aus (7) ist bis auf die Stelle $z = \zeta$ gerade die partielle Ableitung von $g(z,\zeta)$ nach z. Es gilt aber darüberhinaus

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{G_\varepsilon}\partial_z g(z,\zeta)\omega_{\overline{\zeta}}(\zeta)d\xi d\eta = \frac{1}{\pi}\int_{G}\partial_z g(z,\zeta)\omega_{\overline{\zeta}}(\zeta)d\xi d\eta, \tag{8}$$

wobei $G_\varepsilon := G \setminus K_\varepsilon(z)$ mit $K_\varepsilon(z) := \{\zeta : |z-\zeta| \le \varepsilon\} \subset G$ für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein. Denn zunächst ist mit dem **Integralsatz von Gauß 1.1**

$$\frac{1}{2i}\int\limits_{\partial G_\varepsilon}\partial_z g(z,\zeta)\omega(\zeta)d\zeta=\int\limits_{G_\varepsilon}\left[\partial_{\overline{\zeta}}\partial_z g(z,\zeta)\right]\omega(\zeta)d\xi d\eta \\ +\int\limits_{G_\varepsilon}\partial_z g(z,\zeta)\omega_{\overline{\zeta}}(\zeta)d\xi d\eta. \tag{9}$$

Andererseits gilt aber auch

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial G_\varepsilon}\partial_z g(z,\zeta)\omega(\zeta)d\zeta=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{\partial G}\partial_z g(z,\zeta)\omega(\zeta)d\zeta-\int\limits_{|z-\zeta|=\varepsilon}\partial_z g(z,\zeta)\omega(\zeta)d\zeta\right)$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{|z-\zeta|=\varepsilon}\frac{\omega(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\int\limits_{|z-\zeta|=\varepsilon}\partial_z h(z,\zeta)\omega(\zeta)d\zeta\right)=-2\pi i\omega(z).$$

In Verbindung mit (9) impliziert dies

$$-\pi\omega(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{G_\varepsilon}\left[\partial_{\overline{\zeta}}\partial_z g(z,\zeta)\right]\omega(\zeta)d\xi d\eta+\int\limits_{G_\varepsilon}\partial_z g(z,\zeta)\omega_{\overline{\zeta}}(\zeta)d\xi d\eta\right). \tag{10}$$

Aus der Definition (2) ist sofort ersichtlich, dass gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{G_\varepsilon}\left[\partial_{\overline{\zeta}}\partial_z g(z,\zeta)\right]\omega(\zeta)d\xi d\eta=\int\limits_{G}\left[\partial_{\overline{\zeta}}\partial_z h(z,\zeta)\right]\omega(\zeta)d\xi d\eta.$$

Also ist (10) äquivalent zu

$$-2\pi i\omega(z)-2i\int\limits_{G}\left[\partial_{\overline{\zeta}}\partial_z h(z,\zeta)\right]\omega(\zeta)d\xi d\eta=\lim_{\varepsilon\to 0}2i\int\limits_{G_\varepsilon}\partial_z g(z,\zeta)\omega_{\overline{\zeta}}(\zeta)d\xi d\eta$$

$$\iff$$

$$2\pi i\omega(z)+2i\int\limits_{G}\partial_{\overline{\zeta}}\left[\partial_z h(z,\zeta)\omega(\zeta)\right]d\xi d\eta=2i\int\limits_{G}\partial_z h(z,\zeta)\omega_{\overline{\zeta}}(\zeta)d\xi d\eta \\ -\lim_{\varepsilon\to 0}2i\int\limits_{G_\varepsilon}\partial_z g(z,\zeta)\omega_{\overline{\zeta}}(\zeta)d\xi d\eta$$

$$\iff$$

$$2\pi i\omega(z)+\int\limits_{\partial G}\frac{\omega(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta=2i\int\limits_{G}\partial_z h(z,\zeta)\omega_{\overline{\zeta}}(\zeta)d\xi d\eta \\ -\lim_{\varepsilon\to 0}2i\int\limits_{G_\varepsilon}\partial_z g(z,\zeta)\omega_{\overline{\zeta}}(\zeta)d\xi d\eta$$

$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\omega_{\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{z-\zeta}-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\partial_z h(z,\zeta)\omega_{\overline{\zeta}}(\zeta)d\xi d\eta$$
$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}_\varepsilon}\partial_z g(z,\zeta)\omega_{\overline{\zeta}}(\zeta)d\xi d\eta,$$

was (8) zeigt. Zusammengefaßt gilt also der

Satz 1.2 *Sei* $\mathrm{G}\subset\mathbb{C}$ *ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und Greenscher Funktion* g*. Dann hat jedes* $\omega\in \mathrm{C}^1(\mathrm{G};\mathbb{C})\cap \mathrm{C}(\overline{\mathrm{G}};\mathbb{C})$ *für* $z\in\mathrm{G}$ *die Darstellung*

$$\omega(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\partial_z h(z,\zeta)\omega_{\overline{\zeta}}(\zeta)d\xi d\eta-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\partial_z g(z,\zeta)\omega_{\overline{\zeta}}(\zeta)d\xi d\eta+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathrm{G}}\frac{\omega(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

