

# Kapitel 3

## Theoretische Grundlagen

### 3.1 Leitfähigkeit

In den nächsten beiden Kapiteln wird die Leitfähigkeit vom Metall und Halbleiter betrachtet. Der Grund ist der Aufbau der hier untersuchten Proben. Wie im Kap. 2 beschrieben sind die Proben ein System aus Metall, Supraleiter und Halbleitersubstrat, so daß eine gegenseitige Wechselwirkung nicht ausschließbar und höchst wahrscheinlich ist.

#### 3.1.1 Leitfähigkeit in einem Metall

Das Phänomen der elektrischen Leitfähigkeit ist seit längerer Zeit sehr gut verstanden. Die Elektronen in einem Metall können als ebene Wellen beschrieben werden, die durch ein gitterperiodisches Potential moduliert werden (Bloch-Wellen:  $\psi_k(r) = u(r)_k e^{ik \cdot r}$  [20]). Befinden sich die Elektronen in einem elektrischen Feld  $\vec{E}$  ( $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$ ), werden diese beschleunigt und nur durch Wechselwirkungsprozesse (z.B. Streuung an Störungen) in der Bewegung behindert [21], so daß für die Leitfähigkeit folgt:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{n^* e^2 \tau}{m^*} \quad (3.1)$$

mit  $n^*$ : Quasiteilchendichte,  $\tau$ : Relaxationszeit und  $m^*$ : effektive Masse.

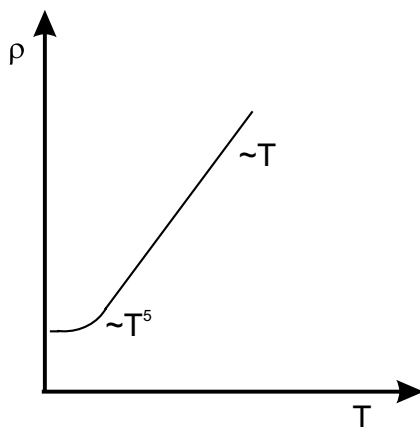
Sind im Metall verschiedene Streumechanismen wirksam, so ist die Relaxationszeit

nicht einfach durch die Summe der verschiedenen Streuzeiten gegeben. Sie ist proportional zur Stoßrate, die beim Vorhandensein von verschiedenen Streumechanismen als Summe der einzelnen Stoßraten angenommen werden kann [21]:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_{\text{Phononen}}} + \frac{1}{\tau_{\text{Elektronen}}} \quad (3.2)$$

wobei  $\tau_{\text{Phononen}}$ : die Relaxationszeit der Elektron-Phonon-Wechselwirkung und  $\tau_{\text{Elektron}}$ : die Relaxationszeit der Elektron-Elektron-Wechselwirkung ist.

In dieser Arbeit liegt einer der Schwerpunkte auf der Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit. Die Relaxationszeiten der meisten Streuprozesse folgen einem Potenzgesetz  $T^{-n}$ , wobei die Temperaturen oberhalb der Temperatur liegen, bei der die Restleitfähigkeit erreicht ist. Aus den Vorbetrachtungen kann man nun die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit von Metallen ableiten. Bei hohen Temperaturen dominiert die Streuung der Elektronen an den Phononen. Verringert man die Temperatur, werden auch die Gitterschwingungen verringert und somit auch die Wechselwirkung zwischen Phononen und Elektronen. Nach dem "Ausfrieren" der Gitterschwingungen dominiert die Streuung der Elektronen untereinander. Bei tiefen Temperaturen werden die Elektronen nur noch an Gitterstörungen (z.B. Verunreinigungen, Gitterfehler) gestreut, was sich im spezifischen Restwiderstand manifestiert.



**Abb. 3-1:** Schematische Darstellung der Temperaturabhängigkeit des Widerstands in einem Metall

Es kann also die Leitfähigkeit folgendermaßen beschrieben werden [20]:

$$\rho(T) = \rho_0 + \alpha T^n \quad (3.3)$$

Der Exponent in Gl. (3.3) hängt von der Art des Streuprozesses ab. Für Elektron-Elektron-Streuung ist  $n = 2$  und für Elektron-Phonon-Streuung ist  $3 \leq n \leq 5$  für  $T > 0$  ( $n=1$  für  $T \gg 0$ ). Dieses Verhalten ist in (Abb. 3-1) qualitativ dargestellt.

### 3.1.2 Leitfähigkeit in einem Halbleiter

Bei der Betrachtung der Leitfähigkeit  $\sigma$  eines Halbleiters ist zu beachten, daß nicht nur Elektronen, sondern auch die Löcher zum Ladungstransport beitragen:

$$\sigma = e \cdot n \cdot \mu = |e| \cdot (n_e \mu_{n_e} + p \mu_p). \quad (3.4)$$

Des weiteren sieht man aus Gl. (3.4), daß die Leitfähigkeit von der Ladungsträgerkonzentration **und** der Beweglichkeit der Ladungsträger abhängt. Die Ladungsträgerkonzentrationen  $n$  (Elektronen) und  $p$  (Löcher) sind sehr stark temperaturabhängig, weil die Bandlücke  $E_g$  im Halbleiter erst durch thermisch angeregte Elektronen bzw. Löcher überwunden werden muß. Man unterscheidet zwischen intrinsischen und dotierten Halbleitern. Unter intrinsischen Halbleitern versteht man diejenigen, bei denen Elektronen und Löcher aus dem Valenzband nur durch thermische Anregung in das Leitungsband kommen. Von dotierten Halbleitern spricht man dann, wenn elektrisch aktive Störstellen eingebaut sind.

Die Temperaturabhängigkeit der intrinsischen Ladungsträgerkonzentration  $n_i$  sieht folgendermaßen [22] aus:

$$n_i = p_i = \sqrt{N_{eff}^L N_{eff}^V} \exp\left[\frac{-E_g}{2kT}\right], \quad (3.5)$$

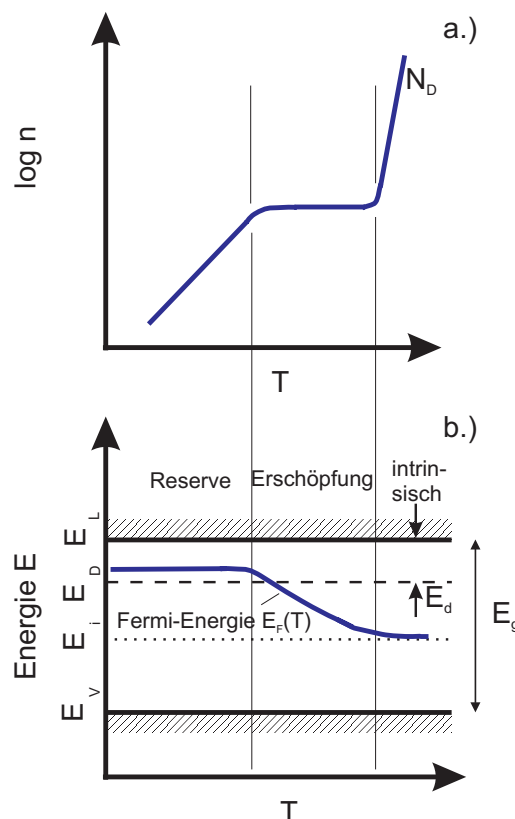
mit  $N_{eff}^L$ : der effektiven Zustandsdichte des Leitungsbandes und  $N_{eff}^V$ : der effektiven Zustandsdichte des Valenzbandes.

Bei der Betrachtung der Ladungsträgerdichte in einem dotierten Halbleiter (die mei-

sten Halbleiter sind bis zu einem gewissen Grad dotiert, da es technisch schwierig ist, einen perfekten undotierten Halbleiter herzustellen) hängt es davon ab, welche Art und Anzahl von Donatoren bzw. Akzeptoren eingebaut sind. Für den Fall, daß sich im Halbleiter nur Donatoren (für Akzeptoren gilt dies entsprechend) befinden, kann man die Ladungsträgerdichte beschreiben als:

$$n \approx 2N_D \left( 1 + \sqrt{1 + 4 \frac{N_D}{N_{eff}^L} \cdot e^{\frac{E_D}{kT}}} \right)^{-1} \quad (3.6)$$

$N_D$ : der Gesamtkonzentration von Donatoren,  $E_D$ : der Energie des Donatorniveaus. In (Abb. 3-2) sind die drei Grenzfälle aus Gl. (3.6) schematisch dargestellt.



**Abb. 3-2:** Schematische Darstellung a.) der Ladungsträgerkonzentration  $n(T)$  im Leitungsband und b.) der qualitativen Lage der Fermi-Energie  $E_F(T)$  in Abhängigkeit von der Temperatur in einem Halbleiter.

