

## 3 Robuste Mehrgittermethoden

Bevor wir in diesem Kapitel eine Diskretisierung mit Finiten Elementen vorstellen und ein robustes Mehrgitterverfahren zur approximativen Lösung des kontinuierlichen Randwertproblems zur Modellierung der Strömung in äquidimensionalen Kluft–Matrix–Systemen entwickeln, führen wir zunächst ein Modellproblem und einige Bezeichnungen ein (Abschnitt 3.1). Wir werden das Rechengebiet mit isotropen Dreiecken und anisotropen Vierecken vernetzen und darauf mit Finiten Elementen 1. Ordnung diskretisieren (siehe Abschnitt 3.2). Um den besonderen Gegebenheiten in geklüftet porösen Medien wie große Skalenunterschiede zwischen Kluft und Matrix und Koeffizientensprüngen am Kluft–Matrix–Übergang Rechnung zu tragen, werden wir zur Lösung des entstehenden Finite–Elemente–Gleichungssystems eine hierarchische Gebietszerlegung durchführen (siehe Abschnitte 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3). Für den Beweis der Stabilität dieser Zerlegung benutzen wir die Transformationsregeln für isoparametrische Finite Elemente (siehe Abschnitt 3.2.2). Auf der hierarchischen Zerlegung werden wir ein Verfahren konstruieren, das in die Klasse der Teilraumkorrekturmethode (siehe Abschnitt 3.4.1, 3.4.2) gehört. Anschließend zeigen wir die robuste Konvergenz dieses Verfahrens für Kluft–Matrix–Systeme (siehe Abschnitt 3.4.2).

### 3.1 Modellproblem und Bezeichnungen

Wie in Abschnitt 2.4 gehen wir davon aus, daß das Gebiet  $\Omega$  polygonal berandet und der Rand  $\partial\Omega$  hinreichend glatt ist. Zusätzlich unterteilen wir das Rechengebiet in die Teilgebiete Kluft und Matrix. Dabei besteht jede der im Rechengebiet verlaufenden  $n_F$  Einzelklüfte  $\Omega_F^i$ ,  $i = 1, \dots, n_F$ , aus den Punkten des  $\mathbb{R}^2$ , die innerhalb des Gesamtgebietes liegen und sich darstellen lassen als Linearkombination aus einem Stützpunkt  $b_F^i \in \mathbb{R}^2$ , der Klufrichtung  $t_F^i$ ,  $|t_F^i| = 1$  und der Normalen auf den Klufrand  $\vec{N}_F^i$ ,  $|\vec{N}_F^i| = 1$  (siehe Abbildung 3.1):

$$\Omega_F^i = \Omega \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x = b_F^i + st_F^i + t\vec{N}_F^i, s \in \mathbb{R}, t \in (0, \varepsilon_F^i) \right\}. \quad (3.1)$$

Dabei bezeichnen wir mit  $\varepsilon_F^i$  die Kluftweite der  $i$ -ten Kluft. Wir nehmen an dieser Stelle an, daß keine der  $n_F$  Klüfte im Gebiet endet. Der Index  $F$  steht für das englische Wort für Klüfte: Fractures.

Für eine oder mehrere Klüfte fassen wir das gesamte Kluftnetzwerk zu dem Teilgebiet  $\Omega_F$  zusammen:

$$\Omega_F = \bigcup_{i=1}^{n_F} \Omega_F^i.$$

Schneiden sich zwei Klüfte, so bezeichnen wir die Schnittmenge (Kreuzung) mit

$$\Omega_c^{ij} = \Omega_F^i \cap \Omega_F^j.$$

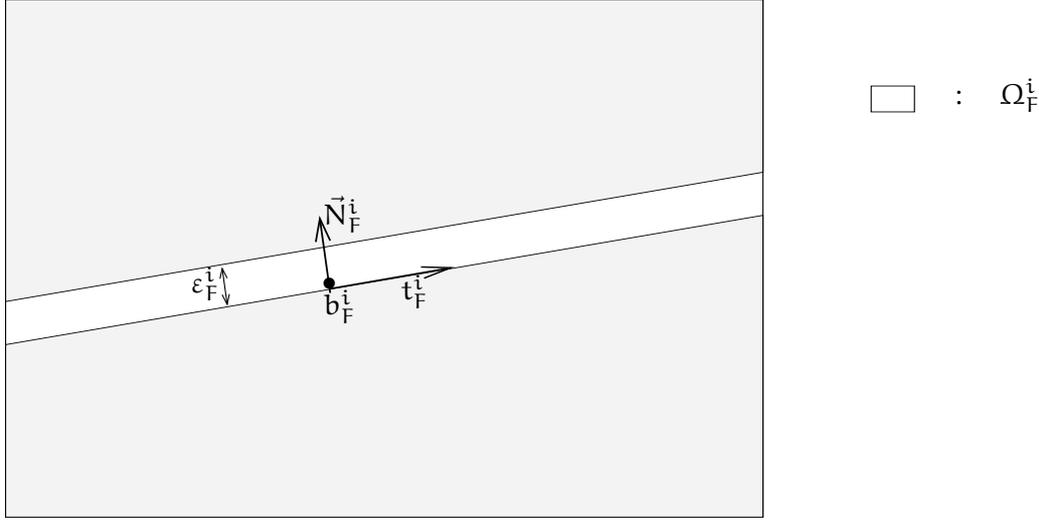


Abbildung 3.1: Einzelklüftung

**Annahme 1:** Wir nehmen an, daß die Kreuzung von zwei Klüften entweder ganz in  $\Omega$  liegt oder die Klüfte sich nicht in  $\Omega$  schneiden:

$$\Omega_c^{ij} \subset \Omega \quad \text{oder} \quad \Omega_c^{ij} = \emptyset.$$

**Annahme 2:** Wir gehen in dieser Arbeit davon aus, daß eine Klüftkreuzung von nicht mehr als zwei Klüften gebildet wird, es gelte

$$\Omega_c^{ijk} = \Omega_F^i \cap \Omega_F^j \cap \Omega_F^k = \emptyset \quad \forall i, j, k = 1, \dots, n_F \quad \text{paarweise verschieden.}$$

Die Behandlung von Kreuzungen aus mehr als zwei Klüften ist mit unserem Ansatz denkbar und stellt ebenso wie die Behandlung von Klüftenden eine mögliche Fortführung dieser Arbeit dar (siehe Kapitel 7). In Abbildung 3.2 ist ein Beispiel-Klüftnetzwerk zu sehen.

Entsprechend den Klüften  $\Omega_F^i$  bezeichnen wir die Gesteinsmatrix ohne die Klüfte mit  $\Omega_M$ :

$$\Omega_M = \Omega \setminus \overline{\Omega_F}.$$

Wir werden den Klüft-Matrix-Übergang gesondert betrachten und bezeichnen daher die Klüfränder zwischen der Gesteinsmatrix und den Klüften (das Interface) mit

$$\Omega_I = \overline{\Omega_M} \cap \overline{\Omega_F}.$$

Damit haben wir das Rechengebiet  $\Omega$  in die Anteile  $\Omega_F$ ,  $\Omega_M$  und  $\Omega_I$  zerlegt:

$$\Omega = \Omega_M \cup \Omega_F \cup \Omega_I.$$

In Abbildung 3.3 ist ein Modellnetzwerk mit  $n_F = 2$  Klüften, die sich in der Klüftkreuzung  $\Omega_c = \Omega_c^{12} \subset \Omega$  im Gebiet schneiden, zu sehen. Die beiden Klüfte haben dieselbe Klüftweite  $\epsilon_F^1 = \epsilon_F^2 =: \epsilon$  und es soll gelten  $|t_F^1 \cdot t_F^2| < 1$ .

Für die nachfolgenden Betrachtungen nehmen wir an, daß der Koeffizient der hydraulischen

Leitfähigkeit  $K = \frac{1}{\eta} \underline{K}_0$  der Variationsformulierung (2.21) in der Matrix eins und in allen Klüften gleich groß ist:

$$K(x) = \begin{cases} k_0 \geq 1, & x \in \overline{\Omega}_F, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Im allgemeinen wird in Kluft-Matrix-Systemen  $k_0 \gg 1$  (bzw. insbesondere  $K(x_M) \ll K(x_F)$ ) für

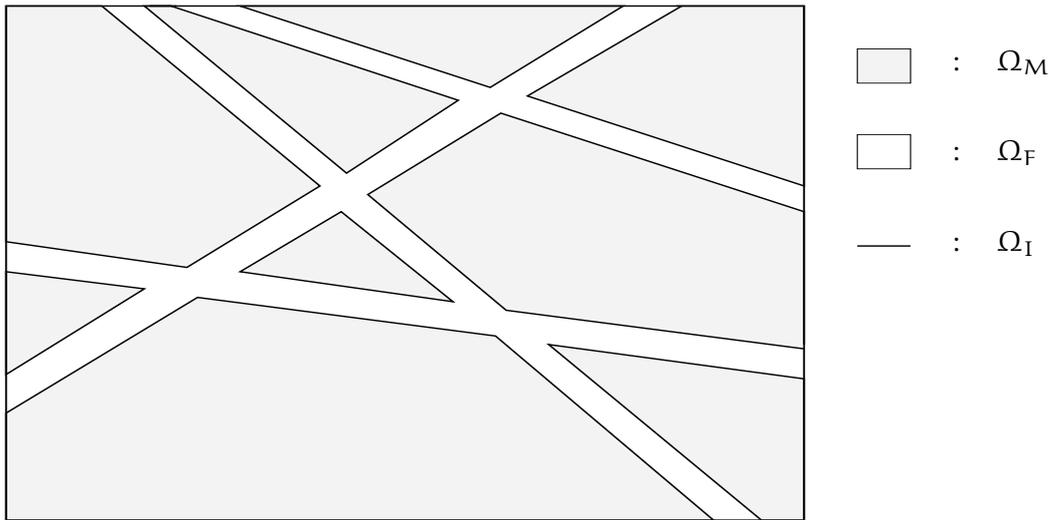


Abbildung 3.2: Kluftnetzwerk

$x_M \in \Omega_M$  und  $x_F \in \Omega_F$ ) gelten. Innerhalb der Gesteinsmatrixblöcke bleibt die hydraulische Leitfähigkeit konstant.

Wir betrachten nun also das Modellproblem

$$u \in H: \quad a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in H$$

mit homogenen Dirichletrandbedingungen  $H = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma_D} = 0\}$ , der Bilinearform

$$a(v, w) = \int_{\Omega} K(x) \nabla v \nabla w \, dx$$

und der rechten Seite  $\ell \in H'$ .

Im folgenden bezeichnet  $\|\cdot\|$  die Energienorm:

$$\|v\| = a(v, v)^{\frac{1}{2}}.$$

## 3.2 Finite-Elemente Diskretisierung

Für die hierarchische Gebietszerlegung (siehe Abschnitt 3.4.2) benötigen wir ein Gitter mit einer speziellen Struktur. Bevor wir die Finite-Elemente Diskretisierung vorstellen, werden

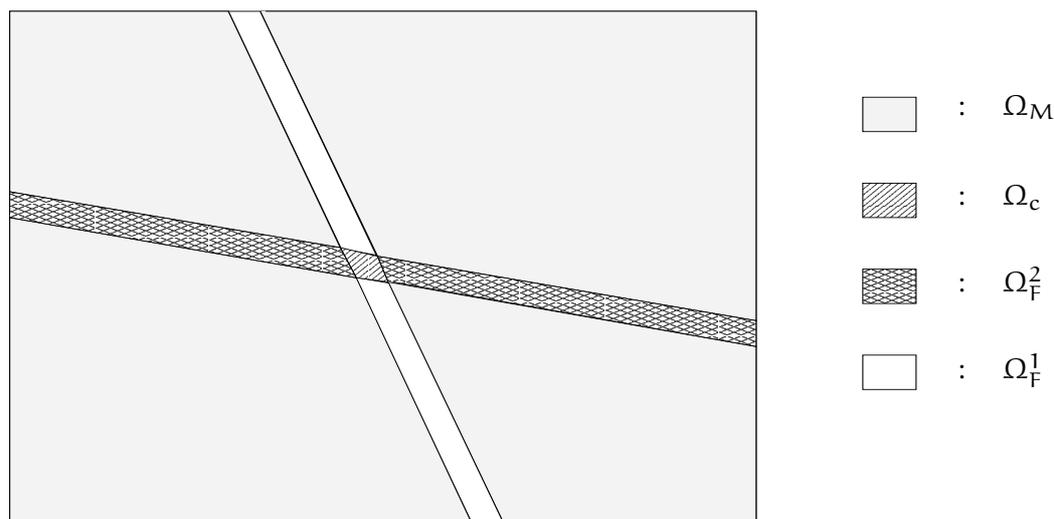


Abbildung 3.3: Kluffkreuzung

wir daher zunächst das Grobgitter und die Gitterverfeinerung, die die besondere Struktur des Gitters erhält, vorstellen. Wir werden den hierarchischen Gebietszerlegungsalgorithmus auf einer Vernetzung mit isoparametrischen Viereckselementen innerhalb der Klüfte aufbauen. Wir geben daher die Transformationsregeln von einem Referenzelement zu einem Finiten Element für diesen Elementtyp an (siehe Abschnitt 3.2.2). Die Diskretisierung mit Finiten Elementen führen wir dann in Abschnitt 3.2.3 durch.

### 3.2.1 Gitterverfeinerung

Zur Konstruktion der endlich-dimensionalen Teilräume  $S_{jk}$  des Lösungsraums  $H$  (siehe Abschnitt 3.2.3) unterteilen wir das Rechengebiet  $\Omega$  in eine Menge einfacherer Gebiete (Elemente). Für unser 2D-Problem zerlegen wir die Gesteinsmatrix  $\Omega_M$  in Dreiecke, diese bilden die Triangulierung  $\mathcal{T}_0$  von  $\Omega_M$ :

$$\overline{\Omega}_M = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_0} T, \quad T \text{ Dreieck} \quad \forall T \in \mathcal{T}_0.$$

Dazu können wenn nötig innere Knoten innerhalb der Gesteinsmatrix eingefügt werden (siehe Abbildung 3.4). Das Kluftsystem  $\Omega_F$  unterteilen wir so in Trapeze oder wenn möglich in Parallelogramme, daß die Trapeze eine Zerlegung  $\mathcal{Q}_0$  von  $\Omega_F$  bilden:

$$\overline{\Omega}_F = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_0} Q, \quad Q \text{ Trapez} \quad \forall Q \in \mathcal{Q}_0.$$

Die Gesamtzerlegung  $\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{Q}_0$  (siehe z.B. Abbildung 3.4) des Gesamtrechngebietes  $\Omega$  muß dabei die folgenden Eigenschaften erfüllen:

- R1)  $\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{Q}_0$  ist konform, d.h. der Schnitt  $T \cap T'$  von zwei Elementen  $T, T'$  ist entweder eine Kante, ein Knoten oder er ist leer für alle  $T, T' \in \mathcal{T}_0 \cup \mathcal{Q}_0$ ,  $T \neq T'$ .

R2) Die Gesamtzerlegung  $\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{Q}_0$  löst den Dirichletrand auf, d.h. für jede Kante  $E$  eines Elementes  $T \in \mathcal{T}_0 \cup \mathcal{Q}_0$  gilt entweder  $E \subset \bar{\Gamma}_D$  oder  $E \cap \Gamma_D = \emptyset$ .

R3) Alle vier Eckpunkte eines Trapezes  $Q \in \mathcal{Q}_0$  liegen in  $\Omega_I$ .

