

6 Numerische Resultate

In diesem Kapitel überprüfen wir die Konvergenzresultate aus Abschnitt 3.4.2 numerisch. Wir untersuchen das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte hierarchische Gebietzerlegungsverfahren in Modellproblemen und praktischen Anwendungen auf Konvergenz in Abhängigkeit von der Kluftbreite, dem Sprung in der Permeabilität von Kluft und Matrix und der Verfeinerungstiefe bzw. der Anzahl der Unbekannten. Dazu werden wir zunächst ein einfaches Modellbeispiel betrachten. Anhand dieses Modellbeispiels untersuchen wir auch den tatsächlichen Einfluß der Abweichung der Vierecke innerhalb der Klüfte von der Parallelogrammstruktur in Abhängigkeit von der Kluftweite (Abschnitt 6.1.1). Für die Zweilevel-Variante (Abschnitt 3.5) des hierarchischen Verfahrens sind die Konvergenzresultate für das Modellbeispiel in Abschnitt 6.1.2 dargestellt. Zum Abschluß der Untersuchungen an dem Modellbeispiel haben wir die Konvergenzresultate des hierarchischen Gebietzerlegungsverfahrens und der Variante als hierarchisches Zweilevel-Verfahren mit anderen Verfahren verglichen. Dazu haben wir das Beispiel mit verschiedenen Verfahren wie klassisches Mehrgitterverfahren mit Gauß-Seidel-Glättung und algebraisches Mehrgitterverfahren gerechnet. Die Ergebnisse dieses Vergleiches sind in Abschnitt 6.1.3 dargestellt.

Um einen Eindruck von der Flexibilität und Einsatzfähigkeit des implementierten Verfahrens zu bekommen, untersuchen wir dann das Konvergenzverhalten des Verfahrens in einem praxisorientierten Anwendungsbeispiel eines Kluftnetzwerks. Viele nicht parallele Klüfte führen zu komplizierten Grobgittern. Den Einfluß der Qualität des Grobgitters stellen wir anhand von verschiedenen Grobgittern für das Kluftnetzwerk dar (Abschnitt 6.2). In diesem Beispiel führt uniforme Verfeinerung schnell zu unnötig vielen Unbekannten. Wir haben daher den adaptiven Algorithmus aus Abschnitt 4.4 auf dieses Anwendungsbeispiel angewendet. Die Ergebnisse sind in Abschnitt 6.2 dargestellt.

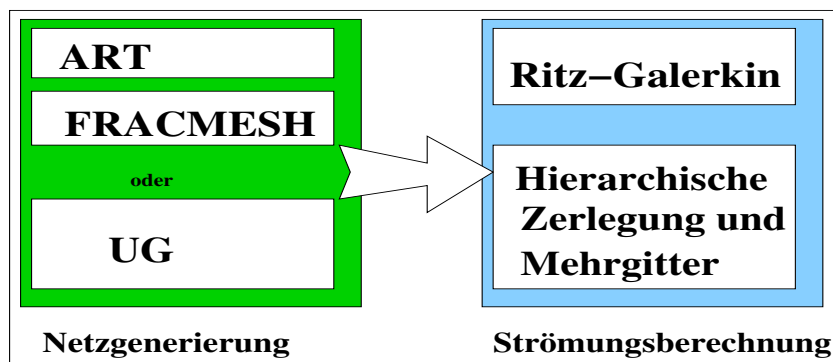


Abbildung 6.1: Modellaufbau für Strömungsberechnung mit hierarchischer Gebietzerlegung

Wir betrachten als Modellproblem für die folgenden Beispiele einen einfachen Fall des Randwertproblems (2.17):

$$\begin{aligned} -K(x)\Delta p(x) &= 0 & \text{für } x \in \Omega \\ p &= d_l & \text{auf } \Gamma_{D_l} \\ p &= d_r & \text{auf } \Gamma_{D_r} \\ \frac{\partial p}{\partial \vec{N}} &= 0 & \text{auf } \Gamma_N = \Gamma_{N_o} + \Gamma_{N_u} \end{aligned} \quad (6.1)$$

mit $K(x_M) = \text{const.}$ für $x_M \in \Omega_M$ und $K(x_F) = k_0$ für $x_F \in \Omega_F$. Am oberen und unteren Gebietsrand Γ_{N_u} und Γ_{N_o} lassen wir keinen Fluß über den Rand zu (Neumann Null). Am rechten und linken Gebietsrand Γ_{D_r} und Γ_{D_l} wird ein Druck vorgegeben, der am linken Rand etwas höher ist als am rechten Rand ($d_l > d_r$). Dadurch findet in dem Gebiet Ω ein Fluß von links nach rechts statt, abhängig von der Wahl der Leitfähigkeit $K(x_F) = k_0$ in den Klüften.

Gerechnet wird in diesem Kapitel mit einem Mehrgitter-V-Zyklus mit Gauß-Seidel-Glätter im Matrixproblem und direkter Lösung von Interface- und Klufftproblem bzw. einem Mehrgitterverfahren mit Linienglätter im Klufftproblem. Wir untersuchen anhand von Beispielen die Konvergenzraten unseres in Abschnitt 3 vorgestellten hierarchischen Gebietszerlegungsverfahrens. Dabei werden die spezifischen Problemeigenschaften wie große Skalenunterschiede (kleine Klufftweite), große Koeffizientensprünge in der Permeabilität und die Anzahl der Unbekannten besonders berücksichtigt. Unser Ziel war ein Verfahren, dessen Konvergenzverhalten unabhängig von diesen Faktoren ist. Wir haben diese Eigenschaft für das hierarchische Gebietszerlegungsverfahren aus Abschnitt 3 gezeigt und wollen nun diese Ergebnisse experimentell verifizieren.