1. Ist die Temperatur sehr klein,

$$4\left(\frac{N_D}{N_{eff}^L}\right) \exp\left[\frac{E_D}{kT}\right] \gg 1, \quad (3.7)$$

bezeichnet man den Bereich als Störstellenreserve. Das heißt es sind noch genügend viele nicht ionisierte Donatoren (diese haben noch ihre Valenzelektronen) vorhanden, und die Elektronenkonzentration hängt exponentiell von der Temperatur ab, wie im intrinsischen Halbleiter:

$$n \approx \sqrt{N_D N_{eff}^L} \exp\left[\frac{-E_D}{2kT}\right]. \quad (3.8)$$

2. Ist die Temperatur so groß, daß gilt:

$$4\left(\frac{N_D}{N_{eff}^L}\right) \exp\left[\frac{E_D}{kT}\right] \ll 1, \quad (3.9)$$

dann spricht man vom Erschöpfungszustand. Damit ist gemeint, daß alle Donatoren ionisiert sind (die Konzentration der Elektronen im Leitungsband hat die maximal erreichbare Konzentration von Donatoren erreicht).

$$n \approx N_D = const. \quad (3.10)$$

3. Wird die Temperatur weiter erhöht, so nimmt die Konzentration der über  $E_g$  angeregten Elektronen zu und überwiegt irgendwann die aus den Störstellen freigesetzten Elektronen. Der Halbleiter verhält sich nun wie ein intrinsischer Halbleiter.

Nachdem nun die Temperaturabhängigkeit der Ladungsträgerkonzentration betrachtet wurde, ist es notwendig sich die Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit  $\mu$  anzuschauen. Auch bei der Beweglichkeit müssen nicht nur die Elektronen, sondern auch die Löcher berücksichtigt werden. Dies hat aber nur Einfluß, wenn man die Beweglichkeit exakt mathematisch bestimmen will. Bei einer qualitativen Diskussion der Streuprozesse hingegen, welche die Beweglichkeit beeinflusst, verhalten sich Elektronen und Löcher gleichwertig.

Es gilt genau wie bei Metallen:

$$\mu \propto \tau \quad (3.11)$$

mit  $\tau$ : der Relaxationszeit. Für die Relaxationszeit ist der Streuquerschnitt  $\Sigma$  für Elektronen und Löcher an einem Streuzentrum und der thermische Mittelwert  $\langle v \rangle$  der Elektronen- bzw. Löchergeschwindigkeit im unteren Leitungsband bzw. im oberen Valenzband von Bedeutung.

$$\frac{1}{\tau} \propto \langle v \rangle \Sigma \quad (3.12)$$

Im Fall von nichtentarteten Halbleitern (entartete Halbleiter  $\Rightarrow$  sehr hohe Ladungsträgerkonzentrationen d.h.  $E_F = E_L$ ) kann die Fermi-Statistik durch die Boltzmann-Statistik angenähert werden, so daß folgt

$$\langle v \rangle \propto \sqrt{T}. \quad (3.13)$$

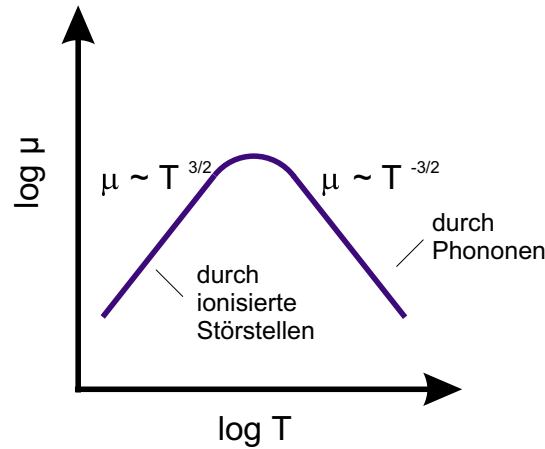
Bei der Streuung der Ladungsträger an Phononen ist  $\Sigma_{Ph} \sim T$ , so daß für die Beweglichkeit gilt:

$$\mu_{Ph} \sim T^{-\frac{3}{2}}. \quad (3.14)$$

Hingegen gilt für die Streuung an Störstellen  $\Sigma_{St} \propto \langle v \rangle^{-4} \propto T^{-4/2}$ , woraus resultiert, daß die Beweglichkeit folgendes Verhalten zeigt:

$$\mu_{St} \propto T^{\frac{3}{2}}. \quad (3.15)$$

Tritt im Halbleiter Phononen- sowie Störstellenstreuung auf, erhält man die Beweglichkeit durch Summation der Beweglichkeiten aus Gl. (3.14) und Gl. (3.15). Dieses Verhalten ist in (Abb. 3-3) wiedergegeben.



**Abb. 3-3:** Schematische Darstellung der Abhängigkeit der Beweglichkeit  $\mu$  von der Temperatur in einem Halbleiter

Es ist zu erkennen, daß zunächst die Beweglichkeit durch die Phononenstreuung dominiert wird. Erst bei weiterer Verringerung der Temperatur überwiegt die Störstellenstreuung, was wiederum einen Einfluß auf die Beweglichkeit hat.

## 3.2 Magnetowiderstand

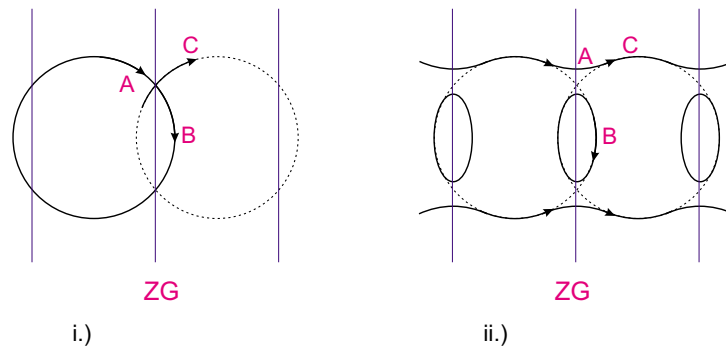
Metalle zeigen bei hohen Temperaturen keinen Magnetowiderstand, weil alle Elektronen annähernd gleiche Geschwindigkeit besitzen. Es wird ein Hall-Feld aufgebaut, das genau den Einfluß des äußeren Magnetfeldes kompensiert. Existiert hingegen eine Verteilung von Geschwindigkeiten, die sich im Mittel nicht aufheben, kommt es zu keiner vollständigen Kompensation durch das Hall-Feld. Die Elektronen werden somit auf elliptische Bahnen gezwungen, die mit steigendem äußeren Magnetfeld kleiner werden und damit einen magnetfeldabhängigen Widerstand verursachen Gl. (3.16)[23]. Dieser sogenannte Magnetowiderstand kann für  $\omega_c \ll \omega_\tau$  abgeschätzt werden als:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\rho(B) - \rho(0)}{\rho(0)} \simeq \left(\frac{\omega_c}{\omega_\tau}\right)^2 \simeq (\mu B)^2, \quad (3.16)$$

mit der Beweglichkeit  $\mu = e/m \cdot \tau$ , der Stoßfrequenz  $\omega_\tau = 1/\tau$  und der Zyklotronresonanzfrequenz  $\omega_c = e/m \cdot B$ . Aus Gl. (3.16) ist zu erkennen, daß die Widerstandsänderung

quadratisch mit dem äußeren Magnetfeld zunimmt.

Unter bestimmten Bedingungen (z.B. Spin-Bahn-Wechselwirkung) kann es zum sogenannten magnetischen Durchbruch ("magnetic breakdown") [24],[25] kommen. Dieser Effekt, der das Verhalten der Elektronen in einem hohen Magnetfeld beschreibt, wurde unter anderem auch im Zinn [26],[27] beobachtet und soll deshalb hier diskutiert werden.



**Abb. 3-4:** Schematische Darstellung von i.) der Bahn eines freien Elektrons im Magnetfeld und ii.) der Bahn des Elektrons, die durch ein periodisches Gitterpotential an der Zonengrenze (ZG) getrennt wird

Am einfachsten ist es, wenn man mit der Betrachtung bei sehr hohen Magnetfelder beginnt. Hier sind die Elektronenwellenfunktionen im wesentlichen die von sich frei im Magnetfeld bewegenden Teilchen. Im zweidimensionalen Raum, senkrecht zum äußeren Magnetfeld, liegt für freie Elektronen in der x-y-Ebene des k-Raumes eine Kreisbahn. Durch eine Störung (Gitterpotential) ist es möglich, daß die Bahn, die durch eine Brillouin-Zonengrenze läuft, eine Bragg-Reflexion erfährt. Das hat zur Folge, daß sich die Bahn, anstatt sich in AB-Richtung (Abb. 3-4-i.) fortzusetzen, in die AC-Richtung fortbewegt. Wenn die Störung vergrößert wird (z.B. durch Spin-Bahn-Wechselwirkung), spalten sich die Bahnen bei A (Abb. 3-4-ii.) bzgl. der Energie auf und der Weg AC wird bevorzugt. Daraus resultiert, daß sich das Elektron nun auf offene Bahnen bewegt und ein magnetfeldabhängiger Widerstand auch bei kleiner Stoßfrequenz beobachtet werden kann. Der Bereich um B in (Abb. 3-4-ii.) wird nun zu einem getrennten Zweig der Fermi-Fläche und wird völlig getrennt durchlaufen. Wird nun das äußere Magnetfeld erhöht, läuft das Elektron nicht mehr den AC-Weg entlang, sondern "durchbricht" die Energielücke, d. h.



das Gebiet, das die zwei Bahnen im reziproken Raum trennt, und läuft so über B weiter. Dies hat zur Folge, daß der Magnetowiderstand unabhängig vom äußeren Magnetfeld wird und eine Sättigung eintritt.