**Folgerung:** Aus R3) folgt  $Q_c := \bar{\Omega}_c \in \mathcal{Q}_0$ .

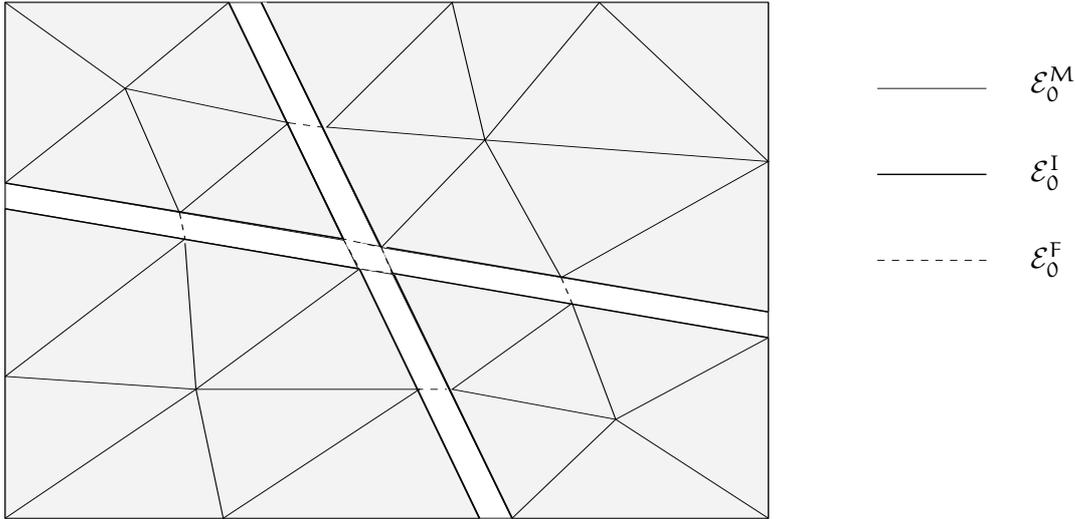


Abbildung 3.4: Ausgangszerlegung  $\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{Q}_0$

Auf der Ausgangszerlegung  $\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{Q}_0$  betrachten wir die folgenden Gruppen von Kanten von Elementen der Zerlegung  $\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{Q}_0$ , dabei bezeichnet  $\mathcal{E}_0$  die Menge aller Kanten von Elementen von  $\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{Q}_0$ :

**Definition 2** Die Kanten auf  $\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{Q}_0$ :

Die Kanten der Kluftelemente:  $\bar{\mathcal{E}}_0^F = \{E \mid E \text{ Kante von } Q \in \mathcal{Q}_0\}$

Die Kanten am Kluft-Matrix-Übergang:  $\mathcal{E}_0^I = \{E \in \mathcal{E}_0 \mid E \in \Omega_I\}$

Die inneren Kluftkanten:  $\mathcal{E}_0^F = \bar{\mathcal{E}}_0^F \setminus \mathcal{E}_0^I$

Die inneren Matrixkanten:  $\mathcal{E}_0^M = \mathcal{E}_0 \setminus \bar{\mathcal{E}}_0^F$

Die Kanten der Kluftkreuzung:  $\mathcal{E}_c = \{E \in \bar{\mathcal{E}}_0^F \mid E = \{p_1, p_2\}, p_1, p_2 \text{ Eckknoten von } Q_c\}$

Aus der Zerlegung  $\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{Q}_0$  erhalten wir feinere Zerlegungen des Rechengebietes, indem wir die Elemente von  $\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{Q}_0$  verfeinern. Wir verfolgen dabei hier eine spezielle Verfeinerungsstrategie, die uns auch auf den feineren Zerlegungen eine eindeutige Unterteilung in Trapeze innerhalb des Kluftsystems  $\Omega_F$  und Dreiecke innerhalb der Gesteinsmatrix  $\Omega_M$  liefert:

a) **Verfeinerung von  $\mathcal{Q}_j$**

Wir halbieren alle Kanten  $E \in \mathcal{E}_0^F$ , das sind gerade die Kanten, die nicht parallel

zur Klufrichtung verlaufen, und verbinden die neuen Knoten. Das entspricht einer anisotropen Verfeinerung parallel zur Klufrichtung (siehe Abbildung 3.6 rechts). Die so aus  $\mathcal{Q}_0$  entstehende Zerlegung des Kluftsystems  $\Omega_F$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{Q}_{01}$ .

Eine  $k$ -malige Halbierung der Kanten, die quer zur Klufrichtung verlaufen, liefert die Zerlegung  $\mathcal{Q}_{0k}$  des Kluftsystems  $\Omega_F$ . In Abbildung 3.5 ist die Zerlegung  $\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{Q}_{02}$  nach zweimaliger anisotroper Verfeinerung des Kluftsystems  $\Omega_F$  dargestellt. Diese Art der Verfeinerung des Kluftsystems liefert keine neuen Kanten oder Knoten am Kluft-Matrix-Übergang: für alle neuen Kanten  $E$  gilt  $E \cap \bar{\Omega}_M = \emptyset$ .

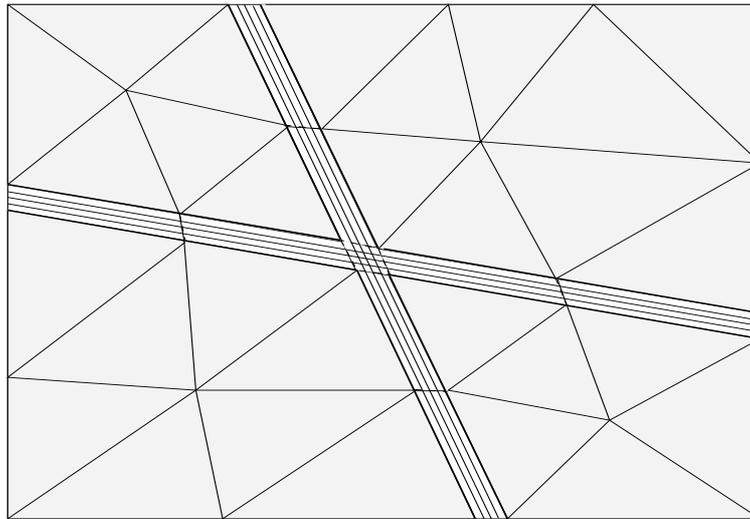


Abbildung 3.5: Gitter nach zweimaliger anisotroper Verfeinerung in der Kluft  $\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{Q}_{02}$

**b) Uniforme Verfeinerung von  $\mathcal{T}_j$  mit anisotropem Abschluß in  $\mathcal{Q}_{jk}$**

Ausgehend von der Zerlegung  $\mathcal{T}_0$  der Gesteinsmatrix  $\Omega_M$  und einer Zerlegung  $\mathcal{Q}_{0k}$  des Kluftsystems  $\Omega_F$  liefert die Halbierung aller Kanten  $E$  aus  $\bar{\mathcal{E}}_0^M$  und die Verbindung der neuen Knoten die Zerlegung des Gesamtgebietes  $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{Q}_{1k}$ . Dabei werden die Dreiecke der Zerlegung  $\mathcal{T}_0$  der Gesteinsmatrix rot in jeweils vier kleinere Dreiecke (siehe Abbildung 3.7) und die Vierecke der Zerlegung  $\mathcal{Q}_{0k}$  des Kluftsystems  $\Omega_F$  quer zur Klufrichtung (siehe Abb. 3.6 links) in zwei kleinere Vierecke zerlegt.

Eine  $j$ -malige Anwendung dieser Verfeinerung liefert die Zerlegung  $\mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{jk}$  des Gesamtgebietes  $\Omega$ . In Abbildung 3.9 ist die Zerlegung  $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{Q}_{12}$  dargestellt.

Eine Zerlegung  $\mathcal{T}_j$  kann in analoger Weise adaptiv verfeinert werden (siehe Abbildung 3.10). Dazu werden über geeignet geschätzte lokale Elementfehler einzelne Elemente von  $\mathcal{T}_j$  zur Verfeinerung ausgewählt und rot verfeinert. Anschließend werden die an verfeinerten Elementen anliegenden nicht verfeinerten Elemente  $T \in \mathcal{T}_j$  grün verfeinert (siehe Abbildung 3.8), um hängende Knoten zu vermeiden. Falls das rot verfeinerte Element an einer Kluft anliegt, wird die auf der anderen Seite der Kluft gegenüberliegende Klufrandseite

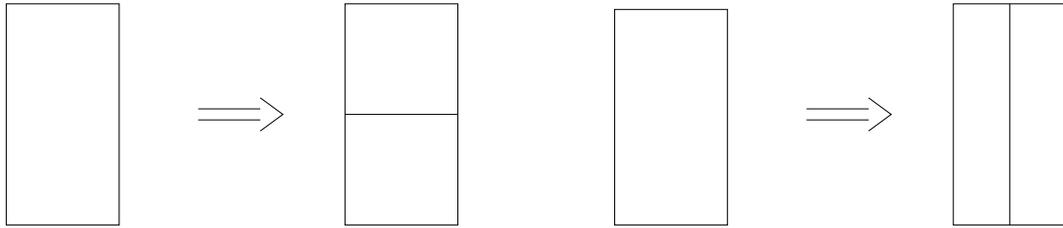


Abbildung 3.6: Anisotrope Verfeinerung eines Vierecks

ebenfalls geteilt, die neuen Knoten auf gegenüberliegenden Klufrändern verbunden und so quer zur Klufrichtung alle Elemente über die Kluft verfeinert. Anschließend wird das gegenüberliegende Matrixelement grün abgeschlossen (siehe Abb. 3.10). Auch für die Viereckselemente sind grüne Abschlüsse möglich, wir verwenden sie in der vorliegenden Arbeit nicht, um die vorgegebene Struktur der Zerlegungen  $\mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{jk}$  mit Dreiecken in der Matrix und Vierecken in der Kluft zu erhalten. Wie die lokalen Elementfehler auf den einzelnen Elementen geschätzt werden wird in Kapitel 4 erläutert. Dort werden geeignete Fehlerschätzer für die isotropen Dreieckselemente der Gesteinsmatrix und die anisotropen Elemente der Kluft vorgestellt.

Innerhalb der Kluft entspricht eine anisotrope Verfeinerung parallel zur Klufrichtung und

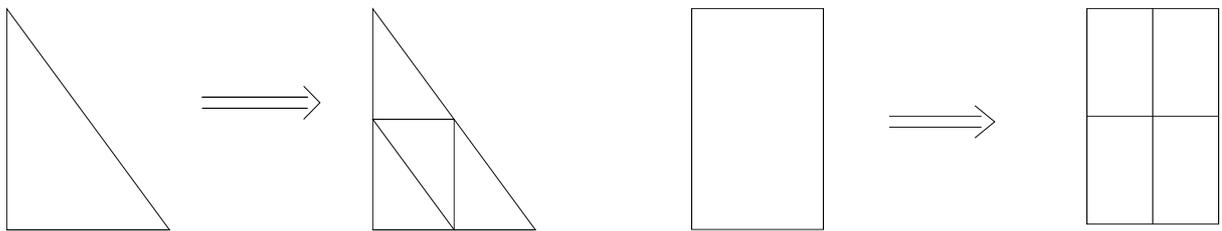


Abbildung 3.7: Rote Verfeinerung eines Dreiecks (links) und eines Vierecks (rechts)

eine anisotrope Verfeinerung quer zur Klufrichtung einer uniformen Verfeinerung. Die Zerlegung  $\mathcal{Q}_{11}$  entspricht also der uniformen Verfeinerung von  $\mathcal{Q}_{00}$ .

**Bemerkung:** Die Reihenfolge der Verfeinerungsschritte a) und b) kann vertauscht werden.

Entsprechend den Mengen von Kanten auf der Ausgangszerlegung  $\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{Q}_0$  betrachten wir auf den feineren Zerlegungen  $\mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{jk}$  von  $\Omega$  die folgenden Mengen von Kanten:

**Definition 3** Die Kanten auf  $\mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{jk}$ :

Die Gesamtmenge der Kanten einer Zerlegung:  $\mathcal{E}_{jk} = \{E \mid E \text{ Kante von } T \in \mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{jk}\}$

Die Kanten des Kluftsystems:  $\bar{\mathcal{E}}_{jk}^F = \{E \in \mathcal{E}_{jk} \mid E \text{ Kante von } Q \in \mathcal{Q}_{jk}\}$

Die inneren Klufrandkanten  $\mathcal{E}_{jk}^F = \bar{\mathcal{E}}_{jk}^F \setminus \mathcal{E}_j^I$

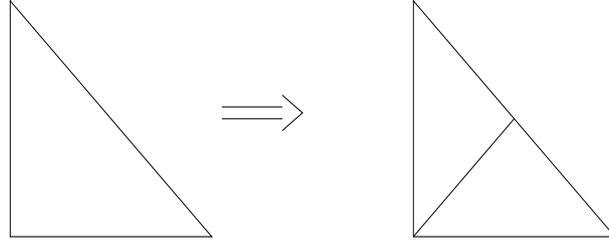


Abbildung 3.8: Grüne Verfeinerung eines Dreiecks

Die Kanten am Kluft–Matrix–Übergang:  $\mathcal{E}_j^I = \{E \in \mathcal{E}_{jk} \mid E \subset \Omega_I\}$

Die Kanten der Gesteinsmatrix:  $\mathcal{E}_j^M = \mathcal{E}_{jk} \setminus \overline{\mathcal{E}}_{jk}^F$  und  $\overline{\mathcal{E}}_j^M = \mathcal{E}_j^M \cup \mathcal{E}_j^I$

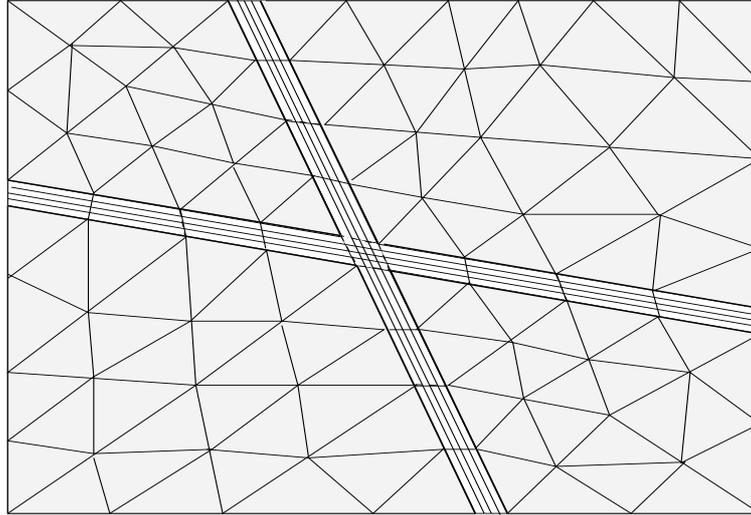


Abbildung 3.9: Gitter nach zweimaliger anisotroper Verfeinerung in der Kluft und einmaliger uniformer Verfeinerung in der Matrix  $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{Q}_{12}$

Ebenso wie bei den Kanten unterteilen wir die Menge der Knoten einer Zerlegung  $\mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{jk}$  in die folgenden Gruppen:

**Definition 4** Für die Knoten auf  $\mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{jk}$  setzen wir:

Die Gesamtmenge der Knoten:  $\mathcal{N}_{jk} = \{p \mid p \text{ Eckpunkt von } T \in \mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{jk}, p \notin \overline{\Gamma}_D\}$

Die Menge der Matrixknoten:  $\mathcal{N}_j^M = \mathcal{N}_{jk} \cap \Omega_M$

Die Menge der Kluftknoten:  $\mathcal{N}_{jk}^F = \mathcal{N}_{jk} \cap \Omega_F$

Die Menge der Interfaceknoten:  $\mathcal{N}_j^I = \mathcal{N}_{jk} \cap \Omega_I$

Die Menge der Matrixknoten und der Kluft–Matrix–Übergangsknoten:  $\mathcal{N}_j^{\overline{M}} = \mathcal{N}_j^M \cup \mathcal{N}_j^I$

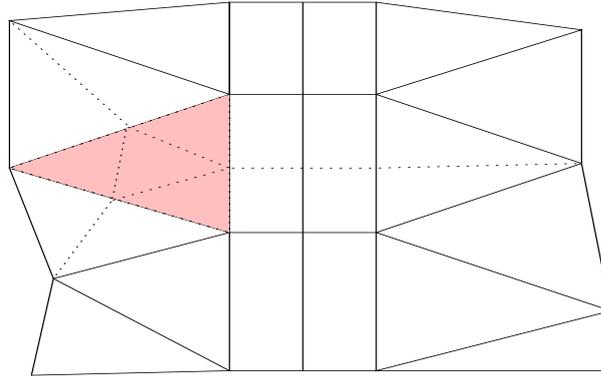


Abbildung 3.10: Adaptive Verfeinerung am Kluft-Matrix-Übergang, ein markiertes Matrix-Element

**Bemerkung:** Die Bezeichnungswise wird dadurch gerechtfertigt, daß die Menge der Gesteinsmatrixknoten  $\mathcal{N}_{jk} \cap \Omega_M$  und der Interfaceknoten  $\mathcal{N}_{jk} \cap \Omega_I$  nicht von  $k$  abhängen. Die Mengen  $\mathcal{N}_j^M, \mathcal{N}_j^I$  und  $\mathcal{N}_{jk}^F$  sind paarweise disjunkt und es gilt

$$\mathcal{N}_{jk} = \mathcal{N}_j^M \cup \mathcal{N}_j^I \cup \mathcal{N}_{jk}^F.$$

### 3.2.2 Transformationsregeln

Wir werden die Klüfte mit Vierecken vernetzen (siehe Abschnitt 3.2.3). Diese werden bei Kluft-Matrix-Systemen im allgemeinen anisotrop sein. Die in den Klüften verwendeten anisotropen Elemente sind Parallelogramme oder allgemeiner Trapeze. Die Trapeze gehören in die Klasse der isoparametrischen Finiten Elemente. Die Transformation eines anisotropen Trapezes auf ein Referenzviereck, in diesem Fall ein Rechteck ( $Q_0$ , siehe Abb. 3.11 links), ist zentraler Bestandteil des Konvergenzbeweises des in den folgenden Abschnitten vorgestellten hierarchischen Gebietszerlegungsverfahrens. Wir geben daher im folgenden die Transformationsregeln von einem Referenzrechteck zu einem isoparametrischen in unserem Fall anisotropen Trapez an (siehe dazu auch Braess [15][S.111ff] und Ciarlet [19][S.229f]).