6.1 Modellproblem: Klufftkreuzung

In diesem Abschnitt haben wir eine einfache Klufftkreuzung wie in unserem Modellbeispiel in Abschnitt 3.1 (Abb. 3.3) gerechnet: ein Gesteinsmatrixblock, der von zwei Klüften zerschnitten wird, die sich in einer Kreuzung schneiden. Der Druck am linken Rand ist etwas höher als am rechten ($d_l = 2$, $d_r = 1$). Es findet ein Fluß von links nach rechts statt.

Abbildung 6.2 zeigt links das Rechengebiet Ω zusammen mit der Ausgangszerlegung $\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{Q}_{00}$ in Drei- und Vierecke. Die Vierecke repräsentieren die zwei Klüfte mit der Klufftweite ε . Zur Veranschaulichung ist die Klufft in Abbildung 6.2 sehr breit ($\varepsilon = 0.2\text{m}$) dargestellt, in den folgenden Rechnungen ist die Klufft sehr viel schmaler: $\varepsilon = 0.1\text{m}$ bis $\varepsilon = 10^{-10}\text{m}$. Das Rechengebiet umfaßt insgesamt $6\text{m} \times 6\text{m}$. In Abbildung 6.2 (rechts) ist die Lösung p_{jk} für $K(x) = k_0 = 1.0$, $\forall x \in \Omega$ bei einer Klufftweite von $\varepsilon = 10^{-4}$ als Höhenlinien dargestellt.

Für dieses Modellbeispiel haben wir zunächst zwei uniforme Verfeinerungen ($j = k = 2$) des gesamten Rechengebietes durchgeführt und anschließend nur den Matrixteil uniform und in der Klufft anisotrop (blau) verfeinert ($j = 2 + n$). Auf diese Weise wird die Klufft nicht unrealistisch fein parallel zur Klufftachse vernetzt (siehe auch Abschnitt 6.2).

Wir schätzen die Konvergenzraten ρ_{v+1} durch

$$\rho_{v+1} = \frac{\|p_{jk}^{\gamma+1} - p_{jk}^{\gamma}\|}{\|p_{jk}^{\gamma} - p_{jk}^{\gamma-1}\|}$$

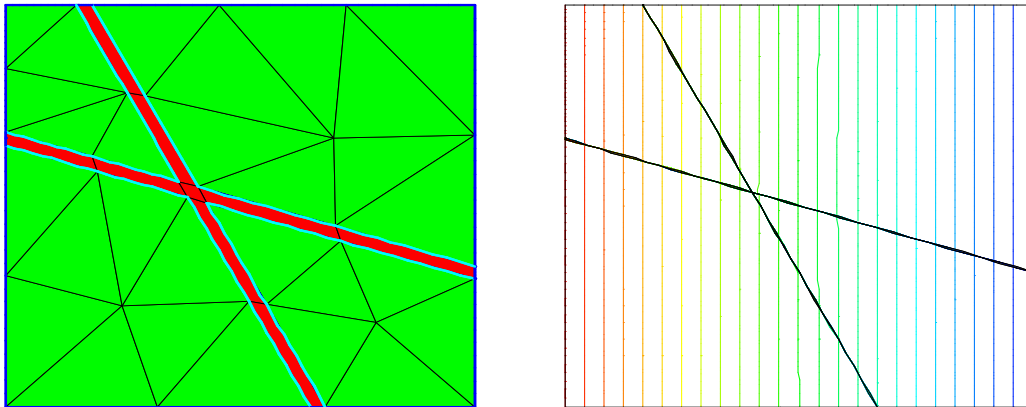


Abbildung 6.2: Trianguliertes Gebiet mit zwei sich schneidenden Klüften (Grobgrid des Matrixproblems (links) und Lösung für $K(x) = k_0 = 1$ (rechts)

ab. Dies liefert eine gute Schätzung für die Konvergenzrate, wenn die tatsächliche Konvergenzrate des Verfahrens nicht fast eins ist: $\rho < c < 1$. In Abbildung 6.3 sehen wir links die Konvergenzraten des hierarchischen Gebietszerlegungsverfahrens in Abhängigkeit von der Klufthöhe für $j = 6, k = 2$ mit $n_{jk} = 60893$ (= #Knoten) Unbekannten. Dargestellt ist auf

