

# Kapitel 5

## Zusammenfassung

Wir haben uns in dieser Promotionsschrift ausführlich mit theoretischen Aspekten der Bose-Einstein-Kondensation stark verdünnter Gase beschäftigt. Das Hauptinteresse galt dabei den grundsätzlichen Fragestellungen, die von der Statistik innerhalb endlicher bosonischer Systeme bei sehr tiefen Temperaturen im Hinblick auf die Kondensation der Materie in den Grundzustand aufgeworfen wurden.

Im einleitenden Kapitel 1 beschrieben wir zuerst die historischen Entwicklungen, die der experimentellen Realisierung der Bose-Einstein-Kondensation in verdünnten Gasen von Materie-Teilchen vorausgingen. Auch die dazu notwendigen experimentellen Techniken wurden darin beschrieben. Weiterhin diskutierten wir den Begriff der Kondensation in endlichen Systemen von Bosonen. Dabei stellten wir einige Befunde in ihrer theoretischen Beschreibungen innerhalb verschiedener Ensemble-Theorien vor und wiesen auf das Problem der inkompletten Äquivalenz der großkanonischen und kanonischen Ensembles in Anwesenheit des Kondensates hin.

Im Kapitel 2 beschrieben wir die thermodynamischen und statistischen Eigenschaften der idealen wechselwirkungsfreien Bose-gase aus der Sicht der großkanonischen Ensemble-Theorie. Darin leiteten wir zuerst die Bose-Einstein-Verteilung mit Hilfe feldtheoretischer Methoden her. Dieses Ergebnis wendeten wir anschließend auf das spezifische Problem der Bose-Gase in homogenen Systemen sowie in der harmonischen Falle und im Kasten-Potential an. Neben den bestimmten Merkmalen der Grundzustand-Besetzung und der Wärmekapazität, die allen Bose-Einstein-kondensierten Systemen eigen sind, wurden für diese Größen dennoch mehrere System-abhängige Besonderheiten festgestellt. Weiterhin galt unsere besondere Aufmerksamkeit dem Vergleich analytischer Resultate aus den semiklassischen Näherungen mit den numerischen Daten aus quantenmechanisch exakten Rechnungen. Die größten Unterschiede der beiden Vorgehensweisen wurden in der Nähe des kritischen Punktes festgestellt, an dem die Bose-Einstein-Kondensation in makroskopischen Maßstäben einsetzt. So wurden auch Unterschiede in den Lagen der kritischen Temperaturen selbst identifiziert, die in Abb. 2.5 b) fürs Fallen-Potential und in Abb. 2.7 für den Kasten dargestellt sind. Die analytischen Untersuchungen dazu wurden in einer kurzer Form in der Publikation [42] vorgestellt und bildeten dort eines der Hauptergebnisse. Weiterhin beschäftigten wir uns im Kapitel 2 mit den Greens-Funktionen und leiteten daraus die lokale Teilchendichte in der Falle und im Kasten ab. Zum Abschluss unserer Untersuchungen im großkanonischen Ensemble gingen wir dem

aus Literatur bekannten Problem der unphysikalisch großen Teilchenzahl-Fluktuationen nach. Dazu berechneten wir die mittlere Varianz der Teilchenzahl im Grundzustand und bestätigten diese auf den ersten Blick überraschende Tatsache.

Inwiefern die Resultate nach der großkanonischen Bose-Einstein-Verteilung überhaupt sinnvoll sind, stellten wir mit Hilfe der Rechnungen in der kanonischen Ensemble-Theorie fest. Diese wurden im Kapitel 3 präsentiert. Ausgehend von der Feynmanschen Pfadintegral-Darstellung der Viel-Teilchen-Zustände wurde hier die kanonische Zustandssumme für eine feste Zahl  $N$  der wechselwirkungsfreien Bosonen ausgewertet. Daraus lies sich weiterhin der Anteil der Teilchen im Kondensat und die Greens-Funktion in einem  $N$ -Teilchen-Ensemble bestimmen. Als erstes werten wir die kanonischen Größen in einem homogenen System wie im Buch von Feynman [43] direkt aus und finden physikalisch sinnlose Ergebnisse sowohl für die Wärmekapazität als auch für den Kondensat-Anteil in Abb. 3.3. Bereits eine leichte Korrektur des homogenen Gas-Modells mit dem explizit berücksichtigten Grundzustand ergab die gewünschten Verbesserungen der Resultate. Auch die Berechnungen im Kastenpotential wiesen keine Anomalien auf. Die entsprechenden Ergebnisse für die Wärmekapazitäten und Kondensatteilchen-Anteile wurden in der kürzlich erschienenen Publikation [42] veröffentlicht. Durch den Vergleich der kanonischen Resultate mit denjenigen aus den großkanonischen Rechnungen wurden insbesondere für große Teilchenzahlen keine nennenswerte Abweichungen weder im Kastenpotential noch in der harmonischen Falle gefunden. Trotzdem besteht kein trivialer Zusammenhang zwischen den großkanonischen und kanonischen Ensembles. So führten Untersuchungen der Teilchenzahl-Fluktuation im Grundzustand zu einer offensichtlichen Diskrepanz zwischen den beiden Ensembles. Außerdem ergaben sich im Temperaturbereich unterhalb des kritischen Wertes vollkommen verschiedene Teilchenzahl-Statistiken. Kanonische Resultate zeigten dabei im Gegensatz zu großkanonischen Erwartungen ein physikalisch sinnvolles Verhalten. Da auch die Energie-Fluktuationen in kanonischen Ensembles keine Anomalien aufwiesen, schloßen wir das Kapitel 3 mit der Feststellung ab, dass die Beschreibungen dieser Theorie sogar für abgeschlossene Systeme mit einer fest vorgegebenen Energie noch adäquat sind.

Nach den gerade geschilderten Darstellungen der grundsätzlichen Fragen der Bose-Einstein-Kondensation in idealen Bose-Gasen wendeten wir im Kapitel 4 unsere Aufmerksamkeit dem Problem schwach wechselwirkender bosonischer Systeme zu. Dabei beschränkten wir uns auf die störungstheoretische Behandlung des Problems mit anschließender Resummation der Ausdrücke mit Hilfe der so genannten Selbstenergie-Renormierung. In unserer Darstellung griffen wir verstärkt auf die Feynman-diagrammatische Technik zurück, die in unseren Publikationen [44,45] entwickelt wurde. Wie wir weiterhin zeigten, führte unsere Vorgehensweise unter Berücksichtigung der störungstheoretischen Ausdrücke bis zur ersten Ordnung auf die Hartree-Fock-artige Molekularfeld-Näherung. Außerdem diskutierten wir verschiedene Wechselwirkungen, die in verdünnten Bose-Gasen bei tiefen Temperaturen im Kondensationsbereich vorliegen. Die Pseudo-Potential-Methode zur Beschreibung kontakt-wechselwirkender Bosonen und die Wechselwirkung zwischen den dipolaren Gasteilchen wurden erörtert. Als konkretes Beispiel berechneten wir anschließend den analytischen Ausdruck für die kritische Temperatur in einer harmonischen Falle für dipolar-wechselwirkende Bose-Gasen. Insbesondere interessant war in diesem Zusammenhang der Einfluss der Fallen-Anisotropie auf die Ergebnisse. Dieser Einfluss war nämlich charakteristisch für die ebenfalls ani-

sotrope Dipol-Dipol-Wechselwirkung. Aus diesem Grund diente er uns als die Grundlage für die in Publikationen [46,47] vorgeschlagene Methode, die Signatur der dipolaren Effekte in thermodynamischen Größen auch experimentell nachzuweisen.