Wegen

$$\partial_{\overline{\zeta}}\left(h_z(z,\zeta)\omega(\zeta)\right)=h_{\overline{\zeta}z}(z,\zeta)\omega(\zeta)+h_z(z,\zeta)\omega_{\overline{\zeta}}(\zeta)$$

und (4) gilt mit **Satz 1.2** darüberhinaus auch der (s. [Dzhu00])

Satz 1.3 *Sei* $\mathrm{G}\subset\mathbb{C}$ *ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und Greenscher Funktion* g*. Dann hat jedes* $\omega\in \mathrm{C}^1(\mathrm{G};\mathbb{C})\cap \mathrm{C}(\overline{\mathrm{G}};\mathbb{C})$ *für* $z\in\mathrm{G}$ *die Darstellung*

$$\omega(z)=\int\limits_{\mathrm{G}}K(z,\overline{\zeta})\omega(\zeta)d\xi d\eta-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\partial_z g(z,\zeta)\partial_{\overline{\zeta}}\omega(\zeta)d\xi d\eta.$$

Bemerkung
Eine analoge Argumentation für die zu (1) konjugierte Darstellung

$$\omega(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathrm{G}}\overline{\frac{\omega(\zeta)}{\zeta-z}}d\overline{\zeta}-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\omega_\zeta(\zeta)\overline{\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}},\quad z\in\mathrm{G},\quad \zeta=\xi+i\eta$$

führt zu

Satz 1.4 *Sei* $\mathrm{G}\subset\mathbb{C}$ *ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und Greenscher Funktion* g*. Dann hat jedes* $\omega\in \mathrm{C}^1(\mathrm{G};\mathbb{C})\cap \mathrm{C}(\overline{\mathrm{G}};\mathbb{C})$ *für* $z\in\mathrm{G}$ *die Darstellung*

$$\omega(z)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\omega(\zeta)\partial_{\overline{z}}\partial_\zeta g(z,\zeta)d\xi d\eta-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{G}}\partial_{\overline{z}}g(z,\zeta)\partial_\zeta\omega(\zeta)d\xi d\eta.$$

Nun ist alles bereitgestellt, um die weiter oben erwähnte explizite orthogonale Zerlegung von $\mathrm{L}_2(\mathrm{G};\mathbb{C})$ formulieren zu können. Sei dazu

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{1,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}) &:= \{f \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G};\mathbb{C}) \mid \partial_{\overline{z}} f = 0 \text{ in } \mathrm{G}\}\,, \\
\mathcal{AO}_{1,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}) &:= \{f \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G};\mathbb{C}) \mid \partial_{z} f = 0 \text{ in } \mathrm{G}\}\,, \\
\mathcal{O}^{\perp}_{1,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}) &:= \{\varphi \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G};\mathbb{C}) \mid \langle \varphi, f\rangle = 0 \quad \forall\, f \in \mathcal{O}_{1,2}(\mathrm{G};\mathbb{C})\}\,, \\
\mathcal{AO}^{\perp}_{1,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}) &:= \{\varphi \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G};\mathbb{C}) \mid \langle \varphi, f\rangle = 0 \quad \forall\, f \in \mathcal{AO}_{1,2}(\mathrm{G};\mathbb{C})\}\,.
\end{aligned}$$

Damit gilt dann zunächst der

Satz 1.5 *Für ein beschränktes Gebiet* $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ *mit glattem Rand und Greenscher Funktion* g *sei*

$$\omega \in \mathrm{C}^1(\mathrm{G};\mathbb{C}) \cap \mathrm{C}(\overline{\mathrm{G}};\mathbb{C}).$$

Dann hat ω *in* G *die Darstellungen*

$$\omega = \phi + \psi, \quad \textit{wobei} \quad \phi \in \mathcal{O}_{1,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}) \ \textit{und}\ \psi \in \mathcal{O}^{\perp}_{1,2}(\mathrm{G};\mathbb{C})$$

oder

$$\omega = \phi + \psi, \quad \textit{wobei} \quad \phi \in \mathcal{AO}_{1,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}) \ \textit{und}\ \psi \in \mathcal{AO}^{\perp}_{1,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}).$$

Für einen **Beweis** siehe etwa [BeDu01] oder [Dzhu00].