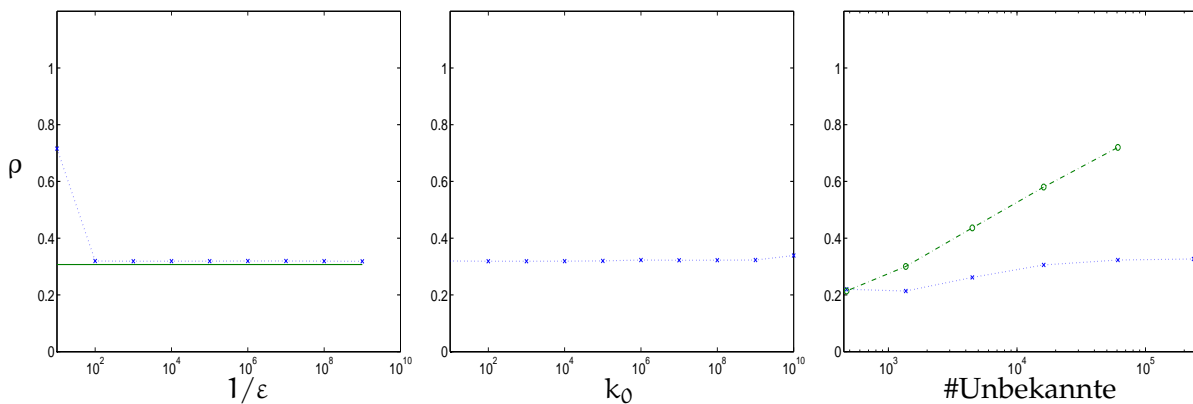


Abbildung 6.3: Konvergenzraten in Abhängigkeit von der Klufthöhe ϵ (links) für $K(x) = k_0 = 1.0$ und $n_{jk} = 60893$, der hydraulischen Leitfähigkeit in der Kluft k_0 (Mitte) für $\epsilon = 10^{-5}$ und $n_{jk} = 60893$ und der Verfeinerungstiefe in der Gesteinsmatrix j (rechts) für $\epsilon = 10^{-5}(\dots)$ bzw. $\epsilon = 10^{-1}(-\cdot)$ und $K(x_M) = 1.0, k_0 = 10^6$

der x -Achse $1/\epsilon$, die Kluft wird also von links nach rechts schmaler. Für sehr breite Klüfte (Abb. 6.3 linkes Bild links) konvergiert das hierarchische Verfahren langsamer, in diesem Fall liegt bei feinerer Vernetzung in der Gesteinsmatrix innerhalb der Klüfte die Anisotropie nicht mehr parallel zur Kluftrichtung, sondern quer zur Klufthöhe vor. Für diesen Fall wurde das hierarchische Gebietszerlegungsverfahren nicht entwickelt. In diesem Fall ist eventuell ein algebraisches Mehrgitterverfahren vorzuziehen (vergl. Abschnitt 6.1.3). Für schmalere Klüfte hingegen konvergiert das Verfahren unabhängig von der Klufthöhe ϵ .

Für Vergleichszwecke haben wir das entsprechende reduzierte Problem erzeugt, d.h. ein

Problem mit Kluftweite $\varepsilon = 0$ bzw. ohne Kluft mit demselben Grobgitter im übrigen Gebiet. In Abbildung 6.3 (links) ist die Konvergenzrate für das klassische Mehrgitterverfahren mit Gauß–Seidel–Glätter für das reduzierte Problem als durchgezogene Linie (—) dargestellt. Wir sehen, daß die Konvergenzrate des hierarchischen Gebietszerlegungsverfahrens in derselben Größenordnung wie die Konvergenzrate des klassischen Mehrgitterverfahrens für das reduzierte Problem liegt.

Auf dem mittleren Bild in Abbildung 6.3 sind die Konvergenzraten des hierarchischen Gebietszerlegungsverfahrens in Abhängigkeit von der Permeabilität in der Kluft k_0 dargestellt. Dabei wurde die Permeabilität in der Matrix fest gewählt ($K(x_M) = 1.0$, für $x_M \in \Omega_M$), so daß der Sprung in den Koeffizienten mit steigender Permeabilität in der Kluft größer wird. Man sieht, daß für immer größer werdende Differenz zwischen der hydraulischen Leitfähigkeit in der Kluft und in der Matrix die Konvergenzraten gleich bleiben. Die hydraulische Leitfähigkeit in der Kluft bzw. der Sprung in den Koeffizienten hat also keinen Einfluß auf das Konvergenzverhalten des Verfahrens (vergl. Abschnitte 3.3 und 3.4.2).

Auf dem rechten Bild in Abbildung 6.3 sehen wir die Konvergenzraten des hierarchischen Gebietszerlegungsverfahrens in Abhängigkeit von der Anzahl der Unbekannten im Gesamtrechnengebiet. Für festes $k = 2$ bedeutet das größer werdendes j . Für schmale Klüfte ist das Verfahren unabhängig von der Verfeinerungstiefe solange die Anisotropie nicht normal zur Klufttrichtung auftritt. Bei breiter Kluft liegt schon nach wenigen Verfeinerungen die Anisotropie normal zur Klufttrichtung vor und die Konvergenzraten werden mit jeder Verfeinerung größer. Das bestätigt die Abhängigkeit der Konvergenzraten des hierarchischen Gebietszerlegungsverfahrens von σ_ε aus Definition (3.17) in Satz 9. Schon bei einer Kluftweite von $\varepsilon = 10^{-2}$ ist dieser Effekt bis zu einer Verfeinerungstiefe von $j = 8$ nicht mehr zu beobachten. Bei sehr breiten Klüften sollte also gegebenenfalls ein anderes Verfahren zum Einsatz kommen (siehe Abschnitt 6.1.3).

Es ist deutlich zu sehen, daß das hierarchische Gebietszerlegungsverfahren für schmale Klüfte robust gegenüber der Kluftweite, dem Sprung in den Leitfähigkeitskoeffizienten in Kluft und Matrix und der Verfeinerungstiefe konvergiert. Damit bestätigen sich die Konvergenzresultate aus Kapitel 3.