Wir skalieren zunächst das Referenzrechteck  $Q_0$  mit den Kantenlängen 1 und  $\varepsilon_0$  mit  $1 \geq \varepsilon_0$

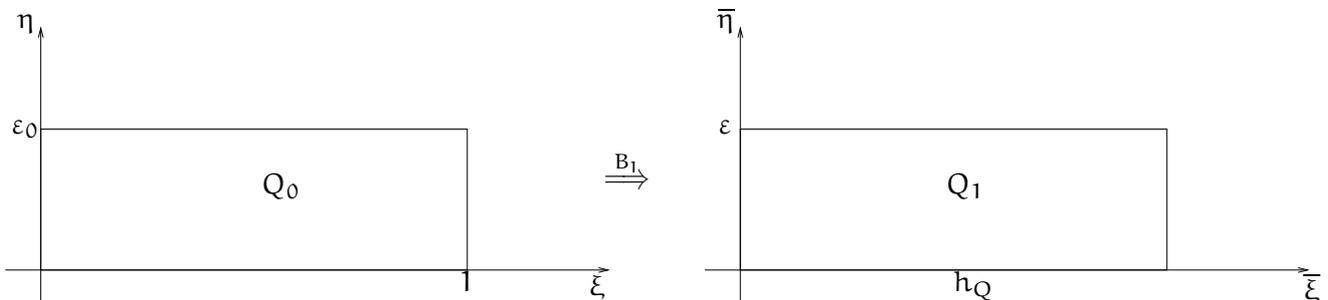


Abbildung 3.11: Skalierung

auf ein Rechteck mit der Kantenlänge  $h_Q$  und  $\varepsilon$ . Es gilt  $h_Q \geq \varepsilon$ . Wäre dies nicht der Fall, so

würde in den Klüften die Anisotropie quer zur Kluftrichtung auftreten. Für diesen Fall ist das in Abschnitt 3.4.2 konstruierte Verfahren nicht geeignet. Die dabei auftretenden Schwierigkeiten werden in Abschnitt 3.3 erläutert.

Mit der Abbildung

$$B_1 = \begin{pmatrix} h_Q & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \end{pmatrix}$$

gilt

$$B_1 Q_0 = Q_1,$$

d.h.  $Q_1 = \{(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \mid \exists (\xi, \eta) \in Q_0 \text{ mit } B(\xi, \eta)^T = (\bar{\xi}, \bar{\eta})^T\}$ . Offenbar ist

$$\begin{aligned} \|B_1\| &= \max \left\{ h_Q, \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right\}, \\ \|B_1^{-1}\| &= \max \left\{ h_Q^{-1}, \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right\}, \\ \det B_1 &= h_Q \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \\ \det B_1^{-1} &= h_Q^{-1} \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Es gilt:

$$|\det B_1| \|B_1^{-1}\|^2 = \max \left\{ \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 h_Q}, h_Q \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right\} = \max \left\{ h_Q \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 h_Q} \right\} = |\det B_1^{-1}| \|B_1\|^2.$$

Für die Transformation des Rechtecks  $Q_1$  auf ein Trapez  $Q_2$  mit der Grundseite  $h_Q$ , dem

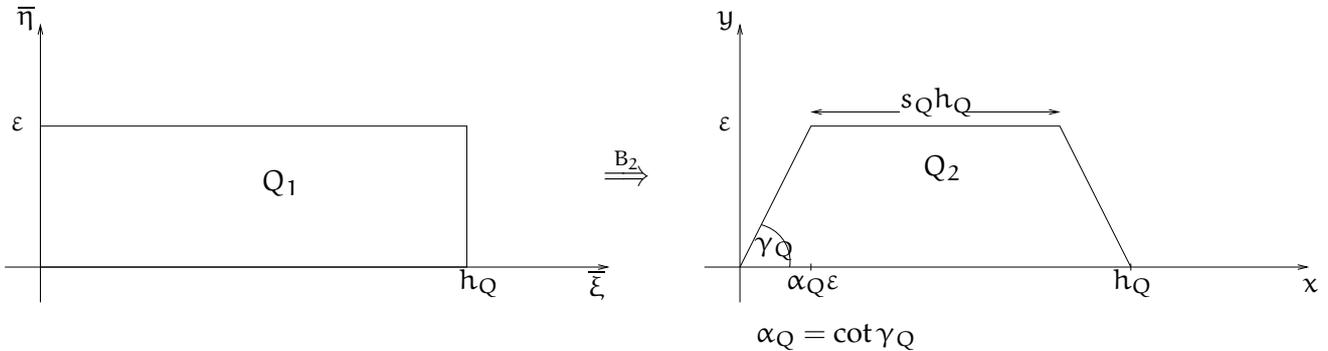


Abbildung 3.12: Bilineare Transformation eines Referenzrechtecks auf ein Trapez

Winkel  $\gamma_Q$  und der zu  $h_Q$  parallelen Seite  $s_Q h_Q$  (siehe Abbildung 3.12) betrachten wir die Abbildung

$$B_2(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = (x, y) \quad B_2(Q_1) = Q_2$$

mit dem bilinearen Ansatz

$$\begin{aligned} x(\bar{\xi}, \bar{\eta}) &= a\bar{\xi} + b\bar{\eta} + c\bar{\xi}\bar{\eta} \\ y(\bar{\xi}, \bar{\eta}) &= \bar{a}\bar{\xi} + \bar{b}\bar{\eta} + \bar{c}\bar{\xi}\bar{\eta}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir mit den Bildern der Eckpunkte von  $Q_1$ :

$$\begin{aligned}(h_Q, 0) &\mapsto (h_Q, 0) \\ h_Q &= ah_Q + 0 = ah_Q \Rightarrow a = 1 \\ 0 &= \bar{a}h_Q + 0 = \bar{a}h_Q \Rightarrow \bar{a} = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(0, \varepsilon) &\mapsto (\alpha_Q \varepsilon, \varepsilon) \\ \alpha_Q \varepsilon &= a0 + b\varepsilon + c0 = b\varepsilon \Rightarrow b = \alpha_Q \\ \varepsilon &= \bar{a}0 + \bar{b}\varepsilon + \bar{c}0 = \bar{b}\varepsilon \Rightarrow \bar{b} = 1\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(h_Q, \varepsilon) &\mapsto (\alpha_Q \varepsilon + s_Q h_Q, \varepsilon) \\ \alpha_Q \varepsilon + s_Q h_Q &= h_Q + \alpha_Q \varepsilon + c h_Q \varepsilon \Rightarrow c = \frac{s_Q - 1}{\varepsilon} \\ \varepsilon &= \varepsilon + \bar{c} h_Q \varepsilon \Rightarrow \bar{c} = 0\end{aligned}$$

die Transformation

$$\begin{aligned}x(\bar{\xi}, \bar{\eta}) &= \bar{\xi} + \alpha_Q \bar{\eta} + \frac{s_Q - 1}{\varepsilon} \bar{\xi} \bar{\eta} \\ y(\bar{\xi}, \bar{\eta}) &= \bar{\eta}.\end{aligned}$$

Setzt man nun für bilineare Funktionen  $v$  auf  $Q_2$

$$\hat{v}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = v(x, y)$$

dann ist  $\hat{v} = B_2^{-1} \circ v$  und es gilt

$$\begin{aligned}\hat{v}_{\bar{\xi}} &= v_x x_{\bar{\xi}} + v_y y_{\bar{\xi}} = v_x \left(1 + \frac{s_Q - 1}{\varepsilon} \bar{\eta}\right) + v_y 0 \\ \hat{v}_{\bar{\eta}} &= v_x x_{\bar{\eta}} + v_y y_{\bar{\eta}} = v_x \left(\alpha_Q + \frac{s_Q - 1}{\varepsilon} \bar{\xi}\right) + v_y 1.\end{aligned}$$

Zusammen folgt

$$\nabla_{(\bar{\xi}, \bar{\eta})} \hat{v}^T = A(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \nabla v^T$$

mit der Matrix

$$A(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{s_Q - 1}{\varepsilon} \bar{\eta} & 0 \\ \alpha_Q + \frac{s_Q - 1}{\varepsilon} \bar{\xi} & 1 \end{pmatrix}.$$

Aus

$$\|x\|_{\infty} \leq \|x\| \leq \sqrt{2} \|x\|_{\infty}$$

folgt

$$\|A(\bar{\xi}, \bar{\eta})\|_2 \leq \sqrt{2} \|A(\bar{\xi}, \bar{\eta})\|_{\infty}.$$

Die Beschränktheit von  $\|A(\bar{\xi}, \bar{\eta})\|_2$  folgt also aus der Beschränktheit der Koeffizienten von  $A(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ :

$$\begin{aligned} \left| 1 + \frac{s_Q - 1}{\varepsilon} \bar{\eta} \right| &\leq 1 + \frac{1 - s_Q}{\varepsilon} \varepsilon \\ \left| \alpha_Q + \frac{s_Q - 1}{\varepsilon} \bar{\xi} \right| &\leq |\alpha_Q| + (1 - s_Q) \frac{h_Q}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Die in den Anwendungen auftretenden Trapeze sind immer fast Parallelogramme, d.h. sie weichen nur wenig von der Parallelogrammstruktur ab. Wir werden später sehen (siehe Kapitel 6), daß diese Voraussetzung entscheidend für die Konvergenz des hierarchischen Verfahrens aus Abschnitt 3.4.2 ist. Wir setzen daher für die Trapeze im folgenden zwei Form-Regularitäten und eine Stabilitätsbedingung voraus.

Die **Form-Regularität I** beschränkt den Winkel  $\gamma_Q$  des Trapezes  $Q_2$  von 0 und  $\pi$  weg:

$$0 < \underline{\gamma} \leq \gamma_Q \leq \bar{\gamma} < \pi.$$

Daraus folgt, daß auch  $\alpha_Q$  beschränkt ist:

$$|\alpha_Q| \leq \max \{ |\cot \underline{\gamma}|, \cot \bar{\gamma} \} =: c(\underline{\gamma}, \bar{\gamma}).$$

Die **Stabilitätsbedingung** beschränkt die Differenz der Längen der parallelen Kanten von  $Q_2$  in Abhängigkeit von  $\varepsilon$ :

$$1 - s_Q \leq s_1 \frac{\varepsilon}{h_Q}.$$

Dies impliziert

$$(1 - s_Q) \frac{h_Q}{\varepsilon} \leq s_1.$$

Insgesamt erhält man

$$\|A(\bar{\xi}, \bar{\eta})\| \leq c(\underline{\gamma}, \bar{\gamma}, s_1)$$

und die Inverse

$$A^{-1}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \frac{1}{\det A(\bar{\xi}, \bar{\eta})} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\alpha_Q \frac{s_Q - 1}{\varepsilon} \bar{\xi}) & 1 + \frac{s_Q - 1}{\varepsilon} \bar{\eta} \end{pmatrix}$$

mit

$$\det A(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = 1 + \frac{s_Q - 1}{\varepsilon} \bar{\eta}.$$

Es gilt offenbar

$$s_Q \leq \det A(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \leq 1.$$

Dabei gibt die **Form-Regularität II** an, daß die Länge der zu  $h_Q$  parallelen Seite von der Null weg beschränkt ist:

$$0 \leq \underline{s} \leq s_Q.$$

Wir erhalten so insgesamt

$$\|A^{-1}(\bar{\xi}, \bar{\eta})\| \leq c(\underline{\gamma}, \bar{\gamma}, s_1, \underline{s})$$

und die Determinanten

$$\begin{aligned} |\det A(\bar{\xi}, \bar{\eta})| &\leq 1 \\ |\det A^{-1}(\bar{\xi}, \bar{\eta})| &\leq \frac{1}{\underline{s}}. \end{aligned}$$

Vom Trapez  $Q_2$  zum Finiten Element  $Q$  kommen wir nun mit einer Drehung und Verschiebung

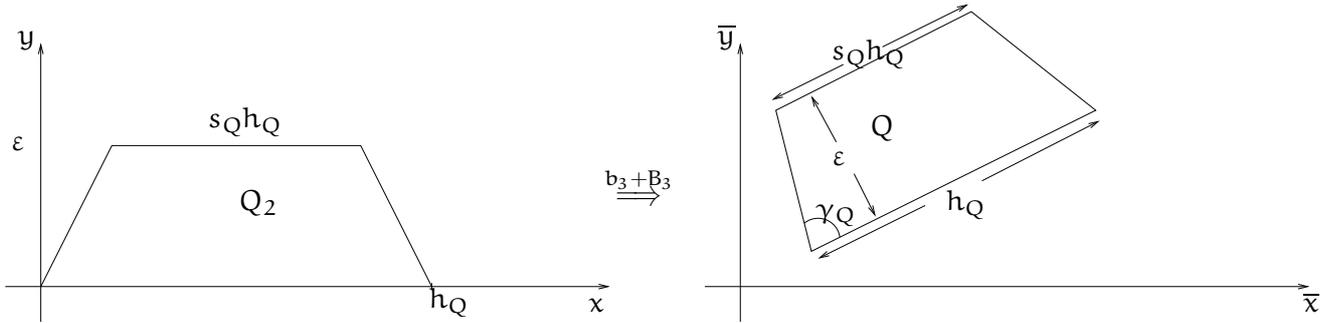


Abbildung 3.13: Vom Trapez zum Finiten Element

(siehe Abbildung 3.13). Offenbar gilt mit  $b_3 \in \mathbb{R}^2$  und  $B_3 \in \mathbb{R}^{2,2}$  unitär

$$\begin{aligned} \|B_3\| &= \|B_3^{-1}\| = 1 \\ \det B_3 &= \det B_3^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Dabei ist  $B_3$  eindeutig bestimmt. Wir setzen nun die Ergebnisse der vorangegangenen Überlegungen zusammen und erhalten so die bilineare Transformation vom Referenzrechteck auf ein Finites Element:

$$F_Q(\xi, \eta) = b_3 + B_3 B_2 \left( B_1 \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right). \quad (3.3)$$

Für diese bilineare Transformation gilt:

**Satz 3** Die in (3.3) definierte Abbildung  $F_Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist bijektiv und affin bilinear. Weiter gilt

$$F_Q(Q_0) = Q.$$

**Beweis:**

$B_1$  ist Diagonalmatrix und  $B_2$  ist bilinear. Daher ist  $B_2(B_1)$  bilinear.  $B_3$  ist linear. Daher ist  $B_3 B_2(B_1)$  bilinear. Der Rest der Aussage des Satzes folgt nach Konstruktion.  $\square$

**Satz 4** Es sei

$$A_Q(\xi, \eta) = DF_Q(\xi, \eta).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |\det A_Q| \|A_Q^{-1}\|_2^2 &\leq c(\underline{\gamma}, \bar{\gamma}, \underline{s}, s_1) \max \left\{ \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 h_Q}, \frac{\varepsilon_0 h_Q}{\varepsilon} \right\} \\ |\det A_Q^{-1}| \|A_Q\|_2^2 &\leq c(\underline{\gamma}, \bar{\gamma}, \underline{s}, s_1) \max \left\{ \frac{\varepsilon_0 h_Q}{\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 h_Q} \right\}. \end{aligned}$$

**Beweis:**

Es gilt nach der Kettenregel

$$A_Q = B_3 A B_1$$

und daher

$$\begin{aligned} |\det A_Q| &= |\det B_3| |\det A| |\det B_1| \leq h_Q \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \\ |\det A_Q^{-1}| &\leq \frac{1}{\underline{s}} h_Q^{-1} \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \|A_Q\|_2 &\leq \|B_3\|_2 \|A\|_2 \|B_1\|_2 \leq 1 c(\underline{\gamma}, \bar{\gamma}, s_1) \max \left\{ h_Q, \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right\} \\ \|A_Q^{-1}\|_2 &\leq \|B_1^{-1}\|_2 \|A^{-1}\|_2 \|B_3^{-1}\|_2 \leq 1 c(\underline{\gamma}, \bar{\gamma}, \underline{s}, s_1) \max \left\{ h_Q^{-1}, \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right\}. \end{aligned}$$

□

Daraus ergibt sich das folgende Korollar:

**Korollar 1** a) Im Falle  $\varepsilon_0 = 1$  gilt:

$$\begin{aligned} |\det A_Q| \|A_Q^{-1}\|_2^2 &\leq c \max \left\{ \frac{\varepsilon}{h_Q}, \frac{h_Q}{\varepsilon} \right\} \leq s_2 \\ |\det A_Q^{-1}| \|A_Q\|_2^2 &\leq c \max \left\{ \frac{h_Q}{\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{h_Q} \right\} \leq s_2 \end{aligned}$$

falls

$$\frac{1}{s_2} h_Q \leq \varepsilon \leq s_2 h_Q.$$

b) Im Falle  $\varepsilon_0 = \varepsilon_Q = \frac{\varepsilon}{h_Q}$  gilt

$$\begin{aligned} |\det A_Q| \|A_Q^{-1}\|_2^2 &\leq c(\underline{\gamma}, \bar{\gamma}, \underline{s}, s_1) \\ |\det A_Q^{-1}| \|A_Q\|_2^2 &\leq c(\underline{\gamma}, \bar{\gamma}, \underline{s}, s_1). \end{aligned}$$

Achtung: Es gilt auch:

$$\varepsilon_Q \leq s_2 \iff \varepsilon \leq s_2 h_Q.$$

### 3.2.3 Diskretisierung und Fehlerabschätzung

Nachdem wir in Kapitel 2 eine lineare partielle Differentialgleichung zur Beschreibung der stationären Strömung in geklüftet porösen Medien gefunden haben, wollen wir nun daran gehen, das kontinuierliche Problem in der Variationsformulierung (2.20) durch diskrete Probleme zu approximieren. Dieser Abschnitt dient der Vorstellung der verwendeten Finite Elemente Diskretisierung.