Mit

$$\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^{1,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}) := \big\{f \in \mathrm{W}^{1,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}) \mid f = 0 \text{ auf } \partial\mathrm{G}\big\}\,,$$

wobei $\mathrm{W}^{1,2}(\mathrm{G};\mathbb{C})$ wie üblich den Sobolevraum aller $f \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G};\mathbb{C})$ mit schwachen Ableitungen erster Ordnung aus $\mathrm{L}_2(\mathrm{G};\mathbb{C})$ bezeichnet, gilt dann der

Satz 1.6 *Für ein beschränktes Gebiet* $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ *mit glattem Rand und Greenscher Funktion* g *ist*

$$\mathcal{O}^{\perp}_{1,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}) = \partial_z \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^{1,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}) \quad \textit{und} \quad \mathcal{AO}^{\perp}_{1,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}) = \partial_{\overline{z}} \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^{1,2}(\mathrm{G};\mathbb{C}).$$

Für einen **Beweis** siehe etwa [Dubi94], [Dubi95] oder [Dubi97].

Die vorangegangenen Darstellungsformeln lassen sich auf Funktionen

$$\omega \in \mathrm{C}^n(\mathrm{G};\mathbb{C}) \cap \mathrm{C}^{n-1}(\overline{\mathrm{G}};\mathbb{C}), \quad n \in \mathbb{N},$$

verallgemeinern. Dies soll jetzt kurz skizziert werden.

Für das Randwertproblem

Finde in einem beschränkten Gebiet $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ *eine Lösung* $u \in \mathrm{C}^{2n}(\mathrm{G}; \mathbb{R})$ *von* $\Delta^n u = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *mit den Randwerten*

$$\Delta^k u = f_{1,k}, \quad \partial_\nu \Delta^k u = f_{2,k}, \quad 0 \leq k \leq n-1. \tag{11}$$

gilt ein zum Dirichlet Problem analoges Resultat.

Motivierend sei bemerkt, dass Gleichungen des Typs

$$\Delta\Delta u + a\frac{\partial \Delta u}{\partial x} + b\frac{\partial \Delta u}{\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + e\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\frac{\partial u}{\partial x} + h\frac{\partial u}{\partial y} + ku = f$$

z.B. bei Untersuchungen zu Flächenkrümmungen und in der Theorie der flachen, elastischen Schalen (*Shallow Elastic Shells*) eine Rolle spielen (s. [Veku68]).

Es gilt nun eine zu (3) analoge Darstellungsformel. Denn für ein beschränktes Gebiet $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ mit (stückweise) glattem Rand und

$$u, v \in \mathrm{C}^{2n}(\mathrm{G}; \mathbb{C}) \cap \mathrm{C}^{2n-1}(\overline{\mathrm{G}}; \mathbb{C}), \quad n \in \mathbb{N},$$

ist zunächst (s. [Veku68])

$$\begin{aligned} &\int_{\mathrm{G}} (v\Delta^n u - u\Delta^n v)\, dxdy \\ &\qquad = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\partial \mathrm{G}} \left(\Delta^k v \frac{\partial \Delta^{n-k-1} u}{\partial \nu} - \frac{\partial \Delta^k v}{\partial \nu} \Delta^{n-k-1} u \right) ds. \end{aligned} \tag{12}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ und einen festen Punkt $z \in \mathrm{G}$ ist bekanntlich

$$\widetilde{\omega}_n(z, \zeta) = \frac{1}{(n-1)!^2} |z - \zeta|^{2(n-1)} \log \frac{1}{|z - \zeta|^2} \tag{13}$$

Fundamentallösung von

$$\Delta^n u = 0 \quad \text{in G}. \tag{14}$$

Sei $h_n \in \mathrm{C}^{2n-1}(\overline{\mathrm{G}}; \mathbb{C})$ nun reguläre Lösung von (14) in G mit

$$\begin{aligned} &h_n(z, \zeta) = -\widetilde{\omega}_n(z, \zeta),\ \partial_{\nu_\zeta} h_n(z, \zeta) = -\partial_{\nu_\zeta} \widetilde{\omega}_n(z, \zeta),\ \ldots, \\ &\qquad \partial_{\nu_\zeta}^{n-1} h_n(z, \zeta) = -\partial_{\nu_\zeta}^{n-1} \widetilde{\omega}_n(z, \zeta) \quad \text{auf } \partial \mathrm{G}, \end{aligned} \tag{15}$$

wobei unter einer regulären Lösung von (14) eine Funktion verstanden wird, die stetige partielle Ableitungen der Ordnung $\leq 2n$ in G besitzt. Diese Wahl von h_n führt dann üblicherweise zur Definition der Greenschen Funktion von (14) (s. [Veku68]).

Definition 1.2 *Für $n \in \mathbb{N}$ seien $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$, $\widetilde{\omega}_n$ und h_n wie oben. Die Funktion*

$$g_n(z,\zeta) := \widetilde{\omega}_n(z,\zeta) + h_n(z,\zeta)$$

heißt dann Greensche Funktion der Ordnung n von (14) in G oder einfach Greensche Funktion höherer Ordnung von G.