Die Bedingung für den magnetischen Durchbruch ist:

$$\hbar\omega_c\epsilon_F > E_g^2, \quad (3.17)$$

wobei  $\epsilon_F$  die Fermi-Energie freier Elektronen und  $E_g$  die Energielücke ist [28]. Diese Forderung ist viel weniger einschränkend, als die, daß die magnetische Aufspaltung  $\hbar\omega_c$  größer als die Energielücke sein soll. Deshalb kann dieser Effekt auch schon bei einigen Metallen (wie z.B. Sn, Al, Zn) bei relativ kleinen Magnetfeldern ( $< 10$  T) auftreten [29].

### 3.3 Suszeptibilität

Eine wichtige Methode zur Bestimmung der magnetischer Eigenschaften von Materialien ist die Suszeptibilitätsmessung (Kap. 3.3). In supraleitenden Materialien tritt im Meissnerzustand bei einem äußeren angelegten Magnetfeld eine vollständige Feldverdrängung auf. Dies entspricht einem idealen Diamagnetismus, wo gilt:

$$\chi = -1 \quad (M = -H). \quad (3.18)$$

mit  $\chi$ : der Suszeptibilität,  $M$ : der Magnetisierung.

Das Feld B im Inneren des Supraleiters stellt sich dann so dar:

$$B = \mu_0 \cdot (1 + \chi) \cdot H = \mu_0 H + \mu_0 M \quad \text{mit} \quad M = m \cdot V \quad (3.19)$$

wobei  $m$  das magnetische Moment und  $V$  das Probenvolumen ist.

Legt man an die Probe ein Wechselfeld (was bei der hier benutzten Methode der Fall

ist) erhält man das magnetische Moment der Proben:

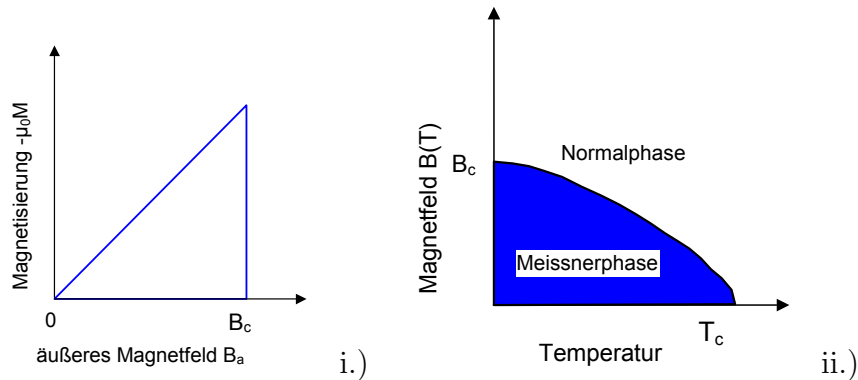
$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n \cos(n \cdot \omega t - \phi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m'_n \cos n\omega t + m''_n \sin n\omega t \quad . \quad (3.20)$$

Die Phasenverschiebung  $\phi = \omega\tau$  wird durch die auftretenden Relaxationsprozesse (z.B. magnetische Flußbewegungen in der Shubnikovphase des Typ-II-Supraleiters) verursacht. D.h. die Magnetisierung der Probe stellt sich erst nach einer gewissen Zeit  $\tau$  in der Probe ein. Zur Klärung der Frage, ob die hier untersuchten Schichten den Meissner-Ochsenfeld-Effekt zeigen, reicht es aus, sich nur auf die erste Magnetisierungskomponente aus Gl. (3.20) zu konzentrieren:

$$m(t) = \chi' H_0 \cos(\omega \cdot t) + \chi'' H_0 \sin(\omega \cdot t) \quad \text{mit} \quad \chi = \chi' - i \cdot \chi'' \quad . \quad (3.21)$$

### 3.4 Supraleitung

Die Erforschung der Supraleitung begann 1911 mit der Entdeckung von H. K. Onnes, daß Quecksilber bei 4,2 K einen Widerstandsabfall auf einen nicht mehr meßbaren Wert zeigte [30]. Eine weitere grundlegende Eigenschaft von Supraleitern ist das vollständige Herausdrängen eines Magnetfeldes aus dem Supraleiter (Meissner-Ochsenfeld-Effekt) [31]. Dieser Effekt ist unabhängig davon, ob das Magnetfeld im supraleitenden ("zero-field-cooled") oder im normalleitenden ("field-cooled") Zustand der Probe angelegt wurde. Wenn von grundlegenden Eigenschaften eines Supraleiters gesprochen wird, muß auch die sprunghafte Änderung der spezifischen Wärme beim Übergang in den supraleitenden Zustand genannt werden [32]. Neben der Bestimmung der kritischen Temperaturen  $T_c$  wurde auch intensiv der Meissner-Ochsenfeld-Effekt in den verschiedenen supraleitenden Metallen untersucht. Aus diesen Arbeiten kristallisierte sich das Phasendiagramm in Abb. 3-5 heraus.



**Abb. 3-5:** Typ-I-Supraleiter i.) Magnetisierung und ii.) kritisches Magnetfeld in Abhängigkeit von der Temperatur

Bei der Betrachtung des Verlaufes (Abb. 3-5-ii.) der experimentellen Daten wurde festgestellt, daß sich die Temperaturabhängigkeit des kritischen Magnetfeldes  $B_c$  sehr gut mit:

$$B(T)_c = B(0) \cdot \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (3.22)$$

beschreiben läßt.

Als erste haben F. und H. London 1935 [33] eine phänomenologische Beschreibung für das Verhalten eines Supraleiters im Magnetfeld ausgearbeitet. Die London-Theorie konnte eine Vielzahl von Beobachtungen beschreiben. Der Kernpunkt der Theorie sind die sog. London-Gleichungen:

$$\vec{j}_s = \frac{n_s e^2}{m_s} \cdot \vec{E} \quad (3.23) \quad \text{rot}(\vec{j}_s) = - \frac{n_s e^2}{m_s} \cdot \vec{B}, \quad (3.24)$$

wobei  $m_s$ ,  $n_s$  und  $e_s$  die Masse, Ladungsträgerkonzentration und Ladung der supraleitenden Ladungsträger sind. Mit Hilfe der ersten London-Gleichung Gl. (3.23) wird ein idealer Leiter ( $R=0$ ) beschrieben, in dem die Ladungen durch das elektrische Feld gleichförmig beschleunigt werden. Die zweite London-Gleichung Gl. (3.24) beschreibt das Abklingen eines Magnetfeldes in einer dünnen Oberflächenschicht des Supraleiters

(Meissner-Ochsenfeld-Effekt) [34]. Unter Benutzung der 1. Maxwell-Gleichung:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s, \quad (3.25)$$

kann man das Abklingverhalten des Magnetfeldes im Inneren des Supraleiters beschreiben durch:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \mu_0 \vec{j}_s = -\frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B} \quad \lambda = \sqrt{\frac{m_s}{\mu_0 n_s e_s^2}}, \quad (3.26)$$

mit  $\lambda_L$ : der Londonschen Eindringtiefe. Wählt man die Orientierung des äußeren Magnetfeldes  $B_a$  zum Supraleiter so, daß gilt:

$$\frac{\partial B}{\partial y} = 0 = \frac{\partial B}{\partial z},$$

vereinfacht sich Gl. (3.26) und es gilt:

$$\frac{\partial^2 B(x)}{\partial x^2} - \frac{1}{\lambda_L^2} B(x) = 0$$

mit der Lösung:

$$B(x) = B_1 \cdot \exp\left[+\frac{x}{\lambda_L}\right] + B_2 \cdot \exp\left[-\frac{x}{\lambda_L}\right] \quad (3.27)$$

Mit diesen Überlegungen aus der London-Theorie kann das Verhalten des eindringenden Magnetfeldes in einer dünnen supraleitenden Schicht beschrieben werden (Kap. 3.3).

In der London-Theorie ist die Eindringtiefe  $\lambda_L$  bei  $T = 0$  K eine charakteristische Konstante für alle Metalle. Hingegen fand Pippard [35] einen Anstieg von  $\lambda$ , wenn die mittlere freie Weglänge auf die Größenordnung von  $\lambda_L$  reduziert wird, und er entwickelte den folgenden Ausdruck:

$$\lambda = \lambda_L \sqrt{1 + \frac{\xi}{l^*}}, \quad (3.28)$$

mit  $\xi$ : Kohärenzlänge und  $l^*$ : mittlere freie Weglänge [36].