Das allgemeine Galerkin-Verfahren approximiert die Lösung des Variationsproblems (2.20) in einem endlich dimensionalen Teilraum  $\mathcal{S}_j$  von  $H$

$$p_j \in \mathcal{S}_j : \quad a(p_j, v_j) = \ell(v_j) \quad \forall v_j \in \mathcal{S}_j. \quad (3.4)$$

Mit der Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  und dem Funktional  $\ell$  aus (2.21) liefern wieder das Lemma von Lax-Milgram (Lemma 1) und der daraus folgende Satz 2 die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung des diskreten Problems (3.4). Da es sich in unserem Fall um eine symmetrische Bilinearform handelt, wird das Verfahren auch als Ritz-Galerkin-Verfahren bezeichnet. Die Matrix des dabei entstehenden Gleichungssystems ist im allgemeinen voll besetzt. Die Idee der Finiten Elemente ist es, eine spezielle Basis des endlich dimensionalen Teilraums zu wählen, so daß die Matrix möglichst schwach besetzt ist.

Generell betrachten wir nicht nur eine Galerkinapproximation der kontinuierlichen Lösung, sondern wir betrachten eine Folge  $(\mathcal{S}_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$  endlich dimensionaler Unterräume  $\mathcal{S}_j \subset H$  mit

$$\overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{S}_j} = H.$$

Der Abschluß ist bezüglich der Sobolev-Norm  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  zu verstehen, mit der Eigenschaft, daß die Lösung  $p_j$  der diskreten Probleme (3.4) für  $j \rightarrow \infty$  gegen die kontinuierliche Lösung  $p$  des kontinuierlichen Variationsproblems (2.20) konvergiert.

Die Räume  $\mathcal{S}_j$  werden von linear unabhängigen Funktionen  $\lambda_q^j \in H$  aufgespannt

$$\mathcal{S}_j = \text{span}\{\lambda_q^j \mid q \in \mathcal{N}_j\},$$

wobei  $q \in \mathcal{N}_j$  und  $\mathcal{N}_j$  eine geeignete Indexmenge mit  $n^j = \#\mathcal{N}_j < \infty$  Elementen ist.

Weiterhin nehmen wir an, daß die Basisfunktionen  $\lambda_q^j$  beschränkt sind und einen kompakten Träger haben.

Wir wählen nun für die lokalen Ansatzfunktionen auf dem Referenzdreieck für Elemente aus  $\mathcal{T}_j$  lineare bzw. auf dem Referenzelement für Elemente aus  $\mathcal{Q}_{jk}$  bilineare Funktionen.

#### Definition 5 (lokale Ansatzfunktionen)

Es sei  $Q_0 = (0, 1) \times (0, \varepsilon_0)$  und  $\Pi_{11} = \{p \mid p(\xi, \eta) = a\xi + b\eta + c\xi\eta; a, b, c \in \mathbb{R}\}$  der lineare Raum der bilinearen Funktionen auf  $Q_0$ ,  $Q \in \mathcal{Q}_{jk}$  und  $F_Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die affin bilineare, bijektive Abbildung mit  $F_Q(Q_0) = Q$ .

Dann sei

$$\Pi_{11}(Q) := \left\{ \hat{v} : Q \rightarrow \mathbb{R} \mid \hat{v} = v(F_Q^{-1}(\cdot)) \in \Pi_{11}(Q_0) \right\}$$

und

$$\Pi_1 = \left\{ v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid v(x, y) = ax + by; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

So erhalten wir für jede Zerlegung  $\mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{jk}$  den Ansatzraum:

#### Definition 6 (Ansatzraum)

Gegeben sei die Zerlegung  $\mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{jk}$  von  $\Omega$ . Wir setzen

$$\mathcal{S}_{jk} = \left\{ v \in C(\overline{\Omega}) \mid v|_T \in \Pi_1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_j, \quad v|_Q \in \Pi_{11}(Q) \quad \forall Q \in \mathcal{Q}_{jk}, \quad v|_{\Gamma_D} = 0 \right\}. \quad (3.5)$$

Mit diesen Finite-Elemente-Ansatzräumen haben wir nun für die Zerlegung  $\mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{jk}$  das diskrete Problem

$$p_{jk} \in \mathcal{S}_{jk} : \quad \mathbf{a}(p_{jk}, v) = \mathbf{l}(v) \quad \forall v \in \mathcal{S}_{jk}. \quad (3.6)$$

zu lösen.

Wir bezeichnen mit der Knotenbasisfunktion  $\lambda_q^{jk}$  gerade die Funktion, die im Knoten  $q \in \mathcal{N}_{jk}$  den Wert 1 hat und an allen anderen Knoten aus  $\mathcal{N}_{jk}$  verschwindet. Es sei  $n^{jk} = \#\mathcal{N}_{jk}$  die Anzahl der Knoten von  $\mathcal{S}_{jk}$ . Mit der Basis  $\lambda_i^{jk}$  von  $\mathcal{S}_{jk}$  führt der Ansatz

$$p_{jk} = \sum_{q \in \mathcal{N}_{jk}} p_q^{jk} \lambda_q^{jk} \quad (3.7)$$

auf das zu lösende Gleichungssystem

$$\sum_{q \in \mathcal{N}_{jk}} \mathbf{a}(\lambda_q, \lambda_l) p_q^{jk} = \ell(\lambda_l), \quad l = 1, 2, \dots, n^{jk}, \quad (3.8)$$

das wir mit  $A_{lq} := \mathbf{a}(\lambda_q, \lambda_l)$  und  $b_q := \ell(\lambda_q)$  in Matrix – Vektor – Form

$$AP = b \quad (3.9)$$

mit der Steifigkeitsmatrix  $A$  und der rechten Seite  $b$  schreiben können.

Die Finite Elemente Lösung  $p_{jk}$  ist bezüglich der Energienorm die Bestapproximation in dem Finite Elemente Raum  $\mathcal{S}_{jk}$ :

**Lemma 2 (Céa-Lemma)** *Die Bilinearform  $\mathbf{a}$  sei  $V$ -elliptisch. Ferner seien  $p$  bzw.  $p_{jk}$  die Lösungen der Variationsaufgabe in  $H$  bzw.  $\mathcal{S}_{jk} \subset H$ . Dann ist*

$$\|p - p_{jk}\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\Gamma}{\gamma} \inf_{v \in \mathcal{S}_{jk}} \|p - v\|_{H^1(\Omega)}$$

Für den Beweis verweisen wir auf Braess [15][S.53] oder Brenner und Scott [18][S.62].

Das Céa-Lemma besagt, daß der Diskretisierungsfehler  $\|p - p_{jk}\|_{H^1(\Omega)}$  durch den Approximationsfehler abgeschätzt werden kann. Nach diesem Lemma ist die Genauigkeit der Lösung wesentlich von der Wahl der Funktionenräume  $\mathcal{S}_{jk}$  abhängig. Wie gut eine Approximation der Lösung mit Polynomen möglich ist, hängt wiederum davon ab, wie glatt die kontinuierliche Lösung ist.

Wir definieren

$$I_{jk} : H \rightarrow \mathcal{S}_{jk} \quad I_{jk}v \in \mathcal{S}_{jk} : \quad I_{jk}v(x_q) = v(x_q) \quad \forall q \in \mathcal{N}_{jk}$$

als Interpolationsoperator auf  $H$ .

Bei voller Regularität der Lösung, also  $H = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\partial\Omega)$  und einer Zerlegung des Gebietes  $\Omega_M$  in Dreiecke in der Matrix erhalten wir durch Abschätzung auf dem Referenzelement, mit der entsprechenden Transformationsformel und Summation über die Dreiecke die Abschätzung

$$\|p - I_{jk}p\|_{H^1(\Omega_M)} \leq c h |p|_{H^2(\Omega_M)}$$

(siehe z.B. Braess [15][S.72ff]). Für isoparametrische anisotrope Viereckselemente zeigt Apel [5] unter Regularitätsvoraussetzungen an die Elemente (z.B. anisotrope Rechteckselemente) für  $p \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\partial\Omega)$  die Abschätzung

$$\|p - I_{jk}p\|_{H^1(Q)}^2 \leq c \left( h_1^2 \|\partial_x p\|_{H^1(Q)}^2 + h_2^2 \|\partial_y p\|_{H^1(Q)}^2 \right) \quad (3.10)$$

mit der speziellen  $H^1$ -Halbnorm  $|v|^2 := \sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} |D^{\alpha}v|^2 dx$ .

Für isoparametrische anisotrope Trapeze erwarten wir nach den Transformationssätzen aus Abschnitt 3.2.2 eine Abhängigkeit der Konstanten in (3.10) von der Kluftbreite bzw. der Größe der Abweichung der Trapeze von Parallelogrammen  $c = c(\underline{\gamma}, \bar{\gamma}, s_1, \underline{s})$ . Weichen die Elemente innerhalb der Klüfte stark von der Parallelogrammstruktur ab, so kann eventuell eine feinere Vernetzung innerhalb der Klüfte erforderlich sein.

Wegen der Unstetigkeit im Koeffizienten der hydraulischen Leitfähigkeit  $K$  können wir nicht die optimale Regularität  $p \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\partial\Omega)$  voraussetzen (siehe z.B. Petzold [53]). Für stückweise konstante Koeffizienten  $K$  erhalten wir  $p \in H^{1+1/4}(\Omega)$ . Nach Petzold [53][Theorem 2.12] ist dies auch die maximal zu erwartende Regularität unabhängig von Beschränkungen von  $K$ .

Wir erwarten daher in den Fehlerabschätzungen einen Faktor  $h^{1/4}$  (siehe Grisvard [32]). Da dieser Regularitätsverlust durch stückweise konstante Koeffizienten im Kluft-Matrix-Übergangsbereich auftritt, wird dies zu einer feineren Vernetzung am Interface bei adaptiver Verfeinerung führen (siehe auch Abschnitt 6.2).

### 3.3 Hierarchische Gebietszerlegung

Zur Lösung des diskreten Problems (3.6) konstruieren wir ein hierarchisches Gebietszerlegungsverfahren. Dazu werden wir das diskrete Problem zunächst in die Teilprobleme Kluft, Interface und Matrix zerlegen. In den folgenden Abschnitten 3.3.1 und 3.3.2 spalten wir sukzessive Kluft- und Interfaceraum ab und zerlegen das verbleibende Matrixproblem hierarchisch in kleinere Teilprobleme 3.3.3.

#### 3.3.1 Abspaltung des Klufttraums — Hierarchische Gebietszerlegung

Wir werden zunächst einen Lösungsraum für das Kluftproblem konstruieren. Das Kluftproblem soll keine Unbekannten außerhalb der Kluft haben, die Lösung des Kluftproblems soll also nur auf Elementen aus  $\mathcal{Q}_{jk}$  leben und an allen Knoten der Gesteinsmatrix  $\mathcal{N}_j^{\overline{M}}$  verschwinden. Dann können wir das Teilproblem auf dem Kluftraum direkt lösen, wenn das Kluftproblem klein genug ist. Sollte das Kluftproblem immer noch zu viele Unbekannte für eine direkte Lösung haben, so können wir im Kluftraum ein Lösungsverfahren einsetzen, das die besonderen Gegebenheiten in der Kluft wie die ausgeprägte Strömung in Richtung der Kluftachse berücksichtigt, z.B. ein Mehrgitterverfahren mit Linienglättter (siehe Bramble, Zhang [16]).

Für die Abspaltung des Klufttraums führen wir eine hierarchische Gebietszerlegung durch. Wir betrachten als Kluftraum den Raum der Funktionen aus  $\mathcal{S}_{jk}$ , die außerhalb der Klüfte verschwinden:

**Definition 7 (Kluftraum)** Wir setzen

$$\mathcal{S}_{jk}^F = \left\{ v \in \mathcal{S}_{jk} \mid v(q) = 0 \quad \forall q \in \mathcal{N}_j^{\overline{M}} \right\}.$$

Damit haben wir den Lösungsraum direkt in einen Kluff- und einen Matrixraum zerlegt (siehe Abb. 3.15).

**Bemerkung**

a) Es gilt  $\mathcal{S}_{jk} = \mathcal{S}_j^{\overline{M}} \oplus \mathcal{S}_{jk}^F$  mit

$$\mathcal{S}_j^{\overline{M}} = \left\{ v \in \mathcal{S}_{jk} \mid v|_Q \in \Pi_{11}(Q) \quad \forall Q \in \mathcal{Q}_{j0} \right\}.$$

Wir bezeichnen im folgenden  $\mathcal{Q}_j := \mathcal{Q}_{j0}$ .

b) Mit dem Interpolationsoperator

$$I_{jk}^{\overline{M}} : \mathcal{S}_{jk} \rightarrow \mathcal{S}_j^{\overline{M}}$$

definiert durch

$$I_{jk}^{\overline{M}} v(q) = v(q) \quad \forall q \in \mathcal{N}_j^{\overline{M}}$$

gilt (vergleiche Abbildungen 3.14 und 3.15)

$$I_{jk}^{\overline{M}}(\mathcal{S}_{jk}) = \mathcal{S}_j^{\overline{M}}. \quad (3.11)$$

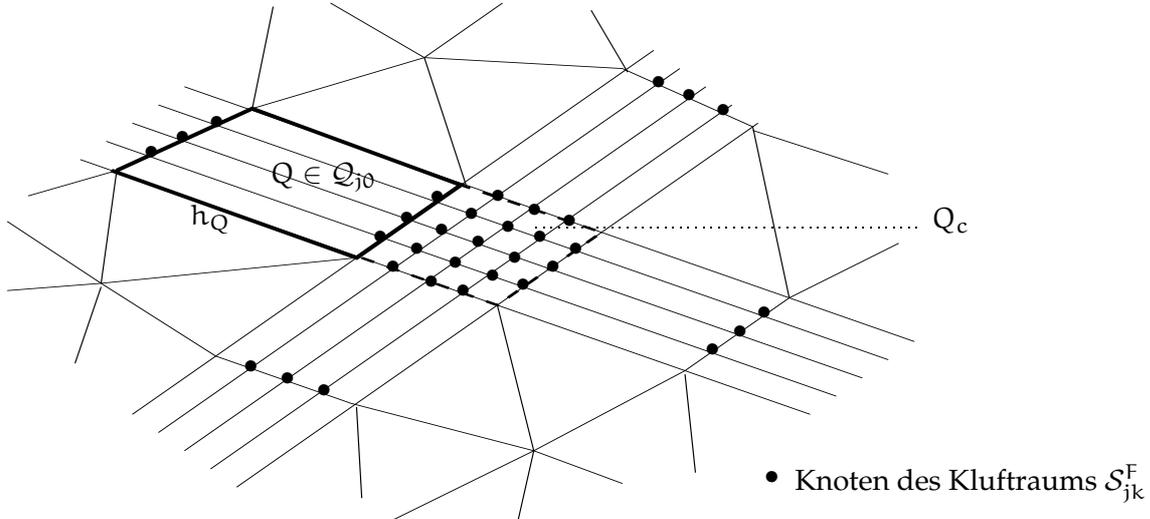


Abbildung 3.14: Makroelemente  $Q \in \mathcal{Q}_{j0}$  und  $Q_c \in \mathcal{Q}_{j0}$

Wir wollen nun die Stabilität der hierarchischen Zerlegung in Kluff- und Matrixraum zeigen, dafür ist die Stabilität des Interpolationsoperators  $I_{jk}^{\overline{M}}$  entscheidend. Wir führen die folgenden Überlegungen zunächst auf den entsprechenden Referenzelementen durch und übertragen die Stabilität des Interpolationsoperators anschließend mit Hilfe der Ergebnisse des Abschnittes (Abschnitt 3.2.2) über Transformation eines Referenzrechtecks auf Trapeze auf den allgemeinen Interpolationsoperator  $I_{jk}^{\overline{M}}$ . Als direkte Folgerung erhalten wir daraus dann die Stabilität der hierarchischen Zerlegung in Kluff- und Matrixraum.