6.1.1 Anisotrope Trapeze

Die Konvergenzrate (3.35) des hierarchischen Gebietszerlegungsverfahrens hängt davon ab, wie stark die anisotropen Elemente innerhalb der Kluft von Parallelogrammen abweichen (siehe Kapitel 3). Wir haben daher das Modellproblem mit der Kluftkreuzung aus zwei Klüften noch einmal mit modifizierten Grobgittern gerechnet. Dabei haben wir im oberen Abschnitt der von oben nach unten gehenden Kluft einen Knoten so verschoben, daß dort die Kluft nun mit Trapezen vernetzt ist, die von der Parallelogrammstruktur deutlich abweichen (siehe Abbildung 6.4 (links) Kluft von oben nach unten oberer Abschnitt). In Kapitel 3 haben wir die Kantenlänge der Grundseite eines Trapezes mit h_Q bezeichnet und die kürzere mit $s_Q h_Q$ (siehe Abbildung 3.12). Dabei beschreibt der Faktor s_Q die Abweichung des Trapezes von einem Parallelogramm mit der Kantenlänge h_Q . Wir wollen nun die Konvergenzraten des hierarchischen Gebietszerlegungsverfahrens in Abhängigkeit von s_Q für verschiedene Kluftweiten untersuchen. In Abbildung 6.4 (rechts) sind die Konvergenzraten für Kluftweite

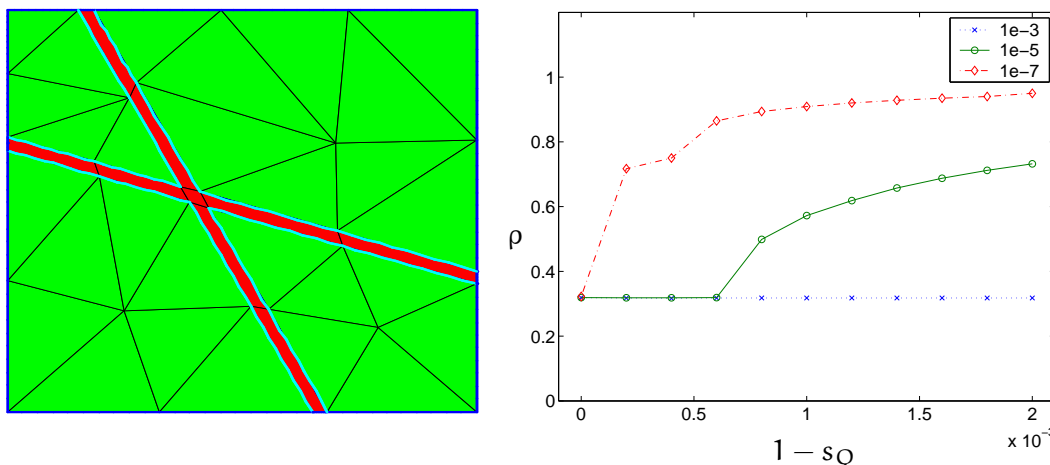


Abbildung 6.4: Grobgitter mit Trapezen in einer Kluft und Konvergenzverhalten in Abhängigkeit von der Abweichung von einem Parallelogramm (s_Q) für verschiedene Kluftweiten mit $n_{jk} = 60893$ und $K(x_M) = k_0 = 1.0$

$10^{-3}(\dots)$, $10^{-5}(\dots)$, $10^{-7}(\dots)$ dargestellt. Es ist deutlich zu sehen, daß das Verfahren für relativ breite Klüfte unabhängig von s_Q konvergiert. Je schmaler die Kluft ist, desto sensibler reagiert das Verfahren auf die Störung in der Parallelogrammstruktur in den Elementen in den Klüften. Das bestätigt die Abhängigkeit der Konstanten in den Konvergenzabschätzungen von Satz 9 von der Abweichung der Elemente in den Klüften von Parallelogrammen $\sigma_{\epsilon^{-1}}$ aus (3.17). Bei langen Klüften mit wenigen Kreuzungen bzw. Klüften, die in zwei Hauptrichtungen nahezu parallel verlaufen, können die Klüfte mit (fast-) Parallelogrammen vernetzt werden. In Kluftnetzwerken mit vielen in verschiedene Richtungen gehenden Klüften kann dieses Verhalten zu Problemen führen.