Ginzburg und Landau entwickelten 1950 eine andere phänomenologische Theorie [37], mit der sie fast alle Eigenschaften der Supraleitung erklären konnten. Sie gingen davon aus, daß es sich beim Übergang vom Normalleiter zum Supraleiter bei  $T_c$  um einen Phasenübergang 2. Ordnung handelt. Sie führten einen Ordnungsparameter  $\psi$  ein, der stetig von Null bei  $T_c$  auf den Wert 1 bei  $T = 0$  ansteigt. Wobei  $|\psi|^2$  die Dichte der supraleitenden Ladungen ist, so daß die Differenz aus den Gibbs-Funktionen  $g_n$  (normalleitenden Phase) und  $g_s$  (supraleitende Phase) bestimmt sind durch [34]:

$$g_n - g_s = -\alpha |\psi|^2 - \frac{1}{2}\beta |\psi|^4 = \frac{1}{2\mu_0} B_{cth}^2, \quad (3.29)$$

mit

$$\alpha = -\frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{B_{cth}^2}{|\psi|^2}, \quad \beta = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{B_{cth}^2}{|\psi|^4},$$

mit  $B_{cth}$  thermodynamisches kritisches Magnetfeld. Diese Einführung von  $\psi$  war der große Vorteil gegenüber der London-Theorie, denn dort ist man auf Zustände mit konstanter Dichte der supraleitenden Ladungen beschränkt. Für die Beschreibung des Zwischenzustandes mußte in der London-Theorie extra das Vorhandensein einer Oberflächenenergie für die Grenzfläche postuliert werden. Ginzburg und Landau führten noch eine zweite charakteristische Länge ein, nämlich  $\xi_{GL}$  die Ginzburg-Landau-Kohärenzlänge. Diese Kohärenzlänge bestimmt die Bereiche der Variation von  $\psi$ , d. h. die Variation der Dichte der supraleitenden Ladungsträger (nach BCS der Cooper-Paardichte) [38]. Mit Hilfe der Ginzburg-Landau-Theorie ist der Zusammenhang zwischen  $B_c$ ,  $\xi_{GL}$  und  $\lambda$  einfach gegeben:

$$\mu_0 H_c = B_c = \frac{\Phi_0}{2\pi\sqrt{2} \cdot \xi_{GL}\lambda} \quad (3.30)$$

mit  $\Phi_0$ : dem Flußquant. Ein weiterer wichtiger Wert ist der Ginzburg-Landau-Parameter  $\kappa$ , dieser beschreibt das Verhältnis zwischen der Eindringtiefe  $\lambda$  und der Kohärenzlänge  $\xi_{GL}$

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi_{GL}}. \quad (3.31)$$

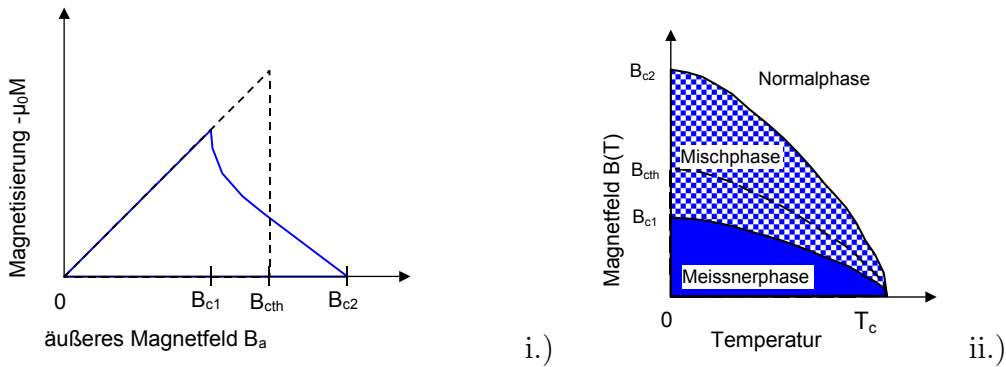
Die Betrachtung des Verhältnisses  $\lambda$  zu  $\xi_{GL}$  hilft bei der Fragestellung, ob es sich um einen Typ-I- oder Typ-II-Supraleiter handelt.

$$\kappa < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

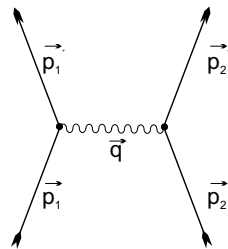
↔ Typ-I-Supraleiter (Abb. 3-5)

↔ Typ-II-Supraleiter (Abb. 3-6)



**Abb. 3-6:** Typ-II-Supraleiter i.) Magnetisierung und ii.) kritisches Magnetfeld in Abhängigkeit von der Temperatur

Durch die Arbeiten von Bardeen, Cooper und Schrieffer (BCS-Theorie) konnte die Supraleitung mikroskopisch erklärt werden [39],[40],[41],[42]. Sie fanden heraus, daß zwei Elektronen ( $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ ) über den Austausch virtueller Phononen ( $\vec{q}$ ) korreliert sind (Abb. 3.4). Dadurch entstehen die sogenannten Cooper-Paare. Diese sind dadurch charakterisiert, daß die beiden Elektronen entgegengesetzte gleich große Impulse und entgegengesetzte Spins  $\{\vec{p} \uparrow, -\vec{p} \downarrow\}$ . Diese Cooper-Paar-Bildung führt zu einer Energieabsenkung.



**Abb. 3-7:** Schematische Darstellung der Elektron-Elektron-Wechselwirkung über virtuelle Phononen

Es wird ein konstantes Wechselwirkungspotential  $-V$  für die Kondensation der Elektronen in einem Bereich  $\pm\Delta(T)$  um die Fermienergie  $E_F$  angenommen. Die somit resultierende Energielücke  $2\Delta$  ist dann folgendermaßen gegeben:

$$2 \Delta(0) = 4 \hbar \omega_D \exp\left[-\frac{1}{N_0(E_F)V}\right], \quad (3.32)$$

wobei  $N_0(E_F)$  die Elektronenzustandsdichte an der Fermienergie bei  $T \rightarrow 0$  und  $\omega_D$  die Debye-Frequenz ist. Die BCS-Theorie sagt einen einfachen Zusammenhang zwischen der Übergangstemperatur und der Energielücke bei  $T = 0$  voraus:

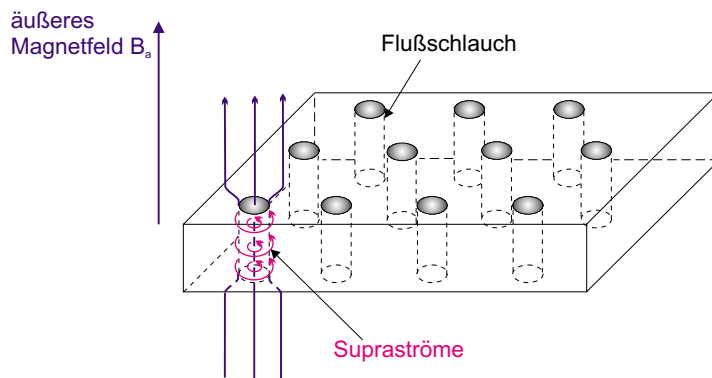
$$2 \Delta(0) = 3,5 k T_c . \quad (3.33)$$

Die experimentelle Überprüfung dieser Aussage zeigte eine gute Übereinstimmung [43]. Die in der BCS-Theorie benutzte Kohärenzlänge  $\xi_0$  wurde aus Pippards Überlegungen, bis auf einen Vorfaktor  $(1/\pi)$ , übernommen

$$\xi_0 = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta(0)}, \quad (3.34)$$

mit  $v_F$ : der Fermigeschwindigkeit.  $\xi_0$  ist ein Maß für den Abstand, über den die Korrelation der Cooper-Paare wirksam ist.

Wie aus dem Phasendiagramm (Abb.3-6-ii.) zu erkennen ist, gibt es im Typ-II-Supraleiter nicht nur eine supraleitende und eine normalleitende Phase, sondern noch eine dritte, die Misch- oder Shubnikov-Phase. Diese Shubnikov-Phase ist dadurch charakterisiert, daß in den Supraleiter magnetischer Fluß eindringt. Diese magnetischen Flußschläuche enthalten jeweils ein elementares Flußquant, und dieses Flußquant besteht aus einem System von Ringströmen (Abb.3-8). Diese Supraströme erzeugen mit dem äußeren Feld den magnetischen Fluß durch den Schlauch. Diese Supraströme schirmen den eindringenden magnetischen Fluß ab, so daß im Supraleiter normalleitende Bereiche existieren. Dies funktioniert nur solange, bis das äußere Magnetfeld  $B_a$  größer als das obere kritische Magnetfeld  $B_{c2}$  wird.

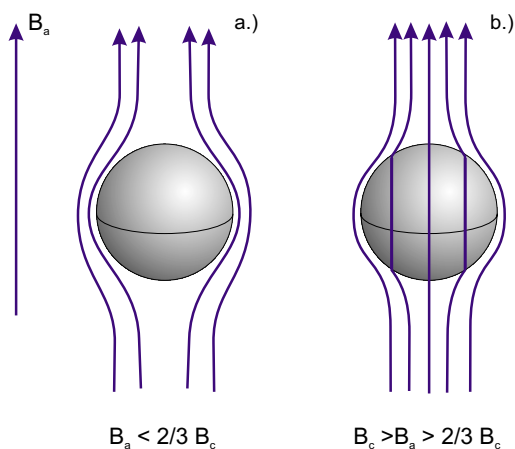


**Abb. 3-8:** Schematische Darstellung der Subnikov-Phase eines Typ-II-Supraleiters

Für die Existenz der Shubnikov-Phase eines Typ-II-Supraleiters muß gelten:

$$B_{c1} < B_a < B_{c2} .$$

Auch im Typ-I-Supraleiter kann eine dritte Phase, der sogenannte Zwischenzustand existieren. Das Auftreten des Zwischenzustands ist abhängig von der Probengeometrie. Bei den bisherigen Betrachtung eines Typ-I-Supraleiters im Magnetfeld wurde angenommen, daß es sich um eine stabförmige Probe parallel zum äußeren Magnetfeld handelt (Entmagnetisierungsfaktor  $n_M = 0$ ). Hat man hingegen eine Kugel oder eine dünne Platte senkrecht zum äußeren Magnetfeld, kommt es zur Bildung des Zwischenzustandes.