**Abschätzungen auf Referenzelementen** Die einzelnen Klüfte sind, abgesehen von den Kreuzungen, mit anisotropen Trapezen vernetzt. In der Regel bestehen die Klüftkreuzungen bei in etwa gleich weiten Klüften aus isotropen Parallelogrammen. Wir betrachten also das Referenzrechteck  $Q_0 = (0, 1) \times (0, \varepsilon_0)$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ , und den Vektorraum  $\Pi_{11}(Q_0)$  der bilinearen Funktionen auf  $Q_0$ . Dann untersuchen wir den Interpolationsoperator

$$\hat{I}_{\varepsilon_0} : V_{\varepsilon_0} \rightarrow \Pi_{11}(Q_0), \quad V_{\varepsilon_0} \subset C(\overline{Q_0}),$$

der durch Interpolation an den vier Eckpunkten definiert ist. Dabei ist

$$V_{\varepsilon_0} = \{v \in C(\overline{Q_0}) \mid \begin{array}{l} v(\xi, \cdot) \text{ absolutstetig, } v(\xi, 0) = v(\xi, \varepsilon_0) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \\ v(\cdot, \eta) \text{ linear } \quad 0 \leq \eta \leq \varepsilon_0 \end{array}\} \quad (3.12)$$

der Raum der Funktionen, die linear in Richtung der längeren Kante des Referenzrechteckes  $Q_0$  sind.

Für den Beweis des zentralen Lemmas dieses Abschnittes (Lemma 4) werden wir die folgende aus den binomischen Formeln abgeleitete Ungleichung verwenden:

**Lemma 3** Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt

$$(a - b)^2 \leq 4(a^2 + ab + b^2). \quad (3.13)$$

Insbesondere ist der Faktor 4 optimal.

**Beweis:**

$$\begin{aligned} (a - b)^2 &\leq 4(a^2 + ab + b^2) \\ \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 &\leq 4a^2 + 4ab + 4b^2 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 3a^2 + 6ab + 3b^2 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 3(a + b)^2. \end{aligned}$$

Für  $b = -a$  folgt

$$\begin{aligned} (a - b)^2 &= 4a^2 \\ a^2 + ab + b^2 &= a^2. \end{aligned}$$

□

Damit können wir die für die Stabilität des Interpolationsoperators  $\hat{I}_{\varepsilon_0}$  auf dem Referenzelement  $Q_0$  entscheidende Abschätzung für Funktionen, die linear in einer Richtung auf dem Referenzelement  $Q_0$  sind, zeigen:

**Lemma 4** Es sei  $V_{\varepsilon_0}$  wie in (3.12) und  $v \in V_{\varepsilon_0}$ . Dann gilt

$$\|\nabla v\|_{L^2(Q_0)} \leq \sqrt{1 + 12\varepsilon_0^2} \|v_\eta\|_{L^2(Q_0)}.$$

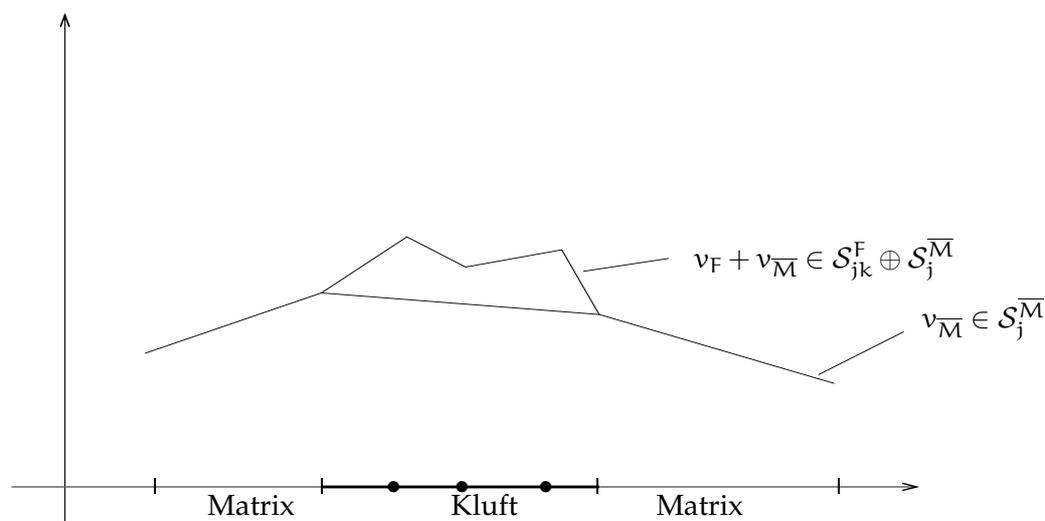


Abbildung 3.15: Hierarchische Gebietszerlegung

**Beweis:**

Es sei  $f : [0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar mit  $f(0) = 0$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^{\varepsilon_0} |f(y)| dy &= \int_0^{\varepsilon_0} \left| f(0) + \int_0^y f'(t) dt \right|^2 dy = \int_0^{\varepsilon_0} \left| \int_0^y 1 \cdot f'(t) dt \right|^2 dy \\ &\leq \int_0^{\varepsilon_0} \left( \int_0^y 1^2 dt \right) \left( \int_0^y |f'(t)|^2 dt \right) dy \leq \int_0^{\varepsilon_0} \left( \int_0^{\varepsilon_0} 1^2 dt \right) \left( \int_0^{\varepsilon_0} |f'(t)|^2 dt \right) dy \quad (3.14) \\ &= \varepsilon_0^2 \int_0^{\varepsilon_0} |f'(t)|^2 dt = \varepsilon_0^2 \int_0^{\varepsilon_0} |f'(y)|^2 dy. \end{aligned}$$

Es sei  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  linear. Dann folgt aus

$$\begin{aligned} \int_0^1 |h(x)|^2 dx &= \int_0^1 |h(1)x + h(0)(1-x)|^2 dx \\ &= \int_0^1 \left\{ h(1)^2 x^2 + 2h(0)h(1)x(1-x) + h(0)^2(1-x)^2 \right\} dx \\ &= \frac{1}{3}h(1)^2 + \frac{1}{3}h(0)h(1) + \frac{1}{3}h(0)^2 \end{aligned}$$

mit der Abschätzung (3.13) aus Lemma 3 die Abschätzung

$$(h(1) - h(0))^2 \leq 12 \int_0^1 |h(x)|^2 dx. \quad (3.15)$$

Des weiteren gilt wegen  $x \mapsto v(x, y)$  linear und den Abschätzungen (3.14) und (3.15)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\varepsilon_0} \int_0^1 \left| \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)(x, y) \right|^2 dx dy &= \int_0^{\varepsilon_0} \int_0^1 |v(1, y) - v(0, y)|^2 dx dy \\
&= \int_0^{\varepsilon_0} |v(1, y) - v(0, y)|^2 dy \stackrel{(3.14)}{\leq} \varepsilon_0^2 \int_0^{\varepsilon_0} \left| \frac{\partial}{\partial y} \{v(1, y) - v(0, y)\} \right|^2 dy \\
\stackrel{(3.15)}{\leq} \varepsilon_0^2 \int_0^{\varepsilon_0} \left\{ 12 \int_0^1 \left| \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)(x, y) \right|^2 dx \right\} dy &= 12 \varepsilon_0^2 \int_0^{\varepsilon_0} \int_0^1 \left| \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)(x, y) \right|^2 dx dy.
\end{aligned}$$

□

Nun folgt die Stabilität des Interpolationsoperators  $\hat{\Gamma}_{\varepsilon_0}$  für das Referenzrechteck  $Q_0$ :

**Lemma 5** *Es gilt*

$$\|\nabla(v - \hat{\Gamma}_{\varepsilon_0} v)\|_{L^2(Q_0)} \leq \sqrt{1 + 12\varepsilon_0^2} \|\nabla v\|_{L^2(Q_0)}.$$

Im Gegensatz zu den Einzelklüften sind die Klüftkreuzungen nicht mit anisotropen Elementen vernetzt. Die Klüftkreuzungen stellen isotrope Parallelogramme dar, wenn die Klüftweiten der sich schneidenden Klüfte sich nicht um Größenordnungen unterscheiden. Sollten die Klüftweiten von zwei sich schneidenden Klüften stark voneinander abweichen, dann kann das entstehende Element wieder auf das Referenzrechteck  $Q_0$  zurückgeführt werden. Uns fehlt daher noch die entsprechende Abschätzung für das Referenzelement der Kreuzungen von Klüften gleicher Klüftweite. Dazu sei  $Q_{\square} = (0, 1)^2$  das Einheitsquadrat und  $Q_k$  die durch  $k$ -fache Halbierung der Kanten entstandene Zerlegung von  $Q_{\square}$ . Es sei

$$V_1 = \{v \in C(Q_{\square}) \mid v|_Q \in \Pi_{11}(Q) \forall Q \in \mathcal{Q}_{jk}, v(p) = 0 \quad \forall p \text{ Eckpunkt von } Q_{\square}\}$$

und

$$\hat{\Gamma}_1 : V_1 \rightarrow \Pi_{11} \tag{3.16}$$

der durch Interpolation an den vier Eckpunkten definierte Interpolationsoperator.

**Lemma 6** *Es sei  $\hat{\Gamma}_1$  die Interpolation von  $V_1$  nach  $\Pi_{11}$  aus (3.16). Dann gilt*

$$\|\nabla \hat{\Gamma}_1 v\|_{L^2(Q_{\square})}^2 \leq c(1 + k) \|\nabla v\|_{L^2(Q_{\square})}.$$

**Beweis:**

Der Beweis folgt dem entsprechenden Beweis für isotrope Dreieckselemente (siehe z.B. Yserentant [70]).

□

Wir wollen nun die Abschätzungen mit Hilfe der Transformationsformeln aus Abschnitt 3.2.2 auf die Trapeze der Zerlegung  $\mathcal{Q}_j$  übertragen. Zu jedem  $Q \in \mathcal{Q}_j$  sei  $h_Q$  die längere der beiden

parallelen Kanten und  $s_Q$  der Faktor um den sich die beiden parallelen Kanten in der Länge unterscheiden:

$$h_Q = |e_{\max}|, \quad s_Q = \frac{e_{\min}}{e_{\max}} \in (0, 1]$$

wobei  $e_{\max}$ ,  $e_{\min}$  die Längen der beiden parallelen Kanten von  $Q$  seien (siehe Abbildung 3.13). Wir setzen

$$\sigma_\varepsilon = 1 + \max_{Q \in \mathcal{Q}_j} \frac{\varepsilon}{h_Q}, \quad \sigma_{\varepsilon^{-1}} = 1 + \max_{Q \in \mathcal{Q}_j} (1 - s_Q) \frac{h_Q}{\varepsilon}. \quad (3.17)$$

**Bemerkungen:**

1. Beschränktheit von  $\sigma_\varepsilon$  bedeutet:  
 $\varepsilon \leq \text{const } h_j$ ,  $h_j = \max_{e \in \mathcal{E}^1} |e|$ , d.h. starke Anisotropie von  $\mathcal{Q}_j$  normal zur Kluftrichtung ist nicht erlaubt.
2. Beschränktheit von  $\sigma_{\varepsilon^{-1}}$  bedeutet:  
 stark anisotrope Elemente  $Q \in \mathcal{Q}_j$  müssen fast Parallelelogramme sein.

Wir können einzelne Klüfte oder Klüfte, die von mehreren parallelen Klüften geschnitten werden, mit reinen Parallelelogrammen vernetzen, nur Kreuzungen einer Kluft mit mehreren nicht parallelen Klüften und das Auftreffen der Klüfte auf den Gebietsrand erfordern einen Ausgleich durch Trapeze zwischen den Kreuzungen (siehe Abbildung 3.4). Für eine Anisotropie normal zur Kluftrichtung ist unser Verfahren nicht gedacht. Sollten die Gegebenheiten in der Gesteinsmatrix eine so starke Verfeinerung fordern, daß die Anisotropie normal zur Kluft auftritt, so muß ein anderes Verfahren eingesetzt werden.

Wir formulieren nun das zentrale Ergebnis dieses Abschnittes, die Stabilität des Interpolationsoperators  $I_{jk}^{\overline{M}}$  aus der Transformation eines Referenzrechtecks auf ein Finites Element (siehe Abschnitt 3.2.2) und der Stabilität für den Interpolationsoperator  $\hat{I}_1$  bzw.  $\hat{I}_{\varepsilon_0}$ :

**Satz 5** Mit dem Interpolationsoperator  $I_{jk}^{\overline{M}}$  aus (3.11) und  $\sigma_\varepsilon$  und  $\sigma_{\varepsilon^{-1}}$  aus (3.17) gilt

$$\|I_{jk}^{\overline{M}} v\|^2 \leq c \sigma_\varepsilon \sigma_{\varepsilon^{-1}}^4 (1 + k^2) \|v\|^2 \quad \forall v \in \mathcal{S}_{jk} \quad (3.18)$$

wobei  $c$  nur von der Elliptizität von  $\alpha(\cdot, \cdot)$  und der Ausgangszerlegung in der Kluft  $\mathcal{Q}_0$  abhängt.

**Beweis:**

Offenbar gilt

$$\|(\text{id} - I_{jk}^{\overline{M}})v\|^2 \leq c \|k_0 \nabla(\text{id} - I_{jk}^{\overline{M}})v\|_{L^2(\Omega_F)}^2 \leq c k_0 \sum_{Q \in \mathcal{Q}_{j_0}} \|\nabla(\text{id} - I_{jk}^{\overline{M}})v\|_{L^2(Q)}^2. \quad (3.19)$$

Sei  $Q \in \mathcal{Q}_{j_0}$ ,  $Q \neq Q_c$ , und sei  $Q_0 = (0, 1) \times (0, \varepsilon_0)$  mit  $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{h_Q}$ . Sei weiter  $F_Q$  die affin bilineare, bijektive Abbildung mit  $F_Q(Q_0) = Q$  und

$$\hat{v}(\xi, \eta) = v(F_Q(\xi, \eta)), \quad v \in \Pi_{11}(Q).$$

Dann gilt nach Satz 4 aus dem Transformationsabschnitt (Abschnitt 3.2.2)

$$\|\nabla(\text{id} - I_{jk}^{\overline{M}})v\|_{L^2(Q)}^2 \leq c (\underline{\gamma}, \overline{\gamma}, \underline{s})(1 + (1 - s_Q) \frac{h_Q}{\varepsilon})^2 \|\nabla(\text{id} - \hat{I}_\varepsilon)\hat{v}\|_{L^2(Q_0)}^2$$

wobei  $\underline{\gamma}, \bar{\gamma}, \underline{s}$  nur von  $Q_0$  abhängen.