6.1.2 Konvergenz des hierarchischen Zweilevel-Verfahrens

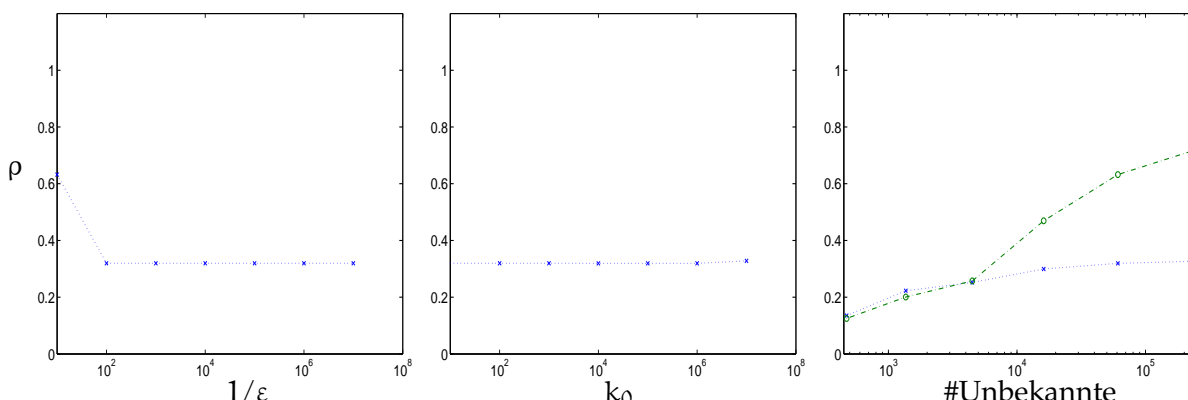


Abbildung 6.5: Konvergenzraten in Abhängigkeit von der Kluftbreite ϵ (links) für $K(x) = k_0 = 1.0$ und $n_{jk} = 60893$, der hydraulischen Leitfähigkeit in der Kluft k_0 (Mitte) für $\epsilon = 10^{-5}$ und $n_{jk} = 60893$ und der Verfeinerungstiefe in der Gesteinsmatrix j (rechts) für $\epsilon = 10^{-5}(\dots)$ bzw. $\epsilon = 10^{-1}(\dots)$ und $K(x_M) = 1.0$, $k_0 = 10^6$

Das hierarchische Gebietszerlegungsverfahren fordert eine direkte Lösung des Interfaceproblems. Wir haben daher in Abschnitt 3.5 ein hierarchisches Zweilevel-Verfahren vorgestellt, das ohne direkte Lösung eines der Teilprobleme auskommt. Wir wollen nun auch die Robustheit der Zweilevel-Variante überprüfen. Wir haben für die in Abschnitt 3.5 beschriebene Variante des hierarchischen Gebietszerlegungsverfahrens als hierarchisches Zweilevel-Verfahren noch einmal das Beispiel der einfachen Kreuzung aus zwei Klüften gerechnet und auf ihr Konvergenzverhalten hin untersucht.

In Abbildung 6.5 sind wieder die Konvergenzraten in Abhängigkeit von der Kluftbreite (linkes Bild), der hydraulischen Leitfähigkeit (mitte) und der Verfeinerungstiefe (rechts) dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, daß das hierarchische Zweilevel-Verfahren ähnlich gut konvergiert, wie das hierarchische Gebietszerlegungsverfahren. Die Konvergenz ist wieder robust solange die Anisotropie nicht normal zur Klufttrichtung auftritt, also solange die Klüfte schmal sind in Abhängigkeit von der Verfeinerungstiefe (siehe Abb.6.5 (rechts)).

6.1.3 Vergleiche mit anderen Verfahren

Wir haben in den vorhergehenden Abschnitten das Konvergenzverhalten des hierarchischen Gebietszerlegungsverfahrens und des hierarchischen Zweilevel-Verfahrens untersucht. Um die Ergebnisse einordnen zu können, werden wir nun das Modellproblem auch mit anderen Verfahren rechnen. Zum Vergleich haben wir ein klassisches Mehrgitterverfahren mit Gauß-Seidel-Glättung einmal zur Lösung des Gesamtgleichungssystems in der Knotenbasis und einmal für die Lösung des Matrixproblems im hierarchischen Zweilevel-Verfahren benutzt. Zusätzlich haben wir das Gleichungssystem mit einem algebraischen Mehrgitterverfahren

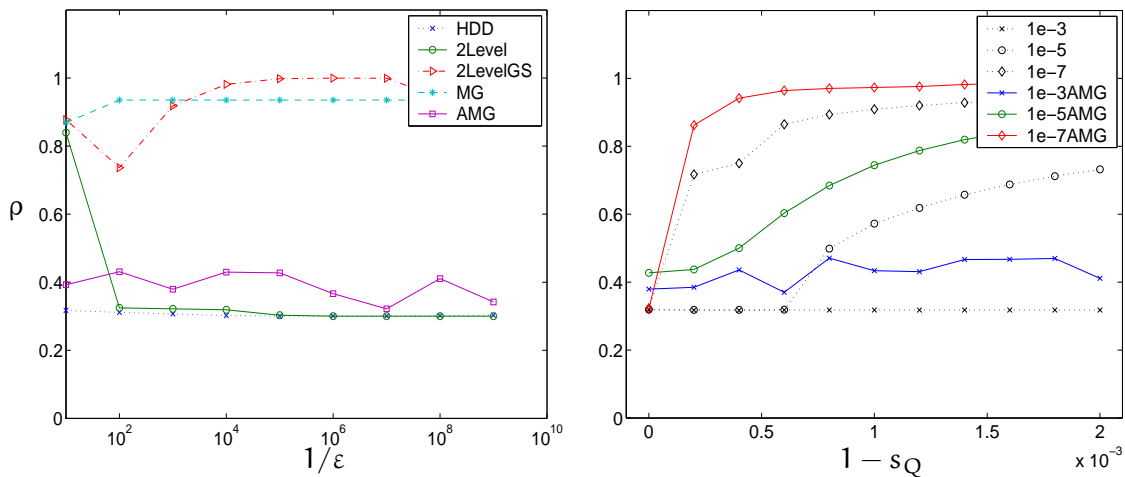


Abbildung 6.6: Konvergenzvergleiche verschiedener Mehrgitterverfahren für $n_{jk} = 24357$ und $K(x_M) = k_0 = 1.0$ (links) und Konvergenzverhalten des algebraischen Mehrgitterverfahrens in Abhängigkeit von der Abweichung von einem Parallelogramm (s_Q) für verschiedene Kluftweiten mit $n_{jk} = 23841$ und $K(x_M) = k_0 = 1.0$ (rechts)

gelöst. Wir haben das algebraische Mehrgitterverfahren von Ruge und Stüben [62] zum Vergleich herangezogen. Von den in UG zur Verfügung stehenden algebraischen