**Abb. 3-9:** Magnetfeldverteilung in einer supraleitenden Kugel

Wie in (Abb. 3-9a.) zu sehen ist, ist das Innere der Kugel durch die Abschirmströme



in der dünnen Oberflächenschicht feldfrei. Es ist aber auch zu erkennen, daß es durch diese Magnetfeldverdrängung zu einer Verstärkung des Magnetfeldes an der Oberfläche der Kugel im Bereich des Äquators kommt. Dieser Effekt hängt von der Form und der Orientierung der Probe im äußeren Magnetfeld ab und kann mit Hilfe des Entmagnetisierungsfaktors  $n_M$  beschrieben werden. Der Entmagnetisierungsfaktor ist für einen Rotationsellipsoid gegeben [44] als:

$$n_M = \left( \frac{1}{e^2} - 1 \right) \left( \frac{1}{2e} \cdot \log \frac{1+e}{1-e} - 1 \right) \quad (3.35)$$

mit

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

wobei  $a$  die große und  $b$  die kleine Halbachse des Ellipsoides ist. In (Tab. 3.1) sind Entmagnetisierungsfaktoren [45],[44] für einige einfache Probenformen aufgezeigt.

Probenform	Entmagnetisierungsfaktor $n_M$
Kugel	$\frac{1}{3}$
stabförmig und $\parallel B_a$	0
Draht mit Kreisfläche und $\perp B_a$	$\frac{1}{2}$
Scheibe und $\perp B_a$	1

**Tab. 3.1:** Einige Entmagnetisierungsfaktoren für verschiedene Probenformen

Für alle Proben mit einem Entmagnetisierungsfaktor  $n_M \neq 0$  muß ein effektives Magnetfeld  $B_{eff}$  definiert werden:

$$B_{eff} = B_a - n_M \mu_0 M, \quad (3.36)$$

und da für einen Supraleiter mit vollständigen Meissner-Effekt gilt:  $M = -1/\mu_0 \cdot B_{eff}$ ,

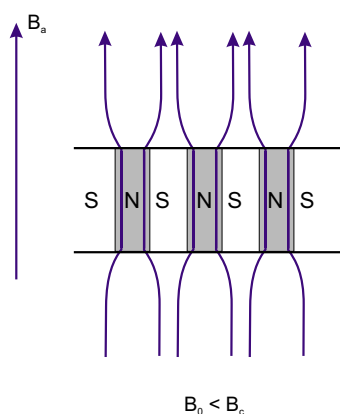
kann das effektive Magnetfeld  $B_{eff}$  beschrieben werden durch:

$$B_{eff} = \frac{1}{1 - n_M} B_a . \quad (3.37)$$

Für das Beispiel einer Kugel (Abb. 3-9) gilt:  $n_M = \frac{1}{3}$ , so daß

$$B_{eff} = \frac{3}{2} B_a .$$

Aus diesen Überlegungen ist zu sehen, daß es nicht möglich ist, für  $n_M > 0$  einen Wert des äußeren Magnetfeld  $B_a$  anzugeben, bei dem die Probe entweder vollständig supraleitend oder normalleitend ist. Erhöht man nun auf den Wert  $B_a = \frac{2}{3} B_c$ , wird am Äquator das kritische Magnetfeld  $B_c$  erreicht. Durch weitere Erhöhung des äußeren Magnetfeldes (Abb. 3-9b.) muß die Supraleitung am Äquator zerstört werden. Aber die Kugel kann nicht vollständig normalleitend werden, aufgrund der Tatsache, daß dann das innere Feld gleich dem äußeren Feld sein würde und somit kleiner werden würde als  $B_c$ . Die Lösung dieses Problemes ist, daß sich der Supraleiter in supraleitende und normalleitende Bereiche aufspaltet, d. h. er geht in den Zwischenzustand über [34].



**Abb. 3-10:** Magnetfeldverteilung in einer stabförmigen Probe senkrecht zum äußeren Magnetfeld

Ein stabförmiger Supraleiter, der sich senkrecht zum äußeren Magnetfeld  $B_a$  befindet, geht auch in einen Zwischenzustand über [46], [47]. Abb. 3-10 zeigt die schematische Darstellung des Zwischenzustandes eines stabförmigen Supraleiters.

Unter bestimmten Bedingungen kann sich eine dünne Schicht des Typs-I verhalten,

als wäre sie im Mischzustand eines Typ-II-Supraleiters und nicht im Zwischenzustand.

## 3.5 Supraleitung in dünnen Schichten

### 3.5.1 Größeneffekt

Im Kap. 3.4 wurden die drei charakteristischen Längen eines Supraleiters eingeführt. Dies waren:

- 1.) die Eindringtiefe  $\lambda$  (Maß für das Abklingen eines Magnetfeldes im Supraleiter)
- 2.) die mittlere Ausdehnung eines Cooper-Paares  $\xi_{Co}$  (Maß für den Abstand der wirksamen Korrelation der Cooper-Paare)
- 3.) die Kohärenzlänge  $\xi_{GL}$  (Maß für die kleinste Länge, über die die Cooper-Paardichte variieren kann)

Diese charakteristischen Längen hängen von der Temperatur  $T$  und von der freien Weglänge  $l^*$  ab. Diese Abhängigkeiten sind in Tab. 3.2 zusammengestellt. Die Temperaturabhängigkeit ist auf die Abhängigkeit der Cooper-Paardichte von der Temperatur selbst zurückzuführen:

$$\frac{n_{Co}(T)}{n_{Co}(0)} \propto \left(1 - \frac{T}{T_c}\right).$$

Mit der Anzahl­dichte der Cooper-Paare  $n_{Co}$  sind natürlich auch die charakteristischen Längen temperaturabhängig. Die Abhängigkeit von der freien Weglänge ist insofern verständlich, da die Elektron-Phonon-Wechselwirkung die freie Weglänge und die Korrelation zu den Cooper-Paaren bestimmt.

charakteristische Länge	Temperaturabhängigkeit	Abhängigkeit von der mittleren freien Weglänge $l$
$\lambda$	$\lambda(T, \infty) = \lambda(0, \infty) \cdot \left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4\right)^{-\frac{1}{2}}$	$\lambda(0, l^*) = \lambda(0, \infty) \cdot \left(1 + \frac{\xi_{GL}(0, \infty)}{l^*}\right)^{\frac{1}{2}}$
$\xi_{GL}$	$\xi_{GL}(T, \infty) = \xi_{GL}(0, \infty) \cdot \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-\frac{1}{2}}$	$\xi_{GL}(0, l^*) = \left(\xi_{GL}(0, \infty) \cdot l^*\right)^{\frac{1}{2}}$
	für $T \rightarrow T_c$	für $l^* \ll \xi_{GL}(0, \infty)$

**Tab. 3.2:** Charakteristische Längen eines Supraleiters in Abhängigkeit von der Temperatur  $T$  und der mittleren freien Weglänge  $l$  [34]

Zwischen den einzelnen Parametern der benutzten theoretischen Modelle für Supraleiter gibt es verschiedene Zusammenhänge. So ist nach der BCS-Theorie:

$$T_c = 0,18 \cdot \frac{\hbar \cdot v_F}{k_B \cdot \xi_0}, \quad (3.38)$$

wobei  $\xi_0$  BCS-Korrelationslänge definiert ist als:

$$\xi_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \xi_{Co}(T = 0, l^* \rightarrow \infty) \quad \text{mit} \quad \xi_{Co} \simeq \xi_{GL} \cdot \frac{\lambda(0, \infty)}{\lambda(T, l^*)}. \quad (3.39)$$

Aus (Tab. 3.2) kann für die Eindringtiefe  $\lambda(T, l^*)$  folgender Ausdruck bestimmt werden:

$$\lambda(T, l^*) = \lambda(0, l^*) \cdot \left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4\right)^{-\frac{1}{2}} = \lambda(0, \infty) \cdot \left(1 + \frac{\xi_{GL}(0, \infty)}{l^*}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4\right)^{-\frac{1}{2}},$$

so daß für  $\xi_{Co}$  folgt:

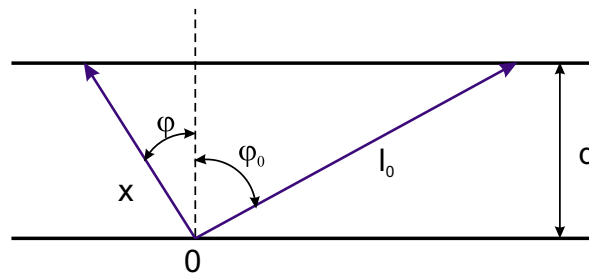
$$\begin{aligned} \xi_{Co} &\simeq \xi_{GL}(0, \infty) \cdot \lambda(0, \infty) \cdot \lambda(0, \infty)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{\xi_{GL}(0, \infty)}{l^*}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\simeq \xi_{GL}(0, \infty) \cdot \left(1 + \frac{\xi_{GL}(0, \infty)}{l^*}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Da die Abhängigkeit von  $\xi_{Co}$  von der mittleren freien Weglänge  $l^*$  bei  $T_c$  von Interesse ist und nicht die Temperaturabhängigkeit, kann  $T/T_c = 0,99$  gesetzt werden. Dies führt mit Gl. (3.38) und Gl. (3.39) zu:

$$T_c = 0,18 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{h \cdot v_F}{4 k_B \cdot \xi_{GL}(0, \infty)} \cdot \left(1 + \frac{\xi_{GL}(0, \infty)}{l^*}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.40)$$

und hat zur Folge, daß Gl. (3.40) von der mittleren freien Weglänge  $l^*$  abhängt.