Bemerkung

Zu Existenz– und Eindeutigkeitsfragen von g_n siehe [Veku68].

Ersetzung von v durch u und u durch g_n in (12) führt mit einem zum Beweis von (3) analogen Schluss für $z \in \mathrm{G}$ zu

$$u(z) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]} \int_{\partial \mathrm{G}} \left(\Delta_\zeta^k u(\zeta) \frac{\partial \Delta_\zeta^{n-k-1} g_n(z,\zeta)}{\partial \nu_\zeta} - \frac{\partial \Delta_\zeta^k u(\zeta)}{\partial \nu_\zeta} \Delta_\zeta^{n-k-1} g_n(z,\zeta) \right) ds_\zeta \tag{16}$$

(s. [Veku68]), wobei $\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]$ die größte ganze Zahl $\leq \frac{1}{2}(n-1)$ bedeutet. Ist also die Greensche Funktion höherer Ordnung von Δ^n in dem beschränkten Gebiet $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ mit glattem Rand bekannt, so folgt analog zum Fall $n = 1$, dass (16) dann die Lösung des Problems (11) angibt.

Da Greensche Funktionen höherer Ordnung existieren, ist es naheliegend, dass es ebenso Bergmansche Kernfunktionen höherer Ordnung gibt. A. Dzhuraev hat 1986 diese Frage in [Dzhu86] beantwortet (s. auch [BeGi92]). Es soll kurz seine dahinführende Argumentation dargestellt werden.

Für ein beschränktes Gebiet $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ mit (stückweise) glattem Rand und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathcal{A}_n^2(\mathrm{G}) := \{ f : \mathrm{G} \to \mathbb{C} \mid \partial_{\bar{z}}^n f = 0 \text{ in } \mathrm{G} \}$$

mit beschränker L^2–Norm

$$\left(\int_{\mathrm{G}} |f(z)|^2 dxdy \right)^{1/2} = \|f\|_{\mathcal{A}_n^2(\mathrm{G})} < \infty.$$

In dieser Situation gilt dann folgendes

Lemma 1.1 *Sei* G *wie oben,* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\mathrm{K} \subset \mathrm{G}$ *kompakt. Dann gibt es eine Konstante* $\mathrm{C_K} > 0$, *die nur von* K *abhängt, derart dass*

$$\sup_{z\in \mathrm{K}} |f(z)| \leq \mathrm{C_K}\|f\|_{\mathcal{A}_n^2(\mathrm{G})} \quad \textit{für alle} \quad f \in \mathcal{A}_n^2(\mathrm{G}).$$

Es folgt, dass $\mathcal{A}_n^2(\mathrm{G})$ ein Hilbertraum mit dem inneren Produkt

$$(u, v) = \int_{\mathrm{G}} u(z)\overline{v(z)}dxdy$$

und für jedes feste $z \in \mathrm{G}$ das Funktional

$$f \mapsto \phi_z(f) = f(z), \quad f \in \mathcal{A}_n^2(\mathrm{G}),$$

ein stetiges, lineares Funktional auf $\mathcal{A}_n^2(\mathrm{G})$ ist. Also ist nach dem Rieszschen Darstellungssatz das lineare Funktional ϕ_z durch das innere Produkt mit einem Element $f_z^{(n)}(\zeta) \in \mathcal{A}_n^2(\mathrm{G})$ gegeben. Dies führt zu

Definition 1.3 *Sei* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ *ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und Greenscher Funktion höherer Ordnung* g_n. *Die Bergmansche Kernfunktion höherer Ordnung* K_n *für* G *wird wie folgt definiert*

$$\mathrm{K}_n(z, \overline{\zeta}) := f_z^{(n)}(\zeta), \quad z, \zeta \in \mathrm{G}.$$

Ist die Greensche Funktion höherer Ordnung g_n für Δ^n in G bekannt, so ergibt sich analog zum Fall $n = 1$ folgender Zusammenhang zwischen K_n und g_n

$$\mathrm{K}_n(z, \overline{\zeta}) = -\frac{(-1)^{n-1}}{\pi}\partial_z^n \partial_{\overline{\zeta}}^n g_n(z, \zeta), \quad z, \zeta \in \mathrm{G}. \tag{17}$$