Mehrgitterverfahren (z.B. auch ein algebraisches Mehrgitterverfahren nach Braess [14]) zeigt dieses Verfahren für das vorliegenden Problem die besten Konvergenzeigenschaften. Wir haben für bessere Vergleichsmöglichkeiten hier uniform in Kluft und Matrix verfeinert bis $k = j = 5$ (24357 Knoten), da nur für das hierarchische Gebietszerlegungsverfahren und das hierarchische Zweilevelverfahren die Möglichkeit besteht, innerhalb der Kluft anisotrop quer zur Klufttrichtung zu verfeinern.

Für das algebraische Mehrgitterverfahren (AMG) haben wir die Klüfte mit Dreiecken vernetzt, da in der vorliegenden Version von UG Vierecke für algebraische Mehrgitter nicht optimal implementiert sind und die Verfahren für Dreiecke wesentlich besser konvergieren. Daher weicht die Anzahl der Unbekannten für das algebraische Mehrgitterverfahren ($n_{jk} = 23841$) etwas von der Anzahl der Knoten für Vierecke in den Klüften $n_{jk} = 24357$ ab. Das klassische Mehrgitterverfahren mit Gauß–Seidel–Glättung ('MG'---) und das Zweilevel–Verfahren ohne die geometriangepaßten Glättungsschritte ('2LevelGS' ----) sind nicht robust gegenüber schmaler werdender Kluft. Ein Vergleich der Konvergenzraten dieser Verfahren anhand der vorliegenden Daten ist nicht sinnvoll, da die Schätzung für Konvergenzraten im Bereich von 1 sehr ungenau ist.

Das algebraische Mehrgitterverfahren von Ruge und Stüben ('AMG' —) konvergiert kaum schlechter als das hierarchische Gebietszerlegungsverfahren ('HDD' ···) und das hierarchische Zweilevel–Verfahren mit geometriangepaßten Glättungsschritten ('2Level' —). An dieser Stelle stellt sich die Frage, wie das algebraische Mehrgitterverfahren auf weitere Störungen der Elementgeometrie innerhalb der Klüfte reagiert. Wir haben daher den Test für Trapeze aus Abschnitt 6.1.1 noch einmal für das algebraische Mehrgitterverfahren durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 6.6 (rechts) dargestellt. Wir haben die Konvergenzraten wieder für verschiedene Kluftweiten untersucht. Es ist deutlich zu sehen, daß auch für das algebraische Mehrgitterverfahren ('AMG' —) für schmale Klüfte und degenerierende Elemente die Konvergenz verloren geht. Das algebraische Mehrgitterverfahren zeigt ein mit dem hierarchischen Gebietszerlegungsverfahren ('1e-x' ···) vergleichbares Konvergenzverhalten in Bezug auf die Abweichung der Trapeze in den Klüften von Parallelogrammen.

6.2 Anwendungsbeispiel: Sechs Klüfte

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir die Konvergenzeigenschaften des neu entwickelten hierarchischen Gebietszerlegungsverfahrens anhand eines einfachen Modellbeispiels untersucht. Nach den guten Ergebnissen des Verfahrens in dem einfachen Beispiel 6.1 werden wir nun das Verfahren an einem anwendungsorientierteren Beispiel mit sechs sich schneidenden Klüften testen.

Wir haben in den Beispielen dieses Abschnittes wieder homogene Neumann–Randbedingungen ($b = 0$) am oberen und unteren Gebietsrand gewählt und am linken Gebietsrand einen etwas größeren Druck ($d_l = 100000\text{hPa}$) als am rechten ($d_r = 99900\text{hPa}$) vorgegeben. Der Druck p nimmt also von links nach rechts ab und es findet ein Fluß von links nach rechts abhängig von der Permeabilität \underline{K}_0 in Kluft und Matrix statt. Für die hydraulische Leitfähigkeit in der Gesteinsmatrix haben wir diesmal einen Wert gewählt, der in etwa in der Größenordnung des Wertes von Sandstein liegt ($\underline{K}_0 \approx 10^{-12}\text{m}^2$, das entspricht in etwa

$K(x_M) = 10^{-9}$ für $x_M \in \Omega_M$). Die Lösung für $k_0 = 10^{-2}$, $\varepsilon = 10^{-6}$ ist in Abbildung 6.7 (rechts) dargestellt.