Dann folgt aus Lemma 5

$$\|\nabla(\text{id} - \hat{I}_\varepsilon)\hat{v}\|_{L^2(Q_0)}^2 \leq (1 + 12\varepsilon_0)\|\hat{v}\|_{L^2(Q_0)}^2 \leq c\sigma_\varepsilon\sigma_{\varepsilon^{-1}}^2\|v\|_{L^2(Q)}^2.$$

Im Falle  $Q = Q_c$  gilt mit  $F_{Q_\square}(Q_\square) = Q_c$

$$\begin{aligned} \|\nabla(\text{id} - I_{jk}^{\bar{M}})v\|_{L^2(Q_c)}^2 &\leq c(\underline{\gamma}, \bar{\gamma}, \underline{s})\|\nabla(\text{id} - \hat{I}_1)\hat{v}\|_{L^2(Q_\square)}^2 \\ &\leq c(1+k)^2\|\nabla\hat{v}\|_{L^2(Q_\square)}^2 \\ &\leq c(1+k)^2\|\nabla\hat{v}\|_{L^2(Q)}^2. \end{aligned}$$

Einsetzen in (3.19) liefert

$$\begin{aligned} \|(\text{id} - I_{jk}^{\bar{M}})v\|^2 &\leq c\sigma_\varepsilon\sigma_{\varepsilon^{-1}}^4(1+k)^2 \sum_{Q \in Q_{j_0}} k_0 \|\nabla v\|_{L^2(Q)}^2 \\ &\leq c\sigma_\varepsilon\sigma_{\varepsilon^{-1}}^4(1+k)^2\|v\|^2 \end{aligned}$$

und aus

$$\|I_{jk}^{\bar{M}}v\| \leq \|v\| + \|v - I_{jk}^{\bar{M}}v\|$$

folgt dann die Behauptung. □

**Korollar 2** Für jedes  $v \in \mathcal{S}_{jk}$  existieren  $v_{\bar{M}} \in \mathcal{S}_{jk}^{\bar{M}}$  und  $v_F \in \mathcal{S}_{jk}^F$  mit  $v_{\bar{M}} + v_F = v$  und

$$\|v_{\bar{M}}\|^2 + \|v_F\|^2 \leq c\sigma_\varepsilon\sigma_{\varepsilon^{-1}}^4(1+k)\|v\|^2 \quad (3.20)$$

mit  $c = c(Q_0)$

**Beweis:**

Wir setzen

$$v_{\bar{M}} = I_{jk}^{\bar{M}}v, \quad v_F = v - v_{\bar{M}}$$

und erhalten aus Satz 5 und der Dreiecksungleichung

$$\|v_{\bar{M}}\|^2 + \|v_F\|^2 \leq \left[1 + 2c\sigma_\varepsilon\sigma_{\varepsilon^{-1}}^4(1+k)\right]\|v\|^2.$$

□

**Bemerkung:** Im Falle  $s_Q = 1 \forall Q \in Q_0$  (Parallelogrammzerlegung des Kluftnetzwerkes) ist die Stabilität (3.20) wegen Bemerkung 1. S.44 robust für  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Wir gehen davon aus, daß das Kluftproblem im Vergleich zum Gesamtproblem (3.9) klein ist. Eine direkte Lösung des Kluftproblems liegt daher für nicht zu große Probleme nahe. Für kompliziertere Kluftnetzwerke bietet sich zur Lösung des Kluftproblems wegen der ausgeprägten Strömung in Richtung der Kluft ein Mehrgitterverfahren mit Linienglättter an. Für dieses Verfahren folgt die gitterunabhängige Konvergenz aus Lemma 4 oder aus Bramble, Zhang [16].

### 3.3.2 Abspaltung des Interfaceraums

Nach erfolgreicher Abspaltung des Kluftraums  $\mathcal{S}_{jk}^F$  besteht die Hauptschwierigkeit bei der Lösung des verbleibenden Problems in  $\mathcal{S}_j^{\overline{M}}$  in der Berechnung der Lösung am Kluft–Matrix–Übergang. Am Interface treten durch die großen Unterschiede in den Schrittweiten in Kluft und Matrix einseitig sehr steile Basisfunktionen auf. Für so geartete Probleme versagen klassische Mehrgitterverfahren. Wir werden daher den Teilraum  $\mathcal{S}_j^{\overline{M}}$  noch weiter aufteilen. Dazu spalten wir ein Interface–Problem am Kluft–Matrix–Übergang ab, das die einseitig steilen Basisfunktionen enthält und das wir direkt lösen werden.

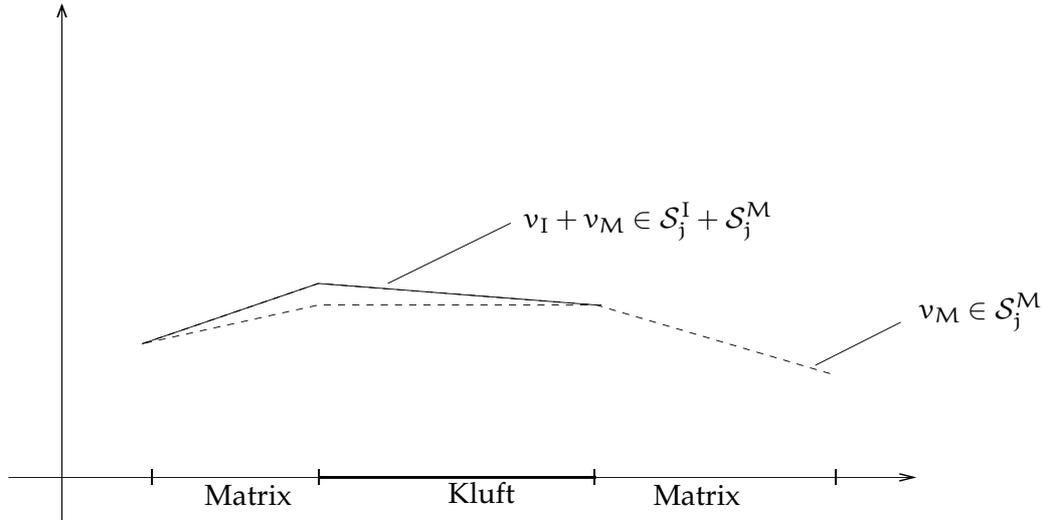


Abbildung 3.16: Abspaltung des Interfaceraums

#### Definition 8 (Interface–Raum)

Wir setzen

$$\mathcal{S}_j^I = \left\{ v \in \mathcal{S}_j^{\overline{M}} \mid v(q) = 0 \quad q \notin \mathcal{N}_j^I \right\} \quad (3.21)$$

$$\mathcal{S}_j^M = \left\{ v \in \mathcal{S}_j^{\overline{M}} \mid v(p) = v(q) \quad \forall e = (p, q) \in \mathcal{E}_{j0}^F \right\}. \quad (3.22)$$

Dabei bedeutet  $e = (p, q)$ , daß  $e$  die Eckpunkte  $p, q$  hat.

Der Interfaceraum  $\mathcal{S}_j^I$  besteht also aus den Funktionen aus  $\mathcal{S}_j^{\overline{M}}$ , die nur auf den Knoten auf dem Kluft–Matrix–Übergang leben und an allen anderen Knoten verschwinden. Für den verbleibenden Matrixraum  $\mathcal{S}_j^M$  wählen wir gerade die Funktionen  $\mathcal{S}_j^{\overline{M}}$  auf dem Gebiet  $\Omega$ , die konstant entlang der Kanten von  $\mathcal{E}_{j0}^F$  sind, also konstant über die Kluft. Daraus folgt, daß diese Funktionen auch konstant über eine gesamte Kluftkreuzung sind.

**Bemerkung:** Es gilt

$$\mathcal{S}_j^{\overline{M}} = \mathcal{S}_j^M + \mathcal{S}_j^I.$$

Dabei ist die Summe hier nicht direkt wie bei der hierarchischen Abspaltung des Kluftraums. Funktionen aus  $\mathcal{S}_j^I$  leben auch auf Knoten aus  $\mathcal{S}_j^M$  und umgekehrt (siehe Abb. 3.16).

Die Interpolation von  $\mathcal{S}_j^{\overline{M}}$  nach  $\mathcal{S}_j^M$  ist für alle Knoten der Gesteinsmatrix  $\mathcal{N}_j^M$  durch die Werte an den Knoten gegeben. Für die Knoten auf dem Interface betrachten wir Kanten aus  $\mathcal{E}_{j0}^F$  und Klufftkreuzungen  $Q_c \in \Omega_c$  getrennt.

**Definition 9 (Interpolationsoperator  $I_j^M$ )**

Zu jeder Kante  $e = (p_1^e, p_2^e) \in \mathcal{E}_{j0}^F \setminus \mathcal{E}_c$  wählen wir  $p^e \in \{p_1^e, p_2^e\}$  beliebig aber fest.

Zu  $Q_c = (p_1^c, p_2^c, p_3^c, p_4^c)$  wählen wir  $p^c \in \{p_1^c, p_2^c, p_3^c, p_4^c\}$  beliebig aber fest.

Dann ist  $I_j^M : \mathcal{S}_j^{\overline{M}} \rightarrow \mathcal{S}_j^M$  definiert durch

$$I_j^M v(p) = \begin{cases} v(p) & , p \in \mathcal{N}_j^M \\ v(p^e) & , p \in \{p_1^e, p_2^e\}, e = (p_1^e, p_2^e) \in \mathcal{E}_j^F \setminus \mathcal{E}_c \\ v(p^c) & , p \in \{p_1^c, p_2^c, p_3^c, p_4^c\} \end{cases}$$

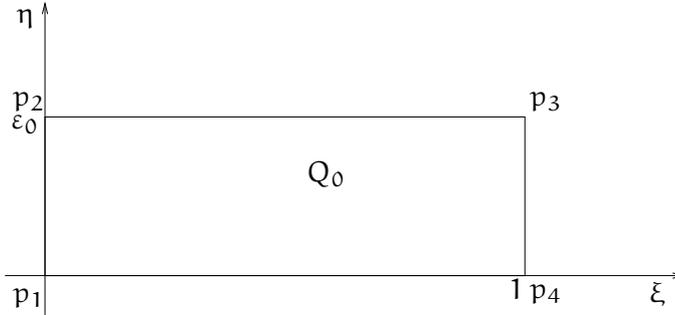


Abbildung 3.17: Referenzrechteck

**Abschätzungen auf Referenzelementen** Für die anisotropen Vierecke im Bereich der Klufft betrachten wir wieder zunächst das Referenzrechteck  $Q_0$  und nutzen anschließend die Transformationsregeln zur Übertragung der Ergebnisse auf die Trapeze innerhalb der Klufft. Innerhalb der Gesteinsmatrix besteht die Zerlegung aus isotropen Dreiecken, die Transformationsregeln für diese Dreiecke sind z.B. in Braess [15], Ciarlet [19] oder Brenner und Scott [18] nachzulesen.

Für das Referenzrechteck  $Q_0$  (siehe Abb. 3.17) gilt:

**Lemma 7** Es sei  $Q_0 = (0, 1) \times (0, \varepsilon_0)$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  und  $v \in \Pi_{11}(Q_0)$ . Dann gilt mit  $v_i := v(p_i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ :

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_{L^2(Q_0)}^2 &= \frac{\varepsilon_0}{3} \left( (v_4 - v_1)^2 + (v_3 - v_2)^2 + (v_4 - v_1)(v_3 - v_2) \right) \\ &+ \frac{1}{3} \varepsilon_0^{-1} \left( (v_2 - v_1)^2 + (v_3 - v_4)^2 + (v_2 - v_1)(v_3 - v_4) \right). \end{aligned}$$

**Beweis:**

Es gilt

$$\begin{aligned} v_\xi &= \varepsilon_0^{-1} \left( (v_4 - v_1)(\varepsilon_0 - \eta) + (v_3 - v_2)\eta \right) \\ v_\eta &= \varepsilon_0^{-1} \left( (v_2 - v_1)(1 - \xi) + (v_3 - v_4)\xi \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\varepsilon_0} \int_0^1 v_\xi^2 d\xi d\eta &= \int_0^{\varepsilon_0} v_\xi^2 d\eta \\
&= \varepsilon_0^{-2} \int_0^{\varepsilon_0} (v_4 - v_1)^2 (\varepsilon_0 - \eta)^2 + (v_3 - v_2)^2 \eta^2 + 2(\varepsilon_0 - \eta)\eta(v_4 - v_1)(v_3 - v_2) d\eta \\
&= \frac{1}{3} \varepsilon_0 \left( (v_4 - v_1)^2 + (v_3 - v_2)^2 + (v_4 - v_1)(v_3 - v_2) \right) \\
\int_0^{\varepsilon_0} \int_0^1 v_\eta^2 d\xi d\eta &= \varepsilon_0^{-1} \int_0^1 \left( (v_2 - v_1)(1 - \xi) + (v_3 - v_4)\xi \right)^2 d\xi \\
&= \frac{1}{3} \varepsilon_0^{-1} \left( (v_2 - v_1)^2 + (v_3 - v_4)^2 + (v_2 - v_1)(v_3 - v_4) \right) \\
\|v\|_{L^2(Q_0)}^2 &= \frac{1}{3} \left[ \varepsilon_0 \left( (v_4 - v_1)^2 + (v_3 - v_2)^2 + (v_4 - v_1)(v_3 - v_4) \right) \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon_0^{-1} \left( (v_2 - v_1)^2 + (v_3 - v_4)^2 + (v_2 - v_1)(v_3 - v_4) \right) \right].
\end{aligned}$$

□

Für die isotropen Dreiecke in der Gesteinsmatrix erhalten wir auf dem Einheitsdreieck (siehe Abb. 3.18) folgendes Lemma:

**Lemma 8** *Es sei  $T_1$  das Einheitsdreieck und  $v \in \Pi_1(T_1)$ . Dann gilt mit  $v_i = v(p_i)$ ,  $i = 1, \dots, 3$ :*

$$\|\nabla v\|_{L^2(T_1)}^2 = \frac{1}{2} \left( (v_2 - v_1)^2 + (v_3 - v_1)^2 \right).$$

**Beweis:**

$$v_\xi = v_3 - v_1, \quad v_\eta = v_2 - v_1$$

$$\begin{aligned}
\int_{T_1} v_\xi^2 d(\xi, \eta) &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (v_3 - v_1)^2 d\eta d\xi \\
&= \int_0^1 (1 - \xi)(v_3 - v_1)^2 d\xi \\
&= \frac{1}{2} (v_3 - v_1)^2 \\
\int_{T_1} v_\eta^2 d(\xi, \eta) &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (v_2 - v_1)^2 d\eta d\xi \\
&= \frac{1}{2} (v_2 - v_1)^2
\end{aligned}$$

$$\|v\|_{L^2(T)}^2 = \frac{1}{2} \left( (v_3 - v_1)^2 + (v_2 - v_1)^2 \right).$$

□

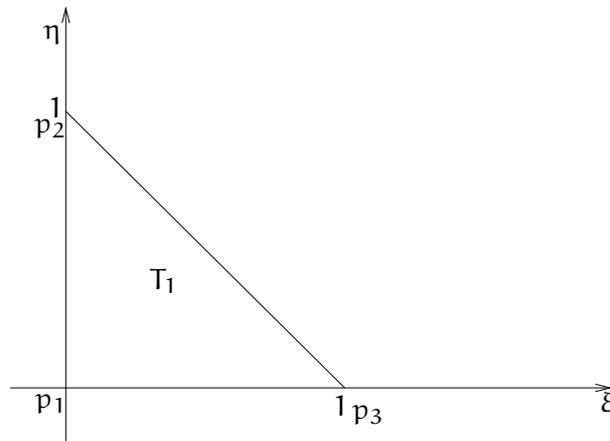


Abbildung 3.18: Referenzdreieck

Für die Abschätzungen der Interpolation mit  $I_j^M$  benötigen wir wieder eine aus den binomischen Formeln abgeleitete Ungleichung:

**Lemma 9** *Es gilt*

$$a^2 \leq \frac{4}{3} (a^2 + b^2 + ab) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \quad (3.23)$$

**Beweis:**

Wir können die Ungleichung (3.23) auch in der Form

$$0 \leq \frac{1}{3}a^2 + \frac{4}{3}b^2 + \frac{4}{3}ab$$

bzw.

$$0 \leq a^2 + (2b)^2 + 2a(2b) = (a + 2b)^2$$

schreiben. Gleichheit gilt, falls  $a = -2b$ .

□

**Folgerung:** Es gilt:

$$\frac{3}{8}(a^2 + b^2) \leq (a^2 + b^2 + ab) \leq \frac{2}{3}(a^2 + b^2).$$

Aus Lemma 9 folgt nämlich  $b^2 \leq \frac{4}{3}(a^2 + b^2 + ab) \forall a, b \in \mathbb{R}$  und Summation liefert die linke Abschätzung. Die rechte Abschätzung folgt aus

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

Die Interpolation  $I_j^M$  bildet die bilinearen Funktionen auf  $Q_0$  auf lineare ab. Damit können wir die Interpolation mit  $\hat{I}^M$  für das Referenzrechteck  $Q_0$  abschätzen:

**Lemma 10** *Es sei*

$$\hat{\mathbf{I}}^M : \Pi_{11}(Q_0) \rightarrow \Pi_1(Q_0)$$

*definiert durch*

a)

$$\hat{\mathbf{I}}^M_{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) = \begin{cases} v(\mathbf{p}_1) & \mathbf{p} = \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \\ v(\mathbf{p}_4) & \mathbf{p} = \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 \end{cases}$$

*oder*

b)

$$\hat{\mathbf{I}}^M_{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) = \begin{cases} v(\mathbf{p}_2) & \mathbf{p} = \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \\ v(\mathbf{p}_3) & \mathbf{p} = \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 \end{cases}$$

*Dann gilt:*

$$\|\nabla \hat{\mathbf{I}}^M_{\mathbf{v}}\|_{L^2(Q_0)}^2 \leq \frac{4}{3} \varepsilon_0 \|\nabla v\|_{L^2(Q_0)}^2.$$

**Beweis:**

Wir betrachten o.B.d.A. Fall a). Nach Lemma 7 und Lemma 9 ist dann

$$\begin{aligned} \|\nabla \hat{\mathbf{I}}^M_{\mathbf{v}}\|_{L^2(Q_0)} &= \varepsilon_0 (v_4 - v_1)^2 \\ &\leq \frac{4}{3} \varepsilon_0 \left( (v_4 - v_1)^2 + (v_3 - v_2)^2 + (v_4 - v_1)(v_3 - v_2) \right) \\ &\leq \frac{4}{3} \varepsilon_0 \|\nabla v\|_{L^2(Q_0)}^2. \end{aligned}$$

□

**Lemma 11** *Es gilt für alle  $v \in \Pi_{11}(Q_0)$ :*

$$4\varepsilon_0 \|\nabla v\|_{L^2(Q_0)}^2 \geq \max \left\{ (v_2 - v_1)^2, (v_1 - v_4)^2 \right\}.$$

**Beweis:**

Die Behauptung folgt direkt aus Lemma 7 und Lemma 9.