Das erste Ziel dieser Arbeit ist es nun, **Satz 1.2** und **Satz 1.3** auf Greensche Funktionen und Bergmansche Kernfunktionen höherer Ordnung im Einheitskreis bzw. in allgemeinen Gebieten mit Greenscher Funktion höherer Ordnung zu verallgemeinern. Dabei werden die Integralkerne aus der für

$$\omega \in \mathrm{C}^n(\mathrm{G}; \mathbb{C}) \cap \mathrm{C}^{n-1}(\overline{\mathrm{G}}; \mathbb{C})$$

in G gültigen Darstellung (s. [Bege94], [BeHi97], [Dzhu86])

$$\begin{aligned} \omega(z) = \frac{1}{(k-1)!\pi} \int_{\mathrm{G}} \frac{\overline{(z-\zeta)}^{k-1}}{z-\zeta} \partial_{\overline{\zeta}}^k \omega(\zeta) d\xi d\eta \\ - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m!} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathrm{G}} \frac{\overline{(z-\zeta)}^m}{z-\zeta} \partial_{\overline{\zeta}}^m \omega(\zeta) d\zeta \end{aligned} \tag{18}$$

mittels geeigneter Ableitungen der Greenschen Funktion höherer Ordnung analog zum Fall $n = 1$ dargestellt. Die Darstellungen am Einheitskreis werden in **Kapitel 2** und die Darstellungen für allgemeine Gebiete am Anfang von **Kapitel 3** behandelt.

Die Darstellung (18) ist ein Spezialfall der Cauchy–Pompeiu–Formel höherer Ordnung. Um diese griffig formulieren zu können, vorab zwei Definitionen (s. [Bege94], [BeHi97]):

Definition 1.4 *Für $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m + n \geq 0$ und $(m, n) \neq (0, 0)$ sei*

$$K_{m,n}(z) := \begin{cases} \dfrac{(-1)^m(-m)!}{\pi(n-1)!} z^{m-1}\overline{z}^{n-1} & : \quad m \leq 0, \\[2ex] \dfrac{(-1)^n(-n)!}{\pi(m-1)!} z^{m-1}\overline{z}^{n-1} & : \quad n \leq 0, \\[2ex] \dfrac{z^{m-1}\overline{z}^{n-1}}{\pi(m-1)!(n-1)!} \left[\log|z|^2 - \displaystyle\sum_{\mu=1}^{m-1}\frac{1}{\mu} - \sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{\nu}\right] & : \quad 1 \leq m, n. \end{cases}$$

Definition 1.5 *Für ein Gebiet $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ und $\omega \in \mathrm{L}_1(\mathrm{G})$ sowie $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m + n \geq 0$ sei*

$$\mathrm{T}_{\mathrm{G},0,0}\omega(z) := \omega(z) \quad \textit{für} \quad (m, n) = (0, 0),$$

$$\mathrm{T}_{\mathrm{G},m,n}\omega(z) := \int_G K_{m,n}(z - \zeta)\omega(\zeta)d\xi d\eta \quad \textit{für} \quad (m, n) \neq (0, 0).$$

Damit läßt sich nun die oben angekündigte Darstellung formulieren.

Satz 1.7 *Sei $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, $\omega \in \mathrm{C}^n(\mathrm{G}; \mathbb{C}) \cap \mathrm{C}^{n-1}(\overline{\mathrm{G}}; \mathbb{C})$ und*

$$(\mu_m, \nu_m), \quad 0 \leq m \leq k,$$

eine Kette von Bi–Indizes mit

$$\mu_0 = \nu_0 = 0,\ \mu_{m-1} \leq \mu_m,\ \nu_{m-1} \leq \nu_m,\ \mu_{m-1} + \nu_{m-1} + 1 = \mu_m + \nu_m,\ 1 \leq m \leq k.$$

Dann gilt für $z \in \mathrm{G}$

$$\omega(z) = \mathrm{T}_{\mathrm{G},\mu_k,\nu_k}\partial_z^{\mu_k}\partial_{\overline{z}}^{\nu_k}\omega(z) + \sum_{m=0}^{k-1}\frac{1}{2}\int_{\partial\mathrm{G}} K_{\mu_{m+1},\nu_{m+1}}(z - \zeta)\partial_\zeta^{\mu_m}\partial_{\overline{\zeta}}^{\nu_m}\omega(\zeta)$$
$$\times d\left[(i\zeta)^{\nu_{m+1}-\nu_m}(-i\overline{\zeta})^{\mu_{m+1}-\mu_m}\right].$$

Da für $\omega \in C^n(G;\mathbb{C}) \cap C^{n-1}(\overline{G};\mathbb{C})$ in der Darstellung aus **Satz 1.7** auch gemischte Ableitungen auftreten, denn beispielsweise hat jedes $\omega \in C^2(G;\mathbb{C}) \cap C^1(\overline{G};\mathbb{C})$ in G die Darstellung (s. [Bege94], [BeDa02])