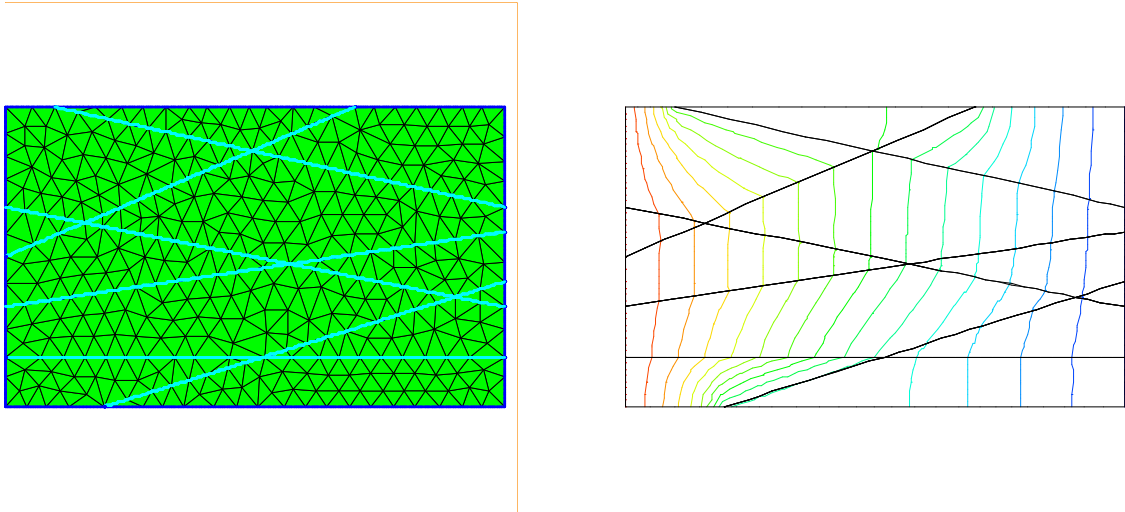


Abbildung 6.7: Trianguliertes Gebiet mit sechs sich schneidenden Klüften :ART-Grobgrid des Matrixproblems(links) und Lösung für $K(x) = 10^{-9}$, $k_0 = 10^{-2}$ und $\varepsilon = 10^{-6}$

Grobgrid: Die Vernetzung eines Gebiets mit vielen sich schneidenden Klüften ist nicht trivial. Schon die Triangulierung der Gesteinsmatrix hat entscheidenden Einfluß auf die Konvergenzraten des Mehrgitterverfahrens. Das verwendete Grobgrid sollte nicht zu fein sein, da ein feines Grobgrid auch mehr Rechenaufwand im Mehrgitter bedeutet. Auf der anderen Seite sollten die Elemente möglichst regulär sein.

Das von dem Netzgenerator erzeugte Grobgrid (Abb. 6.7 links) ist in diesem Fall schon

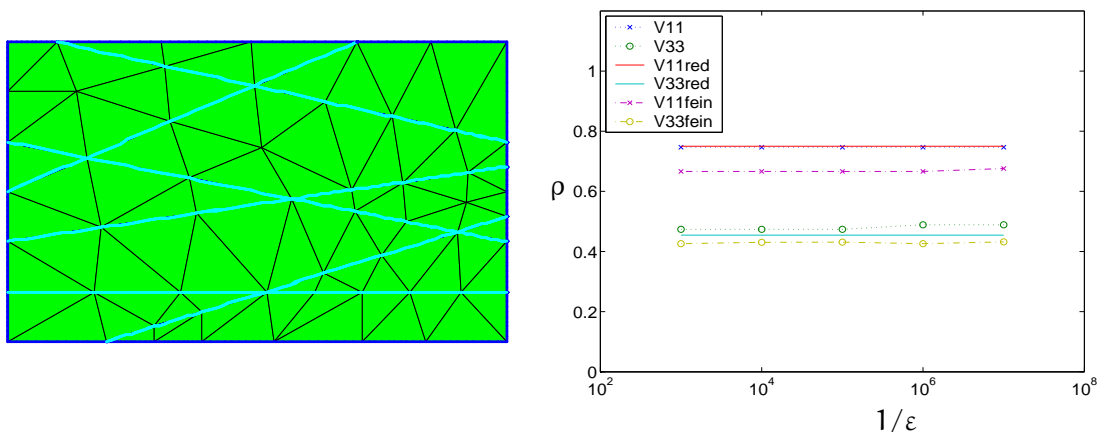


Abbildung 6.8: Trianguliertes Gebiet mit sechs sich schneidenden Klüften (Grobgrid des Matrixproblems(links), Konvergenzraten für ein gröberes und ein feines grobgrid in Abhängigkeit von der Kluftweite ε für $K(x_M) = k_0 = 10^9$ und $n_{jk} = 15077$ bzw. $n_{jk} = 28237$

sehr fein. Bei feinen Grobgittern kann die Gesteinsmatrix schon auf dem Grobgitter feiner vernetzt sein, als nötig. Zusätzlich führen für feine Grobgitter schon wenige Verfeinerungen im Kluftbereich dazu, daß die Anisotropie in den Klüften quer zur Kluftachse auftritt. Wir haben daher das Gebiet mit den sechs Klüften noch einmal von Hand mit einem größeren Gitter vernetzt. Die Konvergenzraten in Abhängigkeit von der Kluftweite sind für beide Grobgitter in Abbildung 6.8 (rechts) dargestellt. Es ist kaum möglich für sehr unterschiedliche Grobgitter Verfeinerungslevel zu finden, auf denen die Anzahl der Unbekannten gleich ist. Wir haben daher für beide Grobgitter so weit verfeinert, bis die Konvergenzraten in j, k absättigen und dann die Verfahren verglichen. Für das von Hand erzeugte Grobgitter ('V11' ...) konvergiert das hierarchische Gebietszerlegungsverfahren etwas langsamer als für das von ART erzeugte Grobgitter ('V11fein' ...). Der Unterschied ist aber nicht gravierend, bei mehr Glättungsschritten wird er sogar noch geringer. Wir haben für das von Hand erzeugte Grobgitter wieder ein reduziertes Problem erzeugt und gerechnet. Wir sehen, dass die Konvergenzraten des hierarchischen Gebietszerlegungsverfahrens wieder in der Größenordnung der Konvergenzrate von klassischem Mehrgitterverfahren mit Gauß-Seidel-Glättung für das reduzierte Problem ($\varepsilon = 0$) ('V11red' ...) liegen.