□

Für die isotropen Dreieckselemente in der Gesteinsmatrix erhalten wir die folgende Abschätzung:

**Lemma 12** *Es gilt für  $v, \bar{v} \in \Pi_1(T_1)$ :*

$$\|\nabla \bar{v}\|_{L^2(T_1)}^2 \leq \|\nabla v\|_{L^2(T_1)}^2 + 4 \left( (v_1 - \bar{v}_1)^2 + (v_2 - \bar{v}_2)^2 + (v_3 - \bar{v}_3)^2 \right)$$

*wobei  $v(\mathbf{p}_i) = v_i$ ,  $\bar{v}(\mathbf{p}_i) = \bar{v}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  gesetzt ist.*

**Beweis:**

Es gilt

$$\begin{aligned}
\|\nabla\bar{v}\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 &\stackrel{\text{(Lemma 8)}}{=} \frac{1}{2} \left( (\bar{v}_2 - \bar{v}_1)^2 + (\bar{v}_3 - \bar{v}_1)^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( (v_2 - v_1 + \bar{v}_2 - v_2 + v_1 - \bar{v}_1)^2 + (v_3 - v_1 + \bar{v}_3 - v_3 + v_1 - \bar{v}_1)^2 \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \left( (v_2 - v_1)^2 + (v_3 - v_1)^2 \right) + 4 \left( (v_1 - \bar{v}_1)^2 + (v_2 - \bar{v}_2)^2 + (v_3 - \bar{v}_3)^2 \right)
\end{aligned}$$

unter Verwendung von  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ .

□

**Lokale Abschätzungen** Wir leiten nun die Stabilität des Interpolationsoperators  $I_j^M$  für die isoparametrischen Trapeze innerhalb der Kluft her. Als Folge daraus erhalten wir die Stabilität der Zerlegung von  $S_j^M$  in  $S_j^M$  und  $S_j^I$ . Dafür nutzen wir die Ergebnisse der vorangegangenen Überlegungen und die Transformationsregeln aus dem Abschnitt über die Transformation eines Referenzrechtecks auf Trapeze (Abschnitt 3.2.2) auf Elemente  $Q \in \mathcal{Q}_{j0}$ .

Da die Kluftkreuzung ein isotropes Viereckselement darstellt, betrachten wir die Kluftkreuzungen  $Q_c \in \mathcal{Q}_c$  gesondert. Für die Kanten aus  $\mathcal{E}_j^F$  ohne die Kanten an der Kluftkreuzung gilt folgende Abschätzung:

**Lemma 13** *Es sei  $e = (p_1, p_2) \in \mathcal{E}_j^F \setminus \mathcal{E}_c$  Kante von  $Q \in \mathcal{Q}_j$ . Dann gilt für alle  $v \in \Pi_{11}(Q)$ :*

$$(v(p_1) - v(p_2))^2 \leq c \sigma_\varepsilon \sigma_{\varepsilon^{-1}}^2 \|\nabla v\|_{L^2(Q)}$$

wobei  $c = c(Q)$ .

**Beweis:**

Nach Satz 4 gilt mit  $\hat{v} \in \Pi_{11}(Q_0)$

$$\|\nabla\hat{v}\|_{L^2(Q_0)} \leq c \left( 1 + (1 - s_Q) \frac{h_Q}{\varepsilon} \right)^2 \|\nabla v\|_{L^2(Q)}$$

wobei  $c = c(Q_0)$ ,  $Q_0 = (0, 1) \times (0, \varepsilon_0)$ ,  $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{h_Q}$  und  $\hat{v} = v(F_Q(\cdot))$ .

Aus Lemma 11 folgt weiter

$$(v(p_1) - v(p_2))^2 \leq 4 \frac{\varepsilon}{h_Q} \|\nabla\hat{v}\|_{L^2(Q_0)}$$

und daraus die Behauptung.

□

Für die Kanten an der Kluftkreuzung erhalten wir entsprechend die Abschätzung:

**Lemma 14** *Es gilt für alle  $v \in \Pi_{11}(Q_c)$  und  $p_i, \bar{p}_i \in \{p_1^c, p_2^c, p_3^c, p_4^c\}$*

$$(v(p_i) - v(\bar{p}_i))^2 \leq c \|\nabla v\|_{L^2(Q_c)}^2$$

wobei  $c = c(Q_0)$ .

**Beweis:**

Nach Satz 4 gilt mit  $c = c(Q_0)$

$$\|\nabla\hat{v}\|_{L^2(Q_\square)} \leq c\|\nabla v\|_{L^2(Q_\varepsilon)}^2$$

Aus Lemma 7 folgt mit  $\varepsilon_0 = 1$

$$\begin{aligned} \|\nabla\hat{v}\|_{L^2(Q_\square)} &= \frac{1}{3} \left( (v_4 - v_1)^2 + (v_3 - v_2)^2 + (v_4 - v_1)(v_3 - v_2) \right) \\ &+ \frac{1}{3} \left( (v_2 - v_1)^2 + (v_3 - v_4)^2 + (v_2 - v_1)(v_3 - v_4) \right) \\ &\geq \frac{1}{4} \left( \max\{(v_4 - v_1)^2, (v_3 - v_2)^2, (v_2 - v_1)^2, (v_3 - v_4)^2\} \right) \end{aligned}$$

wegen Lemma 9. Schließlich ist für alle  $i, \bar{i} \in 1, \dots, 4$

$$(v_i - v_{\bar{i}})^2 \leq 4 \max\{(v_4 - v_1)^2, (v_3 - v_2)^2, (v_2 - v_1)^2, (v_3 - v_4)^2\}.$$

□

**Lemma 15** Sei  $Q \in \mathcal{Q}_j$ ,  $Q \neq Q_c$ . Dann gilt

$$\|\nabla I_j^M v\|_{L^2(Q)}^2 \leq c\sigma_\varepsilon \sigma_{\varepsilon^{-1}}^4 \|\nabla v\|_{L^2(Q)}^2.$$

**Beweis:**

Aus Lemma 10 ergibt sich mit den Transformationsregeln und  $Q_0 = (0, 1) \times (0, \varepsilon_0)$ ,  $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{h_Q}$

$$\begin{aligned} \|\nabla I_j^M v\|_{L^2(Q)}^2 &\leq c\sigma_{\varepsilon^{-1}}^2 \|\nabla \hat{I}_j^M \hat{v}\|_{L^2(Q_0)}^2 \\ &\leq c\sigma_{\varepsilon^{-1}}^2 \varepsilon_0 \|\nabla \hat{v}\|_{L^2(Q_0)}^2 \\ &\leq c\sigma_\varepsilon \sigma_{\varepsilon^{-1}}^4 \|\nabla v\|_{L^2(Q)}^2. \end{aligned}$$

□

Damit können wir nun die Stabilität des Interpolationsoperators  $I_j^M$  auf  $\mathcal{S}_j^{\overline{M}}$  in der Energienorm zeigen.

**Satz 6** Es gilt

$$\|I_j^M v\|^2 \leq c\sigma_\varepsilon \sigma_{\varepsilon^{-1}}^4 \|v\| \quad \forall v \in \mathcal{S}_j^{\overline{M}}$$

wobei  $c = c(Q_0)$ .

**Beweis:**

Es gilt

$$\|I_j^M v\|^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \|\nabla I_j^M v\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j} k_0 \|\nabla I_j^M v\|_{L^2(Q)}^2$$

Es sei  $T \in \mathcal{T}_j$  und  $I_j^M v = \bar{v}$ . Dann gilt nach Lemma 12

$$\|\nabla I_j^M v\|_{L^2(T)}^2 \leq \|\nabla v\|_{L^2(T)}^2 + 4 \sum_{i=1}^3 (v(p_i) - \bar{v}(p_i))^2.$$

Ist  $v(p_i) - \bar{v}(p_i) \neq 0$ , so ist entweder

- i)  $p_i \in \{q_1, q_2\}$ , wobei  $e = (q_1, q_2) \in \mathcal{E}_j^F \setminus \mathcal{E}_c$  Kante von einem  $Q \in \mathcal{Q}_j$   
oder
- ii)  $p_i \in \{p_1^c, p_2^c, p_3^c, p_4^c\}$  Eckpunkt von  $Q_c$ .

Bezeichnet

$$\mathbf{Q}(T)_j = \{Q \in \mathcal{Q}_j \mid Q \cap T \neq \emptyset\}$$

so gilt nach Lemma 13 und Lemma 14 wegen  $k_0 \geq 1$

$$\sum_{i=1}^3 (v(p_i) - \bar{v}(p_i))^2 \leq c \sigma_\varepsilon \sigma_{\varepsilon^{-1}}^2 \sum_{Q \in \mathbf{Q}_j(T)} k_0 \|\nabla v\|_{L^2(Q)}^2.$$

Da aufgrund der Verfeinerungsregeln

$$\max_{T \in \mathcal{T}_j} |\mathbf{Q}_j(T)| \leq c(\mathcal{Q}_0)$$

gilt, folgt

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_j} \|\nabla I_j^M v\|_{L^2(T)}^2 \leq \|\nabla v\|_{L^2(T)}^2 + c \sigma_\varepsilon \sigma_{\varepsilon^{-1}}^2 \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j} \|k_0 \nabla v\|_{L^2(Q)}^2.$$

Der Fall  $Q = Q_c$  ist wegen  $\nabla I_j^M v|_{Q_c} = 0$  trivial, sei also  $Q \neq Q_c$ . Mit Lemma 15 folgt dann insgesamt

$$\sum_{Q \in \mathcal{Q}_j} \|k_0 \nabla I_j^M v\|_{L^2(Q)}^2 \leq c \sigma_\varepsilon \sigma_{\varepsilon^{-1}}^4 \sum_{Q \in \mathcal{Q}_j} \|k_0 \nabla v\|_{L^2(Q)}^2.$$

□

**Bemerkung:** Damit ist unser Verfahren nach Konstruktion robust gegenüber Koeffizientensprüngen. Der Koeffizientensprung zwischen Kluft und Matrix hat also keinen Einfluß auf die in Abschnitt 3.4.2 angegebenen Konvergenzraten.

Wir erhalten nun als Folgerung aus Satz 6 die Stabilität der Zerlegung von  $S_j^{\bar{M}}$  in  $S_j^M$  und  $S_j^I$ :

**Korollar 3** Für jedes  $v \in S_j^{\bar{M}}$  existieren  $v_M \in S_j^M$  und  $v_I \in S_j^I$  mit  $v_M + v_I = v$  und

$$\|v_M\|^2 + \|v_I\|^2 \leq c \sigma_\varepsilon \sigma_{\varepsilon^{-1}}^4 \|v\|^2,$$

wobei  $c = c(\mathcal{Q}_0)$ .

**Beweis:**

Setze  $v_M = I_j^M v$  und verwende Satz 6 und die Dreiecksungleichung.

□

### 3.3.3 Zerlegung des Matrixproblems

Wir betrachten das Matrixproblem

$$w_j^M \in \mathcal{S}_j^M \quad a(w_j^M, v) = r(v) \quad \forall v \in \mathcal{S}_j^M \quad (3.24)$$

mit  $r \in (\mathcal{S}_j^M)'$ .

Wir haben die einseitig steilen Basisfunktionen am Kluft–Matrix–Übergang in das Interfaceproblem abgespalten. Das verbleibende Matrixproblem führen wir daher auf das Problem ohne Kluft ( $\varepsilon = 0$ ) zurück. Nach Abspaltung von Kluft– und Interfaceraum betrachten wir im Matrixproblem Funktionen, die konstant entlang der Kanten von  $\bar{\mathcal{E}}_{j_0}^F \setminus \mathcal{E}_j^I$  sind. Für die Konvergenzanalyse des hierarchischen Gebietszerlegungsverfahrens (siehe Abschnitt 3.4.2) führen wir nun auf dem Matrixraum  $\mathcal{S}_j^M$  eine hierarchische Zerlegung durch. Dazu betrachten wir die geschachtelte Folge von Matrixräumen:

$$\mathcal{S}_0^M \subset \mathcal{S}_1^M \subset \dots \subset \mathcal{S}_j^M.$$

Es seien  $V_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, j$  die Teilräume von  $\mathcal{S}_i^M$ , die von den Finite Elemente Funktionen gebildet werden, die in den Knoten von Level  $i - 1$  verschwinden. Mit den Interpolationsoperatoren  $I_i : \mathcal{S}_j^M \rightarrow \mathcal{S}_i^M$  mit

$$I_i v = \sum_{q \in \mathcal{N}_i^M} v(q) \lambda_q^{(i)}, \quad i = 0, \dots, j, \quad (3.25)$$

die eine stetige Funktion  $v$  in den Knoten des Matrixproblems auf Level  $i$  interpoliert, läßt sich jede Funktion  $v$  von  $\mathcal{S}_j^M$  darstellen als

$$v = I_0 v + \sum_{i=1}^j (I_i - I_{i-1}) v.$$

Damit haben wir Funktionen  $v$  aus  $\mathcal{S}_j^M$  in auf den verschiedenen Verfeinerungsstufen schnell oszillierende Funktionen zerlegt und  $\mathcal{S}_j^M$  ist die direkte Summe der Teilräume  $V_i$ :

$$\mathcal{S}_j^M = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_j \quad (3.26)$$

mit

$$V_0 = \mathcal{S}_0^M \quad \text{und} \quad V_i = (I_i - I_{i-1}) \mathcal{S}_j^M. \quad (3.27)$$

Für die isotropen Dreieckselemente der Gesteinsmatrix  $T \in \mathcal{T}_j$  erhalten wir die Stabilität aus der Stabilität auf dem Referenzdreieck  $T_1$ :

**Lemma 16** *Es sei  $\mathcal{T}_1^l$  durch  $l$  uniforme Verfeinerungen des Einheitsdreiecks  $T_1$  entstanden:  $T_1 = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_1^l} T$ ,  $v \in C(T_1)$  sei linear auf den einzelnen Dreiecken  $T \in \mathcal{T}_1^l$  und  $I$  sei die lineare Interpolation von  $v$  auf  $T_1$ . Dann gilt*

$$\|\nabla I v\|_{L^2(T_1)}^2 \leq C(1 + l) \|\nabla v\|_{L^2(T_1)}^2.$$

Für den Beweis dieses Lemmas verweisen wir auf die Arbeit von H. Yserentant [70].

Für die Viereckselemente innerhalb der Klüfte  $Q \in \mathcal{Q}_{j_0}$  folgt die Stabilität der Interpolation aus der Stabilität der Interpolation auf linearen 1–D–Elementen:

**Lemma 17** Es sei  $v \in C(Q_0)$  mit

$$\begin{aligned} v(\cdot, y) : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \text{ absolut stetig f\"ur } y \in [0, \varepsilon_0] \text{ fest} \\ v(x, \cdot) : [0, \varepsilon_0] &\rightarrow \mathbb{R} \text{ konstant f\"ur } x \in [0, 1] \text{ fest.} \end{aligned} \quad (3.28)$$

und  $v \rightarrow Iv$  sei die lineare Interpolation auf  $Q_0$ . Dann gilt

$$\|\nabla Iv\|_{L^2(Q_0)} \leq \|\nabla v\|_{L^2(Q_0)}.$$

**Beweis:**

Mit der Greenschen Formel folgt

$$\begin{aligned} (\nabla(\text{id} - I)v, \nabla Iv)_{L^2(Q_0)} &= \int_{Q_0} \nabla(\text{id} - I)v \nabla Iv \, dx = \\ &- \int_{Q_0} (\text{id} - I)v \Delta Iv \, dx + \int_{\partial Q_0} \nabla(\text{id} - I)v \nabla Iv \vec{N} \, d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Dabei verschwindet das Integral über den Rand von  $Q_0$ , da  $Iv \vec{N} = 0$  für  $\vec{N}$  Normale in Richtung  $y$  und  $(\text{id} - I)v = 0$  auf allen Geraden in Richtung  $y$  also auch der entsprechenden Kante.