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\omega(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\omega_{\overline{\zeta}}(\zeta)\log|z-\zeta|^2 d\overline{\zeta} \\ +\frac{1}{\pi}\int\limits_{G}\omega_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)\log|z-\zeta|^2 d\xi d\eta, \tag{19}$$

ist es sinnvoll, auch gemischte Ableitungen der Fundamentallösung $\widetilde{\omega}_n$ zu betrachten, also nicht nur diejenigen Ableitungen von $\widetilde{\omega}_n$, welche zu der Bergmanschen Kernfunktion führen, um zu analogen Integraldarstellungen zu kommen. Das Verfahren soll an vorangegangener Darstellung erläutert werden. In G gilt für $z \neq \zeta$

$$\partial_{\overline{z}}\partial_z\widetilde{\omega}_2(z,\zeta) = -\log|z-\zeta|^2 - 2 \quad \text{und} \quad \partial_\zeta\partial_{\overline{z}}\partial_z\widetilde{\omega}_2(z,\zeta) = -\frac{1}{\zeta - z}.$$

Damit wird (19) zu

$$\begin{aligned}\omega(z) &= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\omega(\zeta)\partial_\zeta\partial_{\overline{z}}\partial_z\widetilde{\omega}_2(z,\zeta)d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\omega_{\overline{\zeta}}(\zeta)\left[\partial_{\overline{z}}\partial_z\widetilde{\omega}_2(z,\zeta)+2\right]d\overline{\zeta} \\ &\quad +\frac{1}{\pi}\int\limits_{G}\omega_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)\log|z-\zeta|^2 d\xi d\eta \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\omega(\zeta)\left[\partial_\zeta\partial_{\overline{z}}\partial_z g_2(z,\zeta) - \partial_\zeta\partial_{\overline{z}}\partial_z h_2(z,\zeta)\right]d\zeta \\ &\quad -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\omega_{\overline{\zeta}}(\zeta)\left[\partial_{\overline{z}}\partial_z g_2(z,\zeta) - \partial_{\overline{z}}\partial_z h_2(z,\zeta)+2\right]d\overline{\zeta} \\ &\quad +\frac{1}{\pi}\int\limits_{G}\omega_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)\log|z-\zeta|^2 d\xi d\eta.\end{aligned}$$

Die Greensche Funktion g_2 verschwindet auf dem Rand von G und ebenso alle ihre Ableitungen. Denn aus (15) folgt

$$g_n(z,\zeta) = 0,\ \partial_{\nu_\zeta}g_n(z,\zeta) = 0,\ \ldots,\ \partial_{\nu_\zeta}^{n-1}g_n(z,\zeta) = 0 \quad \text{auf } \partial G. \tag{20}$$

Für $z \in G$ und $\zeta \in \partial G$ ergibt (20)

$$\partial_z^n g_n(z,\zeta) = 0,\ \partial_z^n\partial_{\nu_\zeta}g_n(z,\zeta) = 0,\ \ldots,\ \partial_z^n\partial_{\nu_\zeta}^{n-1}g_n(z,\zeta) = 0. \tag{21}$$

Sei nun $\zeta(t)$, $0 \leq t \leq 1$, Parameterdarstellung von ∂G. Der Bogenlängenparameter ist dann gegeben durch

$$s = s(t) = \int\limits_0^t |\zeta'(\tau)|d\tau.$$

Die Tangente an ∂G im Punkte $\zeta(s)$ hat dann die Darstellung $\zeta'(s) = \xi'(s)+i\eta'(s)$, woraus durch einfache Rechnung

$$\partial_{\nu_\zeta} = \eta'(s)\partial_\xi - \xi'(s)\partial_\eta = -i\left(\zeta'(s)\partial_\zeta - \overline{\zeta'(s)}\partial_{\overline{\zeta}}\right) \tag{22}$$

folgt. (22) angewandt auf (20) zeigt

$$\partial_{\nu_\zeta} g_n(z,\zeta) = 0 \iff \zeta'(s)\partial_\zeta g_n(z,\zeta) = \overline{\zeta'(s)}\partial_{\overline{\zeta}} g_n(z,\zeta). \tag{23}$$

Da auch

$$\partial_s g_n(z,\zeta) = \left(\zeta'(s)\partial_\zeta + \overline{\zeta'(s)}\partial_{\overline{\zeta}}\right) g_n(z,\zeta) = 0, \tag{24}$$

ergibt eine gemeinsame Auswertung von (23) und (24)

$$\partial_{\overline{\zeta}} g_n(z,\zeta) = 0. \tag{25}$$

Eine analoge Behandlung der verbleibenden höheren Ableitungen von g_n nach der äußeren Normalen zeigt dann die Äquivalenz von (21) und

$$\partial_z^n g_n(z,\zeta) = 0,\ \partial_z^n\partial_{\overline{\zeta}} g_n(z,\zeta) = 0,\ \ldots,\ \partial_z^n\partial_{\overline{\zeta}}^{n-1} g_n(z,\zeta) = 0. \tag{26}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathrm{G}} \omega(\zeta)\partial_\zeta\partial_{\overline{z}}\partial_z h_2(z,\zeta)d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathrm{G}} \omega_{\overline{\zeta}}(\zeta)\left[\partial_{\overline{z}}\partial_z h_2(z,\zeta) - 2\right] d\overline{\zeta} \\ + \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}} \omega_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)\log|z-\zeta|^2 d\xi d\eta.\end{aligned} \tag{27}$$