Eine Erhöhung der Anzahl der Glättungsschritte auf drei bringt eine deutliche Verbesserung der Konvergenzraten ('V33', 'V33fein', 'V33red'), dabei ist der Unterschied in den Konvergenzraten für die beiden Grobgitter vernachlässigbar. Eine weitere Beschleunigung des Verfahrens sollte durch die Verwendung des hierarchischen Verfahrens als Vorkonditionierer in einem Krylowraum-Verfahren (conjugate gradient, cg, siehe z.B. Braess [15], Deuffhard, Hohmann [25]) erreicht werden können.

In diesem Beispiel ist das von Hand erzeugte Grobgitter offenbar ausreichend regulär. Für größere Kluftnetzwerke ist eine Vernetzung von Hand nicht praktikabel.

Adaptives Kluftnetzwerk Kluft-Matrix-Systeme sind geprägt von schnellem Fluß innerhalb der Fließwege, der Klüfte und großen Gebieten geringer Geschwindigkeiten innerhalb der Gesteinsmatrix. Bei uniformer Verfeinerung des Gesamtgebietes werden innerhalb der Gesteinsblöcke unnötig viele Freiheitsgrade eingefügt, der Rechenaufwand steigt stark an, der Genauigkeitsgewinn ist klein.

Gerade in solchen Fällen bietet sich eine adaptive Verfeinerung an. Mit dem Fehlerindikator aus Abschnitt 4.1.3 und dem adaptiven Algorithmus aus Abschnitt 4.4 haben wir das Kluftnetzwerk aus sechs Klüften mit fünf Kreuzungen noch einmal adaptiv gerechnet. Wir haben dafür die Parameter aus Abschnitt 6.2 übernommen. Als Ausgangspunkt dient das Grobgitter aus Abbildung 6.8. Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind in Tabelle 6.2 aufgeführt. Wir haben dazu zunächst einmal uniform verfeinert ($j = k = 1$), damit das Kluftproblem auch Freiheitsgrade im Inneren der Kluft enthält.

Die Norm der Lösung $\|p_j\|$ ist sehr groß (≈ 77000). Schon auf Level 1 ist der geschätzte relative Diskretisierungsfehler sehr klein (siehe Tabelle 6.1). Daher führt eine Wahl der Toleranz in einer üblichen Größenordnung von $TOL = 5\%$ nicht zu Verfeinerung. Wir haben daher die Toleranz für den Diskretisierungsfehler auf $TOL_D = 0.0002\%$ gesetzt. Als Abbruchkriterium dient

$$\|p - p_{jk}\| \approx \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{jk}} \eta_T^2 \right\}^{1/2} \leq \sigma TOL_D \|p\|$$

Level	# Knoten	# Iterationen	Fehler in %
0	197	—	—
1	555	7	0.0046
2	1746	2	0.0017
3	3296	2	0.00066
4	7423	2	0.00034
5	15758	2	0.000148

Tabelle 6.1: Ergebnisse der adaptiven Berechnungen für das Klufnetzwerk

mit einem Sicherheitsfaktor $\sigma = 10^{-2}$ und dem Fehlerindikator η_T aus Abschnitt 4.1.3. Die Iteration auf einem Level wird abgebrochen, wenn

$$\|p_{jk}^\gamma - p_{jk}^{\gamma-1}\| \leq \sigma \text{TOL} \|p_{jk}\|$$

erfüllt ist.

Es zeigt sich, daß vor allem an den Stellen mit großem Gradienten in der Lösung, an Stellen

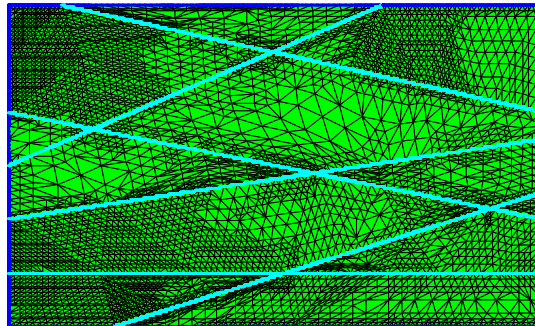


Abbildung 6.9: Trianguliertes Gebiet mit sechs sich schneidenden Klüften nach einer uniformen und drei adaptiven Verfeinerungen

an denen Klüfte auf den Rand treffen und entlang der Klüfte verfeinert wird. In größeren Gesteinsblöcken werden deutlich weniger Elemente eingefügt (siehe Abb. 6.9). Die Zahl der Unbekannten auf einem Level ist deutlich geringer als bei uniformer Verfeinerung: $n_{jk} = 92205$ für $j = k = 5$.