

Integraldarstellungen mit Greenschen Funktionen höherer Ordnung in Gebieten und Poly–Gebieten

Inauguraldissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
des
Fachbereichs Mathematik und Informatik
der
Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Andreas Krausz
20. Dezember 2004, Berlin

Betreuer und Gutachter: Prof. Dr. H. Begehr, Berlin, Deutschland

Gutachter: Prof. Dr. G. N. Hile, Honolulu, Hawaii, USA

Tag der Disputation: 11. Mai 2005

Zusammenfassung

Die in der Cauchy–Pompeiu–Formel höherer Ordnung auftretenden Integralkerne werden durch geeignete Ableitungen der Greenschen Funktion höherer Ordnung ersetzt. Für ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ mit glattem Rand entstehen auf diese Weise Integraldarstellungen, welche explizite direkte Zerlegungen des Hilbertraumes $L_2(G; \mathbb{C})$ bezüglich des Kernes des Operators $\partial_z^m \bar{\partial}_z^n$ liefern. Die Bestimmung des jeweiligen orthogonalen Komplements ist dabei ein wesentliches Ergebnis.

Neben der Angabe dieser allgemeinen Zerlegungen, werden speziell mittels der Bergmanschen Kernfunktionen höherer Ordnung, die analog zum Fall erster Ordnung durch bestimmte Differentiationen der Greenschen Funktionen höherer Ordnung gewonnen werden können, Integraldarstellungen entwickelt. Mit diesen Darstellungen können dann explizite orthogonale Zerlegungen des Hilbertraums $L_2(G; \mathbb{C})$ bezüglich polyanalytischer und polyantianalytischer Funktionen angegeben werden.

Darüberhinaus wird analog zur Cauchy–Pompeiu–Formel höherer Ordnung im Falle eines einzelnen Gebietes für komplexwertige Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher unter gewissen Differenzierbarkeitsbedingungen eine allgemeine Integraldarstellung höherer Ordnung in Poly–Gebieten entwickelt. Mit deren Hilfe können dann obige Ergebnisse durch komponentenweise Auswertung auf Poly–Gebiete verallgemeinert werden. Beispielsweise werden Integraldarstellungen für Poly–Gebiete mit Bergmanschen Kernen höherer Ordnung formuliert. Mit diesen Darstellungen können dann explizite orthogonale Zerlegungen der entsprechenden Hilberträume bezüglich der Kerne der Operatoren $\prod \partial_{z_j}^{n_j}$ bzw. der Operatoren $\prod \partial_{z_j}^{m_j}$ (d.h. also bezüglich polyplurianalytischer bzw. polypluriantianalytischer Funktionen) angegeben werden. Wie im speziellen Fall der Darstellung mittels Bergmanschen Kernen höherer Ordnung in Poly–Gebieten, ist auch im allgemeinen Fall die Angabe des jeweiligen orthogonalen Komplements ein wesentliches Ergebnis.

Exemplarisch werden diese Ergebnisse für den Einheitskreis und den Poly–Zylinder studiert. Denn im Einheitskreis kann die Bergmansche Kernfunktion höherer Ordnung berechnet werden, da die Greensche Funktion höherer Ordnung bekannt ist. Entsprechend lassen sich die obigen Ergebnisse auf Poly–Zylinder übertragen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Integraldarstellungen im Einheitskreis	17
2.1	Greensche Funktionen höherer Ordnung	17
2.2	Darstellungen mit Greenschen Funktionen höherer Ordnung	17
2.3	Darstellungen mit Bergmanschen Kernen zweiter Ordnung	19
2.4	Bergmansche Kernfunktionen höherer Ordnung	21
2.5	Darstellungen mit Bergmanschen Kernen höherer Ordnung	26
2.6	Orthogonale Zerlegungen	31
2.7	Darstellungen mit gemischten Ableitungen der Greenschen Funktionen höherer Ordnung	32
2.8	Allgemeine orthogonale Zerlegungen	34
3	Integraldarstellungen in Gebieten	38
3.1	Darstellungen mit Greenschen Funktionen höherer Ordnung	38
3.2	Darstellungen mit Bergmanschen Kernen höherer Ordnung	42
3.3	Orthogonale Zerlegungen	43
3.4	Darstellungen mit gemischten Ableitungen der Greenschen Funktionen höherer Ordnung	48
3.5	Allgemeine orthogonale Zerlegungen	75
4	Integraldarstellungen in Poly–Gebieten	78

4.1	Allgemeine Darstellung in Poly–Gebieten	78
4.2	Darstellungen in Poly–Gebieten mit Greenschen Funktionen höherer Ordnung	86
4.3	Darstellungen in Poly–Gebieten mit Bergmanschen Kernen höherer Ordnung	88
4.4	Darstellungen in Poly–Zylindern mit Bergmanschen Kernen höherer Ordnung	89
4.5	Orthogonale Zerlegungen in Poly–Gebieten	90
5	Ausblick	96
A		100
A.1	Beweise der Hilfssätze aus Kapitel 2	100
A.2	Beweise der Hilfssätze aus Kapitel 3	103
B	Lebenslauf	108
Literatur		110