Es ist schon lange bekannt [48], daß in metallischen dünnen Schichten ein höherer spezifischer Widerstand zu finden ist als im entsprechendem Volumenmaterial [1]. Es kann die freie Weglänge  $l^*$  in einer einfachen Betrachtung gefunden werden. Dazu betrachtet man eine dünne Schicht ( $d \ll l_0$ ), in der die meisten Ladungsträger nur Zusammenstöße mit den Grenzflächen (Abb. 3-11) erfahren.



**Abb. 3-11:** Bestimmung der mittleren freien Weglänge  $l$  einer dünnen Schicht [49]

So kann näherungsweise angenommen werden [50],

- 1.) daß jeder Ladungsträger nach einem Zusammenstoß von der Grenzfläche startet,
- 2.) daß sich eine große Anzahl von Ladungsträgern danach von einem Punkt 0 in alle Richtungen zur anderen Grenzfläche bewegen,
- 3.) daß diese Richtungen unabhängig vom Einfallswinkel der Ladungsträger sind.

Daraus folgt für die Summe der von den Ladungsträgern insgesamt zurückgelegten Wege:

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{q} \left( \int_0^{d/l_0} d \cdot q \cdot \tan\phi \, d\phi + \int_{d/l_0}^{\pi/2} l_0 \cdot q \cdot \sin\phi \, d\phi \right) \\ &= d \left( 1 + \ln \frac{l_0}{d} \right) \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung, daß die Ladungsträger nicht nur mit den Grenzflächen zusammenstoßen, erhält man für die mittlere freie Weglänge [48]:

$$l^* = d \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{d}{l_0} \right), \quad (3.41)$$

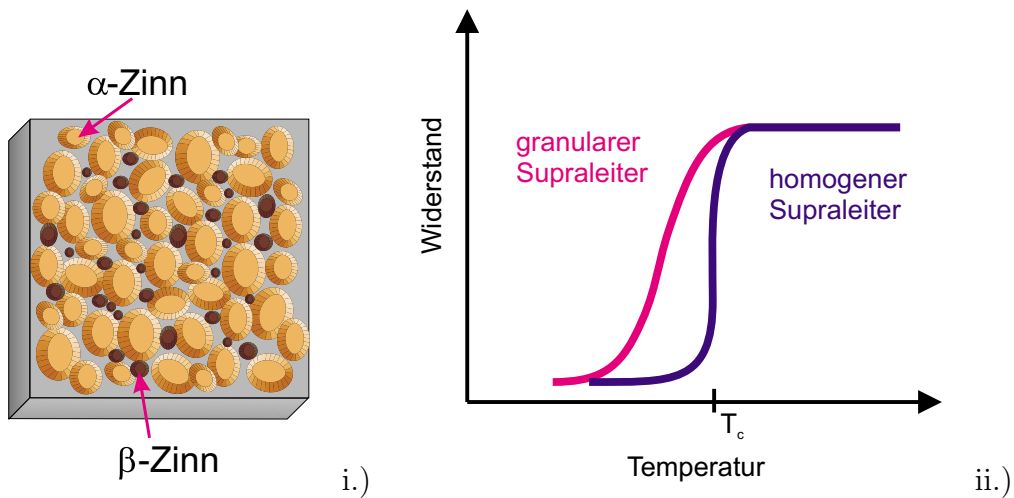
mit der Schichtdicke  $d$  und der mittleren freien Weglänge  $l_0$  des Volumenmaterials.

Nach diesen Betrachtungen kann die Abhängigkeit der supraleitenden kritischen Temperatur  $T_c$  von der Schichtdicke unter Verwendung von Gl. (3.40) und Gl. (3.41) durch den folgenden Ausdruck beschrieben werden:

$$T_c = 0,18 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{h \cdot v_F}{4 k_B \cdot \xi_{GL}(0, \infty)} \cdot \left( 1 + \frac{(\xi_{GL}(0, \infty))}{\left[ \frac{3d}{4} + \frac{d}{2} \ln \frac{d}{l_0} \right]} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.42)$$

### 3.5.2 Granularität

Unter Granularität der Schicht ist das Vorhandensein von Inseln zu verstehen. Bei den hier untersuchten Schichten findet man ein zufälliges Netzwerk von  $\alpha$ - und  $\beta$ -Zinn-Inseln, wobei der größte Teil aus  $\alpha$ -Zinn (Kap. 2.1) bestehen. In Abb. 3-12-i. ist schematisch dargestellt, daß es sich nicht nur um eine zufällige Verteilung von  $\alpha$ - und  $\beta$ -Zinn-Inseln, sondern auch um eine Größenverteilung handelt. Aufgrund der Tatsache, daß die  $\beta$ -Zinn-Inseln unterschiedliche räumliche Ausdehnungen haben, besitzen diese auch unterschiedliche Übergangstemperaturen  $T_c$ . Dieses Spektrum von Übergangstemperaturen führt zu einer Verbreiterung des supraleitenden Übergangs im Widerstandsverlauf in Abhängigkeit von der Temperatur (Abb. 3-12-ii.).



**Abb. 3-12:** Vereinfachte Darstellung i.) der Größe und Verteilung der Zinn-Inseln und ii.) der Breite des supraleitenden Übergangs im Widerstandsverlauf

### 3.5.3 Kopplungseffekt

Der Kopplungseffekt ("Proximity"-Effekt) [51], [52], [53] tritt auf, wenn ein Normalleiter (N) und ein Supraleiter (S) elektrisch miteinander verbunden sind. Durch diesen Kopplungseffekt ändern sich in der Nähe der Grenzfläche die Eigenschaften des Normalleiters und des Supraleiters. Dies äußert sich so, daß der Normalleiter supraleitende Eigenschaften zeigt und die Eigenschaften des Supraleiters abgeschwächt werden. Ein Supraleiter ist charakterisiert durch das Vorhandensein von Cooper-Paaren, wobei die Phasen aller Cooper-Paare miteinander gekoppelt sind. Dies führt zu einem thermischen Mittelwert:

$$F(x) = \langle \Psi_{\downarrow}(x) \Psi_{\uparrow}(x) \rangle , \quad (3.43)$$

dessen Betrag mit der Cooper-Paardichte zusammenhängt und als Paaramplitude bezeichnet wird. Ist die Paaramplitude ungleich Null, so tritt Supraleitung auf, d.h. in einem Normalleiter (keine Cooper-Paarkopplung über Phononen) oder einem Supraleiter oberhalb der Übergangstemperatur sind die Phasen nicht gekoppelt. Aus diesem Grund mitteln sich alle Beiträge in Gl. (3.43) heraus und die Paaramplitude wird Null. Wenn hingegen ein Normalleiter und ein Supraleiter in Kontakt sind, so behalten die Elektro-

nen in der Nähe des Supraleiters diese Phasenkohärenz. Dies ist der Grund, warum der Normalleiter supraleitende Eigenschaften zeigt. Die charakteristischen Längen für den Kopplungseffekt sind die Phasenkohärenzlänge (Verlust des Phasengedächtnisses eines einzelnen Elektrons) und die thermische Kohärenzlänge (Verlust der kollektiven Phasenkohärenz der Elektronen) (Tab. 3.5.3).