Wegen der Regularität von h_2 können die beiden Randintegrale aus (27) mit dem **Integralsatz von Gauß 1.1** ausgewertet werden. Somit ist

$$\begin{aligned}\omega(z) &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}} \partial_{\overline{\zeta}}\left\{\omega(\zeta)\partial_\zeta\partial_{\overline{z}}\partial_z h_2(z,\zeta)\right\} d\xi d\eta - \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}} \partial_\zeta\left\{\omega_{\overline{\zeta}}(\zeta)\left[\partial_{\overline{z}}\partial_z h_2(z,\zeta) - 2\right]\right\} d\xi d\eta \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}} \omega_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)\log|z-\zeta|^2 d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}} \omega(\zeta)\partial_{\overline{\zeta}}\partial_\zeta\partial_{\overline{z}}\partial_z h_2(z,\zeta)d\xi d\eta + \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}} \omega_{\overline{\zeta}}(\zeta)\partial_\zeta\partial_{\overline{z}}\partial_z h_2(z,\zeta)d\xi d\eta \\ &\quad - \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}} \omega_{\overline{\zeta}}(\zeta)\partial_\zeta\partial_{\overline{z}}\partial_z h_2(z,\zeta)d\xi d\eta - \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}} \omega_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)\left[\partial_{\overline{z}}\partial_z h_2(z,\zeta) - 2\right] d\xi d\eta \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{G}} \omega_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)\log|z-\zeta|^2 d\xi d\eta\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathrm{G}} \omega(\zeta) \partial_{\overline{\zeta}} \partial_{\zeta} \partial_{\overline{z}} \partial_z h_2(z,\zeta) d\xi d\eta$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathrm{G}} \omega_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta) \left[\log|z-\zeta|^2 - \partial_{\overline{z}} \partial_z h_2(z,\zeta) + 2 \right] d\xi d\eta.$$

Ein zur Rechtfertigung von (8) analoger Schluß führt letztendlich zu dem

Satz 1.8 *Sei* $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ *ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und Greenscher Funktion* g_2. *Dann hat jedes* $\omega \in \mathrm{C}^2(\mathrm{G};\mathbb{C}) \cap \mathrm{C}^1(\overline{\mathrm{G}};\mathbb{C})$ *in* G *die Darstellung*

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathrm{G}} \omega(\zeta) \partial_{\overline{\zeta}} \partial_{\zeta} \partial_{\overline{z}} \partial_z g_2(z,\zeta) d\xi d\eta - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathrm{G}} \partial_{\overline{z}} \partial_z g_2(z,\zeta) \partial_{\overline{\zeta}} \partial_{\zeta} \omega(\zeta) d\xi d\eta.$$

Eine Verallgemeinerung von **Satz 1.8** auf Funktionen

$$\omega \in \mathrm{C}^k(\mathrm{G};\mathbb{C}) \cap \mathrm{C}^{k-1}(\overline{\mathrm{G}};\mathbb{C}),$$

sowie die aus dieser Verallgemeinerung folgende Angabe von expliziten Zerlegungen von $\mathrm{L}_2(\mathrm{G};\mathbb{C})$ in den Raum der Funktionen $f \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G};\mathbb{C})$, für die in G gilt $\partial_z^m \partial_{\overline{z}}^n f = 0$, wobei $m + n = k$, und dessen orthogonalem Komplement, ist Gegenstand des zweiten Teils von **Kapitel 3**.

Durch Iteration der Darstellungsformel aus **Satz 1.7** wird darüberhinaus eine allgemeine Darstellungsformel für differenzierbare, komplexwertige Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher in Poly–Gebieten entwickelt. Diese Darstellung findet z.B. Anwendung bei der Lösung von gewissen Systemen von partiellen Differentialgleichungen (spezielle Anwendungen finden sich z.B. in [BeDz97], s. aber auch [BeDa02]). Durch komponentenweise Auswertung dieser Darstellung mit den vorangegangenen Ergebnissen werden dann Darstellungen in Poly–Gebieten mit Greenschen Funktionen höherer Ordnung angegeben. Beispielsweise gilt der