	Normalleiter		Supraleiter	
	”clean-limit”	”dirty-limit”	”clean-limit”	”dirty-limit”
thermische Kohärenzlänge	$\xi_c^N(T) = \frac{\hbar v_F}{2\pi k_B T}$	$\xi_d^N(T) = \sqrt{\frac{\hbar D}{2\pi k_B T}}$ <sup>a</sup>	$\xi_c^N(T) = \frac{\hbar v_F}{2\Delta}$	$\xi_d^N(T) = \sqrt{\frac{\hbar D}{2\Delta}}$
Phasenkohärenzlänge	$\leq v_F \cdot \tau_{ins}$ <sup>b</sup> bzw. $\leq v_F \tau_s$	$\leq \sqrt{D \cdot \tau_{ins}}$ bzw. $\leq \sqrt{D \cdot \tau_s}$ <sup>c</sup>	$\xi_0 = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta}$	
mit $D = \frac{1}{3} v_F^2 \tau_{el}$ <sup>d</sup>				

<sup>a</sup> D: Diffusionskonstante

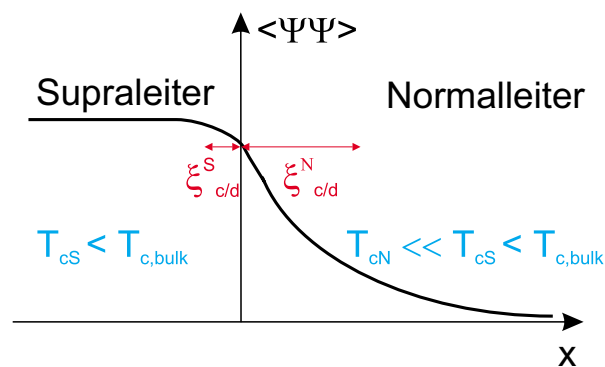
<sup>b</sup>  $\tau_{ins}$ : inelastische Streuzzeit

<sup>c</sup>  $\tau_s$ : paarbrechende Streuzzeit

<sup>d</sup>  $\tau_{el}$ : elastische Streuzzeit

**Tab. 3.3:** Charakteristische Längen des Kopplungseffekts mit und ohne Verunreinigung

In (Abb. 3.5.3) ist der Verlauf der Paaramplitude an der N-S-Grenzfläche qualitativ dargestellt.



**Abb. 3-13:** schematischer Verlauf der Paaramplitude an einer N-S-Grenzfläche



Weit entfernt von der N-S-Grenzfläche ist die Paaramplitude konstant, erst in der Nähe fällt der Wert etwas ab. Denn die Cooper-Paardichte nimmt ab und somit auch die supraleitenden Eigenschaften (Reduzierung von  $T_c$ ). Dieser Abfall geschieht über einen Bereich mit der Länge  $\xi_{c/d}^S$  (supraleitende Kohärenzlänge). Auf der normalleitenden Seite setzt sich der Trend fort. Die Dichte der korrelierten Elektronen sinkt mit größer werdender Entfernung von der N-S-Grenzfläche ab. Dies geschieht auf einer Länge von  $\xi_{c/d}^N$  (der thermischen Kohärenzlänge).

Cooper [54] beschreibt die Veränderung der Übergangstemperatur  $T_c$  aufgrund der Tatsache, daß es durch die Korrelation zu einer räumlichen Mittelung der Potentiale auf beiden Seiten des N-S-Kontakts kommt. Dies führt zu folgendem Ausdruck für  $T_c$ :

$$T_c = 1,14 \theta_D \cdot \exp\left(-\frac{1}{[N(0)V]_{eff}}\right) \quad \text{mit} \quad [N(0)V]_{eff} = \frac{D_S \cdot [N(0)V]_S}{(D_S + D_N)}, \quad (3.44)$$

mit  $\theta_D$  der Debye-Temperatur,  $[N(0)V]$  dem BCS-Wechselwirkungspotential,  $D_S$  der Dicke des Supraleiters und  $D_N$  der Dicke des Normalleiters. Dieser Formalismus kann aber nur benutzt werden, wenn  $D_S \ll \xi$  und  $D_N \ll \xi$  gilt, d.h. nur für sehr dünne Schichten. Werthamer [55] hat dieses Verhalten von  $T_c$  aus der Betrachtung der Energielücke  $\Delta$  unter Heranziehen der Arbeit von de Gennes [3] für dickere Schichten untersucht und erhält folgenden Ausdruck:

$$\frac{T_{cS}}{T_{c,Bulk}} = \left[1 + \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{k_S \tanh(D_N \cdot \xi)}{\tan(k_S \cdot D_S)}\right]^{-1}, \quad (3.45)$$

wobei die Eindringtiefe  $k_S$  und die Kohärenzlänge  $\xi$  definiert sind als:

$$k_S = \frac{2}{\pi\xi} \sqrt{\frac{T_{c,Bulk}}{T_S} - 1}, \quad \xi = \sqrt{\frac{\hbar v_F l_S}{6\pi k_B T_{cS}}}.$$

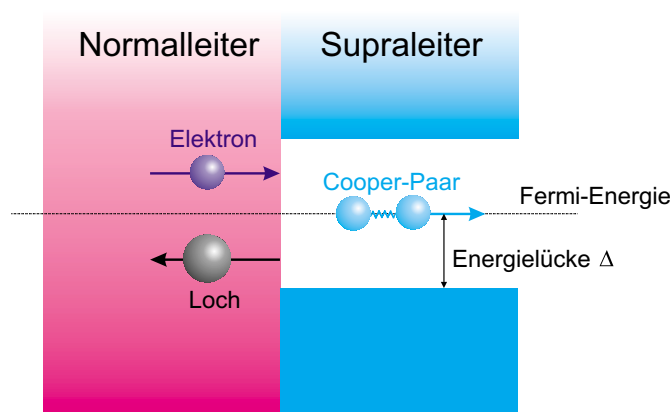
Werthamer hat diese Ergebnis unter anderem [56], [57], [58], [59] mit experimentell ermittelten Daten von Hilsch [60] verglichen und im Rahmen des Fehlers eine sehr gute Übereinstimmung gefunden.

### 3.5.4 Andreev-Reflexion

Eine weiterer Effekt, der an N-S-Grenzflächen auftritt, ist die sogenannte Andreev-Reflexion [2], [61], [62]. Dabei passiert folgendes: ein Elektron im Normalleiter, das sich in der Nähe der N-S-Grenzfläche befindet, kann sich aufgrund der Energielücke  $\Delta$  des Supraleiters nicht ohne weiteres in den Supraleiter bewegen. Es kann aber unter folgenden bestimmten Bedingungen in den Supraleiter übertreten,

- 1.) das Elektron hat eine Energie, die im Bereich der Energielücke  $\Delta$  des Supraleiters liegt;
- 2.) die Energie des Elektrons liegt oberhalb der Fermi-Energie;
- 3.) es befindet sich auf der Supraleiterseite der N-S-Grenzfläche ein Elektron, so daß ein Cooper-Paar gebildet werden kann.

Sind diese Bedingungen erfüllt, kann ein Elektron unter Bildung eines Cooper-Paares vom Normalleiter in den Supraleiter transferiert werden, unter gleichzeitiger Bildung eines Loches im Normalleiter. Durch diese Lochbildung wird die Ladung, die Energie und der transversale Impuls des Systems erhalten. Dieses Loch wird von der N-S-Grenzfläche in den Normalleiter zurückgestreut. Diese Vorgänge sind in Abb. 3.5.4 schematisch dargestellt.



**Abb. 3-14:** Schematische Darstellung der Andreev-Reflexion an einer N-S-Grenzfläche

In Proben mit N-S-Kontakten treten der Kopplungseffekt und die Andreev-Reflexion zusammen auf. Beide Effekte sind für die Veränderung der Cooper-Paardichte im N-S-

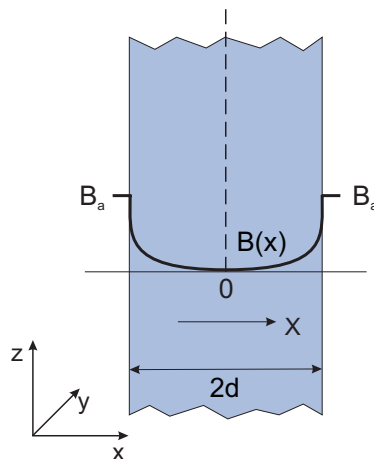
Grenzbereich verantwortlich, was zu einer Veränderung der Energielücke  $\Delta$  und somit zu einer Erniedrigung der Übergangstemperatur  $T_c$  führt.

### 3.5.5 Erhöhung des kritischen Magnetfeldes

Die Frage nach der Ortsabhängigkeit des Magnetfeldes in einer dünnen Schicht, wenn das Magnetfeld parallel zur Schichtoberfläche liegt, soll in diesem Kapitel behandelt werden. Die London-Theorie beschreibt diese Feldvariation Gl. (3.27) sehr gut. Aus Symmetriegründen ist die Variation des Magnetfeldes  $B$  in beiden Richtungen  $+x$  und  $-x$  gleich (Abb. 3.46), so daß  $B(x)_1 = B(-x)_2 = B_a$ . Die Dicke der Schicht soll  $2d$  betragen:

$$B(x) = \frac{B_a}{\cosh(d/\lambda_L)} \cosh(x/\lambda_L) . \quad (3.46)$$

Diese Variation des Magnetfeldes in der supraleitenden Schicht Gl. (3.27) ist in Abb. 3-15 dargestellt.



**Abb. 3-15:** Dünne Schicht parallel zum angelegten äußeren Magnetfeld [43]

Es ist zu erkennen, daß die Feldvariation mit abnehmender Dicke der Schicht immer kleiner wird. Für das kritische Magnetfeld bedeutet das, daß es mit kleiner werdender Dicke größer wird. Es kann sogar bis zu einem Faktor 10 größer sein als das thermodynamische Feld  $B_{cth}$ , wenn die Dicke  $d \ll \lambda$  ist [34].

Im folgenden soll das kritische Magnetfeld einer Schicht konkret bestimmt werden [63]. Dazu wird die gleiche Probengeometrie und Magnetfeldausrichtung wie in Abb. 3-15 angenommen. Das heißt die Dicke der Schicht soll  $2d$  entlang der x-Achse sein,  $H_z = H_a$  bei  $x = \pm d$  und  $H_y = 0 = H_x$  betragen. Die Bestimmung des kritischen Magnetfeldes sollen der Einfachheit im cgs-System gemacht werden. Dies ändert jedoch nichts am Wert des kritischen Magnetfeldes, da die Beziehung gilt:

$$B = \mu_0 \cdot H.$$

Unter diesen Annahmen sieht die Magnetfeldvariation einer dünnen Schicht wie folgt aus:

$$H_z = H_0 \frac{\cosh(x/d)}{\cosh(d/\lambda)}. \quad (3.47)$$

Für die spezifische (massenbezogene) Magnetisierung gilt somit:

$$I = \frac{1}{8\pi d} \int_{-d}^d (H_z - H_a) dx = -\frac{H_a}{4\pi} \left(1 - \frac{\lambda}{d} \tanh \frac{d}{\lambda}\right). \quad (3.48)$$

Im Typ-I-Supraleiter kommt es zu einer vollständigen Magnetfeldverdrängung, so daß sich der Ausdruck für die Differenz der freien Energien des supraleitenden und des normalleitenden Zustandes vereinfacht zu:

$$\Delta G(H_a) = \int_0^{H_a} I dH_a = -\frac{H_c^2}{8\pi}. \quad (3.49)$$

Durch diese Überlegungen ist es nun möglich, das kritische Magnetfeld einer dünnen Schicht  $B_{cf}$  zu bestimmen:

$$\left(\frac{H_{cf}}{H_c}\right)^2 = \left(1 - \frac{\lambda}{d} \tanh \frac{d}{\lambda}\right)^{-1} = \left(\frac{B_{cf}}{B_c}\right)^2 \quad (3.50)$$

Aus Gl. (3.50) wird deutlich, daß die Schichtdicke  $d$  eine große Rolle spielt, wenn sie sehr viel kleiner als die Eindringtiefe  $\lambda$  wird. So ist es sinnvoll, sich Gl. (3.50) für die beiden Fälle anzuschauen:

1. Fall:  $d \gg \lambda$

$$\frac{B_{cf}}{B_c} = 1 + \frac{\lambda}{2d} \quad (3.51)$$

2. Fall:  $d \ll \lambda$

$$\frac{B_{cf}}{B_c} = \sqrt{3} \frac{\lambda}{2d}. \quad (3.52)$$

### 3.5.6 Winkelabhängigkeit des kritischen Magnetfeldes

Wird eine dicke supraleitende Schicht in ein zur Schicht senkrecht orientiertes äußeres Magnetfeld gebracht, dringt dieses in die Schicht ein und bildet den Zwischenzustand aus [46],[64],[35],[65]. Die Schicht wird vollständig normalleitend, wenn das kritische Magnetfeld  $B_{ci}$  folgenden Wert erreicht hat:

$$B_{ci} \approx B_{cth} \left( 1 - \sqrt{\frac{\delta}{d}} \right), \quad (3.53)$$

wobei  $B_{cth}$  das thermodynamische kritische Magnetfeld,  $d$  die Dicke der Schicht und  $\delta$  die Dicke der Domäne zwischen den normal- und supraleitenden Bereichen ist. Wird die Schicht nun dünner ( $d \ll \lambda$ ) ändert sich dieses Verhalten. Mit Hilfe der Ginzburg-Landau-Theorie [37] konnte Tinkham [66] zeigen, daß, wenn ein äußeres Magnetfeld senkrecht zu einer dünnen Schicht angelegt ist, dieses Magnetfeld in die Schicht eindringt und einen Mischzustand [67] ausbildet. Die Schicht wird vollständig normalleitend (Phasenübergang 2.Ordnung) nach der Ginzburg-Landau-Theorie beim Erreichen eines kritischen Magnetfeldes  $B_{c\perp}$ , welches gegeben ist durch:

$$B_{c\perp} = \frac{4\pi\lambda^2 B_{cth}^2}{\phi_0}, \quad (3.54)$$

mit  $\lambda$  der Eindringtiefe und  $\phi_0$  dem Flußquant. Unter Verwendung der Beziehung

$$\phi_0 = 2\sqrt{2}\pi\lambda\xi_T B_{cth}$$

aus der Ginzburg-Landau-Theorie kann Gl. (3.54) anders formuliert werden:

$$B_{c_{\perp}} = \sqrt{2} \left( \frac{\lambda}{\xi_T} \right) B_{c_{th}} = \sqrt{2} \kappa B_{c_{th}} , \quad (3.55)$$

$\kappa$  der Ginzburg-Landau-Parameter und  $\xi_T$  die temperaturabhängige Kohärenzlänge nach de Gennes [68]. Dieses  $B_{c_{\perp}}$  ist identisch mit dem kritischen Magnetfeld  $B_{c_2}$  eines Typ-II-Supraleiters in Volumenform ( $\kappa > 1/\sqrt{2}$ ). Interessanterweise ist dieses Ergebnis genauso gültig für eine genügend dünne Schicht eines Typ-I-Supraleiters ( $\kappa < 1/\sqrt{2}$ ) wie für einen Typ-II-Supraleiters [69]. Tinkham definiert eine Schicht als genügend dünn, wenn gilt:

$$d < \xi_T .$$

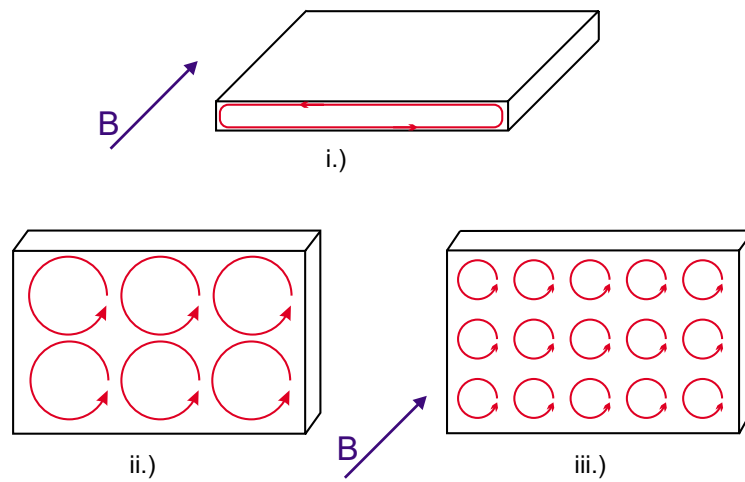
Maki [70] und andere [71],[72] fanden später einen exakteren Wert für diese kritische Dicke. Sie fanden, daß diese Dicke von der Größenordnung  $\lambda^2/\xi_T$  ist. Da aber bei einem Typ-I-Supraleiter typischerweise  $\lambda$  und  $\xi_T$  in der gleichen Größenordnung sind, ist der Unterschied zwischen der kritischen Dicke von Tinkham und Maki nicht sehr groß. Das parallele kritische Magnetfeld  $B_{c_{\parallel}}$  ist aus der Ginzburg-Landau-Theorie bekannt:

$$B_{c_{\parallel}} = \sqrt{24} \frac{\lambda B_{c_{th}}}{d} . \quad (3.56)$$

Tinkham fand für die Winkelabhängigkeit des kritischen Magnetfeldes zunächst durch einfache analytische Interpolation den folgenden Ausdruck:

$$\left( \frac{B(\theta) \cdot \cos\theta}{B_{c_{\parallel}}} \right)^2 + \frac{B(\theta) \cdot \sin\theta}{B_{c_{\perp}}} = 1 \quad (3.57)$$

mit  $B_{c_{\parallel}}$  kritisches Magnetfeld in der Orientierung  $\vec{B} \parallel$  Schichtoberfläche ( $\vec{B} \perp$  c-Achse),  $B_{c_{\perp}}$  kritisches Magnetfeld in der Orientierung  $\vec{B} \perp$  Schichtoberfläche ( $\vec{B} \parallel$  c-Achse) und  $\theta$  Winkel zwischen äußerem Magnetfeld  $\vec{B}$  und der Schichtoberfläche. Er konnte aber später zeigen, daß Gl. (3.57) auch aus der Ginzburg-Landau-Theorie hergeleitet werden kann [69].



**Abb. 3-16:** Schematische Darstellung der Stromverteilung einer Schicht parallel und senkrecht zum äußeren Magnetfeld. [66]

Abschließend kann gesagt werden, daß in der Anordnung mit der Schichtebene parallel zum äußeren Magnetfeld (Abb. 3-16-i.) die wichtige Dimension für die Stromschleifen die Schichtdicke ist und deshalb bleibt die Größe der Stromschleifen konstant. In der anderen Orientierung hingegen werden die Stromschleifen mit steigendem äußeren Magnetfeld kleiner (Abb. 3-16-ii. & -iii.) [66].