Satz 1.9 *Seien* $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2 \subset \mathbb{C}$ *beschränkte Gebiete mit glatten Rändern und Greenschen Funktionen* g_{k_1} *bzw.* g_{k_2} *höherer Ordnung,* $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. *Dann hat jedes hinreichend oft differenzierbare*[1] $\omega : \partial\mathrm{G}_1 \times \partial\mathrm{G}_2 \times \mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2 \to \mathbb{C}$ *für* $z \in \mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2$ *die Darstellung*

$$\omega(z) = \frac{(-1)^{k_1}}{\pi} \int\limits_{\mathrm{G}_1} \omega(\zeta_1, z_2) \partial_{z_1}^{m_1} \partial_{\overline{z}_1}^{n_1} \partial_{\zeta_1}^{n_1} \partial_{\overline{\zeta}_1}^{m_1} g_{k_1}(z_1,\zeta_1) d\xi_1 d\eta_1$$

[1] Was das genau heißt, wird an entsprechender Stelle geklärt.

$$
\begin{aligned}
&+\frac{(-1)^{k_2}}{\pi}\int\limits_{G_2}\omega(z_1,\zeta_2)\partial_{z_2}^{m_2}\partial_{\overline{z}_2}^{n_2}\partial_{\zeta_2}^{n_2}\partial_{\overline{\zeta}_2}^{m_2}g_{k_2}(z_2,\zeta_2)d\xi_2 d\eta_2\\
&-\frac{(-1)^{k_1+k_2}}{\pi^2}\int\limits_{G_1}\int\limits_{G_2}\omega(\zeta_1,\zeta_2)\partial_{z_1}^{m_1}\partial_{\overline{z}_1}^{n_1}\partial_{\zeta_1}^{n_1}\partial_{\overline{\zeta}_1}^{m_1}g_{k_1}(z_1,\zeta_1)\\
&\qquad\qquad\times\partial_{z_2}^{m_2}\partial_{\overline{z}_2}^{n_2}\partial_{\zeta_2}^{n_2}\partial_{\overline{\zeta}_2}^{m_2}g_{k_2}(z_2,\zeta_2)d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2\\
&+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{G_1}\int\limits_{G_2}\partial_{z_1}^{m_1}\partial_{\overline{z}_1}^{n_1}g_{k_1}(z_1,\zeta_1)\partial_{z_2}^{m_2}\partial_{\overline{z}_2}^{n_2}g_{k_2}(z_2,\zeta_2)\\
&\qquad\qquad\times\partial_{\zeta_1}^{n_1}\partial_{\overline{\zeta}_1}^{m_1}\partial_{\zeta_2}^{n_2}\partial_{\overline{\zeta}_2}^{m_2}\omega(\zeta_1,\zeta_2)d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2,
\end{aligned}
$$

wobei $m_1 + n_1 = k_1$ *und* $m_2 + n_2 = k_2, m_j \in \mathbb{N}, n_j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq 2$.

Diese Darstellung auf Funktionen $\omega : \partial_0 G^n \cup G^n \to \mathbb{C}$, wobei $\partial_0 G^n = \partial G_1 \times \ldots \times \partial G_n$, welche bezüglich jeder Komponente Ableitungen höherer Ordnung besitzen, verallgemeinernt, werden als Anwendung, analog zum Fall eines einzelnen beschränkten Gebietes, ebenso explizite orthogonale Zerlegungen von $L_2(G^n;\mathbb{C})$ diskutiert. Diese Zusammenhänge sind das Thema von **Kapitel 4**.

Dies scheint der richtige Platz zu sein, um meine Dankbarkeit gegenüber meinem Betreuer Prof. Dr. H. Begehr auszudrücken. Er hat mich vom ersten Semester an geprägt. Und der Eingeweihte wird die Begehrsche Mathematik auch an fast jeder Stelle dieser Arbeit unweigerlich erkennen. Ohne seine Fähigkeit, auch hinter grob unsinnigem Formelwust das eigentlich Gemeinte zu erkennen, hätte diese Arbeit sicher ein anderes Aussehen gehabt. Letztendlich hat sein sanfter Druck, sowie seine zu jeder Zeit anwesende Hilfsbereitschaft, entscheidend zur Fertigstellung dieser Arbeit beigetragen.

Ausserdem möchte ich mich bei meinem Kollegen und Freund Akad. Rat Dr. D. Schmersau für die vielen fachlichen Anregungen nach dem Korrekturlesen etlicher Seiten und die menschliche Unterstützung bedanken. Das meiste (vielleicht sogar fast alles!) habe ich berücksichtigt.

Desweitern möchte ich meine Dankbarkeit gegenüber meinem Freund Herrn Christian von Goetze ausdrücken. Er hat sich mühevoll immerwieder durch das Manuskript gequält und das als Fachfremder. Darüberhinaus hat er während der Entstehung dieser Arbeit sicher die größte persönliche Belastung ertragen müssen: Mich!

Bedanken möchte ich mich auch noch bei den fleissigen Korrekturlesern Frau Silke Gerstenberger, die immer froh war, einen Fehler zu finden, und Herrn Árpád Sztahó, der auch schon mal eine Nacht geopfert hat.