Mit dem Satz des Pythagoras erhalten wir daraus:

$$\|\nabla v\|_{L^2(Q_0)}^2 = \|\nabla Iv\|_{L^2(Q_0)}^2 + \|\nabla(\text{id} - I)v\|_{L^2(Q_0)}^2 \geq \|\nabla Iv\|_{L^2(Q_0)}^2.$$

□

Daraus folgt die Stabilität der Interpolation  $I_i$ :

**Korollar 4** Für die Interpolation  $I_i$  aus (3.25) gilt

$$\|\nabla I_i v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c(1 + i) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad v \in \mathcal{S}_i^M.$$

**Beweis:**

Es gilt

$$\|\nabla I_i v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_i} \|\nabla I_i v\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{Q \in \mathcal{Q}_{jk}} \|\nabla I_i v\|_{L^2(Q)}^2.$$

Die Behauptung folgt nun aus Lemma 16 und Lemma 17 und den Transformationsregeln für isotrope Dreieckselemente (siehe H. Yserentant in [70][Lemma 2.5]).

□

Damit erhalten wir für die hierarchische Zerlegung des Matrixraums die Stabilität der Interpolation:

**Satz 7** Es seien  $V_i$ ,  $i = 0, \dots, j$  wie in (3.27). Jede Funktion  $v \in \mathcal{S}_j^M$  läßt sich darstellen als  $v = \sum_{l=0}^j v_l$ ,  $v_l \in V_l$  und es gilt

$$\sum_{l=0}^j \|v_l\|^2 \leq C(1 + j)^2 \|v\|^2$$

mit  $C = C(\mathcal{T}_0)$ .

**Beweis:**

Die Behauptung folgt aus Korollar 4 (siehe H. Yserentant [70][Lemma 2.5]).

□

### 3.4 Robuste Lösung des diskreten Problems

Wir werden nun auf der Zerlegung in Kluft-, Interface- und Matrixproblem ein hierarchisches Gebietszerlegungsverfahren konstruieren. Dazu nutzen wir die Idee der Teilraumkorrekturmethode (siehe Abschnitt 3.4.1). Das Verfahren selbst wird in Abschnitt 3.4.2 vorgestellt und die robuste Konvergenz unabhängig von Kluftweite und Sprüngen in den Koeffizienten  $K(x)$  in Kluft und Matrix für eine Parallelogrammzerlegung der Klüfte gezeigt.

#### 3.4.1 Teilraumkorrekturmethode

Wir haben das diskrete Problem (3.6) hierarchisch in die Teilprobleme Kluft, Matrix und Interface zerlegt. Der Vorteil dieser Vorgehensweise ist, daß so in den Teilproblemen Verfahren eingesetzt werden können, die den unterschiedlichen Gegebenheiten der verschiedenen Bereiche Kluft und Matrix des Gesamtproblems angepaßt sind. Aufbauend auf die in den vorangegangenen Abschnitten durchgeführte Zerlegung des Lösungsraums werden wir nun ein Gebietszerlegungsverfahren konstruieren. Das Verfahren gehört in die Klasse der Teilraumkorrekturverfahren. Diese bauen auf einer Zerlegung des Lösungsraums  $\mathcal{S}_{jk}$  in eine Anzahl von Teilräumen  $V_i \subset \mathcal{S}_{jk}$  ( $1 \leq i \leq J$ ) auf, so daß gilt

$$\mathcal{S}_{jk} = \sum_{i=1}^J V_i.$$

Zu jedem  $v \in \mathcal{S}_{jk}$  existieren also  $v_i \in V_i$  ( $1 \leq i \leq J$ ), so daß  $v = \sum_{i=1}^J v_i$ . Dann können wir auf jedem Teilraum  $V_i$  ein Problem der Form

$$p_i \in V_i \quad a(p_i, v) = l(v) \quad \forall v \in V_i \quad (3.29)$$

lösen. Für große Teilräume  $V_i$  kann die Lösung der Teilraumprobleme (3.29) noch zu aufwendig sein, daher werden die Teilprobleme (3.29) meist approximativ gelöst. Dazu ersetzen wir in den Teilproblemen (3.29) die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  durch einen Glätter  $b_i(\cdot, \cdot)$ . Die Operatorarstellung von  $b_i(\cdot, \cdot)$  bezeichnen wir mit  $B_i$ .

Die Teilraumkorrekturmethode geht von einer gegebenen Näherungslösung  $p^{\text{alt}}$  des diskreten Problems (3.6) aus. Mit dem Residuum

$$r_{p^{\text{alt}}}(v) = l(v) - a(p^{\text{alt}}, v)$$

und

$$e \in \mathcal{S}_{jk} \quad a(e, v) = r_{p^{\text{alt}}}(v) \quad \forall v \in \mathcal{S}_{jk}$$

erhalten wir die Lösung des diskreten Problems (3.6) als  $p = p^{\text{alt}} + e$ . Stattdessen lösen wir das auf den Teilraum  $V_i$  eingeschränkte Problem

$$e_i \in V_i \quad a(e_i, v) = r_{p^{\text{alt}}}(v) \quad \forall v \in V_i$$

approximativ für alle  $i$ .

Statt die Teilraumkorrektur quasi simultan auf allen  $V_i$  durchzuführen, betrachten wir die sequentielle Teilraumkorrekturmethode, bei der in einem Teilraum immer die aktuellste Approximation von  $p$  eingeht, d.h. nach jeder Teilraumkorrektur ein Update des Residuums durchgeführt wird.

### Algorithmus 1 (Sequentielle Teilraumkorrekturmethode)

gegeben: Iterierte  $p^k =: w_{-1} \in \mathcal{S}_{jk}$

für  $i = 0, \dots, J$  berechne

$$\left\{ \begin{array}{l} v_i \in V_i : \quad b_i(v_i, v) = r_{w_{i-1}}(v) \quad \forall v \in V_i \\ w_i = w_{i-1} + v_i \end{array} \right\}$$

neue Iterierte:  $p^{v+1} = w_J$

Für den Spezialfall  $V_i = \text{span}\{\lambda_i\}$  und  $b_i(\cdot, \cdot) = a(\cdot, \cdot)$  erhalten wir gerade das Gauß-Seidel-Verfahren.

Konvergenzanalysen für Teilraumkorrekturmethode basieren im allgemeinen auf den folgenden drei Bedingungen:

V0) Es gilt mit  $\omega_0 \geq 0$

$$a(v, v) \leq \omega_0 b_i(v, v) \quad \forall v \in V_i, \quad i = 0, \dots, J. \quad (3.30)$$

V1) Für jedes  $v \in \mathcal{S}_{jk}$  gibt es eine Zerlegung  $v = \sum_{i=0}^m v^i$  mit der Eigenschaft

$$\sum_{i=0}^m b_i(v, v) \leq K_1 a(v, v).$$

V2) Es seien  $v, w \in \mathcal{S}_{jk}$ . Dann sei  $\varepsilon_{i1}$  die kleinste Zahl mit

$$a(T_i v, T_i w) \leq \omega_0 \varepsilon_{i1} a(T_i v, v)^{\frac{1}{2}} a(T_i v, v)^{\frac{1}{2}}.$$

Dann setzen wir  $K_2 = \omega_0 \lambda_{\max}(\varepsilon)$  mit  $\varepsilon = (\varepsilon_{i1})_{i=0}^J$ .

Dabei setzen wir  $T_i = B_i^{-1} A_i P_i : \mathcal{S}_{jk} \rightarrow V_i$  mit der Ritz-Projektion  $P_i : \mathbb{R}^{n_{jk}} \rightarrow V_i$ , der Operatordarstellung  $A_i$  der Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  auf dem  $i$ -ten Teilraum  $V_i$  und der Operatordarstellung  $B_i$  des Teilraumlösers  $b_i(\cdot, \cdot)$  auf dem  $i$ -ten Teilraum.

Die drei Bedingungen haben die folgenden Bedeutungen: V0) beschreibt die Qualität des Teilraumlösers. Die Bedingung besagt, daß der Vorkonditionierer  $b_i(\cdot, \cdot)$  für hochfrequente Funktionen  $v \in V_i$  eine gute Näherung von  $a(v, v)$  liefert, sie wird daher auch als

Glättungseigenschaft bezeichnet. V1) beschreibt im wesentlichen die Stabilität der Zerlegung für gegebene Teilraumlöser. Die verschärfte Cauchy–Schwarz–Ungleichung V2) beschreibt die Interaktion der Teilräume unter Berücksichtigung der Teilraumlöser.

Sind die Bedingungen V0)–V2) erfüllt, so gilt für die Konvergenz der Teilraumkorrekturmethode mit den Konstanten  $\omega_0$ ,  $K_1$  und  $K_2$ :

**Satz 8** *Unter den Voraussetzungen V0)–V2) mit  $\omega_0 < 2$  gilt*

$$\|p_{jk} - p_{jk}^{\gamma+1}\|^2 \leq \left(1 - \frac{2 - \omega_0}{K_1(1 + K_2)^2}\right) \|p_{jk} - p_{jk}^{\gamma}\|^2.$$

**Beweis:**

siehe z.B. Xu [69][Theorem 4.4], Yserentant [71]. □

### 3.4.2 Hierarchisches Gebietszerlegungsverfahren

Wir nutzen nun die in den Abschnitten 3.3.1, 3.3.2 und 3.3.3 vorgestellte Zerlegung des Lösungsraumes in die Teilräume Kluft, Interface und Matrix zur Konstruktion einer Teilraumkorrekturmethode (siehe Abschnitt 3.4.1) für Kluft–Matrix–Systeme als hierarchisches Gebietszerlegungsverfahren. Die Abspaltung des Kluft- und des Interfaceraums und die Zerlegung des verbleibenden Matrixraums liefern uns die Zerlegung des Lösungsraums  $\mathcal{S}_{jk}$  in die Teilräume  $\mathcal{S}_{jk}^F$ ,  $\mathcal{S}_j^I$  und  $\sum_{l=0}^j \mathcal{S}_l^M$  und es gilt mit  $V_0 = \mathcal{S}_{jk}^F$ ,  $V_1 = \mathcal{S}_j^I$  und  $V_{l+2} = \mathcal{S}_l^M$  für  $l = 0, \dots, j$ :

$$\mathcal{S}_{jk} = \mathcal{S}_{jk}^F + \mathcal{S}_j^I + \sum_{l=0}^j \mathcal{S}_l^M = \sum_{i=0}^{j+2} V_i. \quad (3.31)$$

Das Kluft- und das Interfaceproblem werden im allgemeinen klein sein im Vergleich zum Gesamtproblem. Hier bietet sich also eine direkte Lösung der Teilprobleme an. Das Matrixproblem haben wir noch einmal in kleinere Teilprobleme unterteilt, auf jedem der Teilräume  $\mathcal{S}_l^M$  führen wir eine Gauß–Seidel–Glättung durch.

Mit dieser Zerlegung erhalten wir aus der sequentiellen Teilraumkorrekturmethode (Algorithmus 1) das folgende hierarchische Gebietszerlegungsverfahren:

#### Algorithmus 2 (Hierarchische Gebietszerlegung)

*gegeben:* Iterierte  $p_{jk}^{\gamma} \in \mathcal{S}_{jk}$

*löse:*

$$v_{jk}^F \in \mathcal{S}_{jk}^F : \quad a(v_{jk}^F, v) = \ell(v) - a(p_{jk}^{\gamma}, v) \quad \forall v \in \mathcal{S}_{jk}^F \quad (3.32)$$

*löse:*

$$v_{jk}^I \in \mathcal{S}_j^I : \quad a(v_{jk}^I, v) = \ell(v) - a(p_{jk}^{\gamma} + v_{jk}^F, v) \quad \forall v \in \mathcal{S}_j^I \quad (3.33)$$

*für  $l = 0, \dots, j$  löse:*

$$v_{j,l}^M \in \mathcal{S}_l^M : \quad a(v_{j,l}^M, v) = \ell(v) - a(p_{jk}^{\gamma} + v_{jk}^F + \sum_{i=0}^{l-1} v_{j,i}^M, v) \quad \forall v \in \mathcal{S}_l^M \quad (3.34)$$

$$\text{neue Iterierte: } p_{jk}^{\gamma+1} = p_{jk}^{\gamma} + v_{jk}^F + \sum_{i=0}^{l-1} v_{j,i}^{\overline{M}}$$

Wir wollen nun für die auf der Zerlegung (3.31) aufbauende Teilraumkorrekturmethode (Algorithmus 2) robuste Konvergenz zeigen. Dazu müssen wir die Bedingungen V0)–V2) aus Abschnitt 3.4.1 untersuchen.

Für direkte Lösung der Teilprobleme, also  $b_i(v, w) = a(v, w) \forall v, w \in V_i$ , ist V0) mit  $\omega_0 = 1$  erfüllt. Insbesondere gilt also für das Kluftproblem mit  $V_0 = \mathcal{S}_{jk}^F$  und das Interfaceproblem mit  $V_1 = \mathcal{S}_j^I$

$$a(v, v) = b_i(v, v) \quad \forall v \in V_i, \quad i = 0, 1.$$

Für die Teilraumlösung in den Teilproblemen des Matrixproblems gilt:

**Lemma 18** *Es sei  $A$  eine symmetrisch positiv definite Matrix  $A = L + D + L^T$  mit der unteren Dreiecksmatrix  $L$ , der Diagonalmatrix  $D$  und der oberen Dreiecksmatrix  $L^T$ . Der Glätter  $B$  sei das symmetrische Gauß–Seidel–Verfahren mit  $B = (L + D)^T D^{-1} (D + L)$ . Dann gilt:*

$$\max_{x \neq 0} \frac{(x, Ax)}{(x, Bx)} = 1.$$

**Beweis:**

Die Matrixdarstellung des Glätters läßt sich wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} B &= (L + D)^T D^{-1} (D + L) = (L^T + D) D^{-1} (L + D) \\ &= L + D + L^T + L^T D^{-1} L = A + F. \end{aligned}$$

mit  $F = L^T D^{-1} L$ . Daraus folgt

$$\frac{(v, Av)}{(v, Bv)} = \frac{(v, Av)}{(v, Av) + (v, Fv)} \leq \frac{(v, Av)}{(v, Av)} = 1.$$

Bleibt noch zu zeigen, daß ein Vektor  $v^*$  mit  $Fv^* = 0$  existiert. Für den letzten Spaltenvektor der Einheitsmatrix  $v^* = (0, \dots, 0, 1)^T$  gilt  $Lv^* = 0$  und damit auch  $Fv^* = 0$ . □

Aus Lemma 18 folgt  $\omega_0 = 1$  in der Bedingung V0) (3.30) für den symmetrischen Gauß–Seidel–Glätter in den Teilproblemen des Matrixproblems.

Aus der Stabilität der Zerlegungen (Korollar 2, Korollar 3 und Satz 7) erhalten wir für V1) mit  $\forall v \in \mathcal{S}_{jk} \exists v = v^F + v^I + \sum_{l=2}^{j+2} v_l^M$ , mit  $v^F \in \mathcal{S}_{jk}^F$ ,  $v^I \in \mathcal{S}_j^I$ ,  $v_l^M \in V_l^M$ :

$$\|v^F\|^2 + \|v^I\|^2 + \sum_{l=2}^{j+2} \|v_l^M\|^2 \leq C(k+1)(j+1)^2 \|v\|^2.$$

Dabei hängt die Konstante  $C = C(\sigma_\varepsilon, \sigma_{\varepsilon-1})$  mit  $\sigma_\varepsilon, \sigma_{\varepsilon-1}$  aus (3.17) davon ab, daß keine Anisotropie in den Klüften normal zur Kluftrichtung auftritt und wie stark die Elemente in den Klüften von Parallelogrammen abweichen. Damit ist V1) mit  $K_1 = C(k+1)(j+1)^2$  erfüllt. Die Konstante  $K_2$  ist nach der Chauchy–Schwarz–Ungleichung und dem Satz von Gerschgorin

(siehe z.B. Stoer, Bulirsch [60][Satz 6.9.4]) beschränkt durch die Anzahl der Teilräume:  
 $K_2 \leq \omega_0(j + 2 + 1)$ .

Daraus folgt nun mit Satz 8 die Konvergenz des hierarchischen Gebietszerlegungsverfahrens:

**Satz 9** *Das hierarchische Gebietszerlegungsverfahren (Algorithmus 1 mit der Teilraumzerlegung (3.31)) konvergiert mit der Konvergenzrate*

$$\rho = 1 - \frac{C}{(1+k)(1+j)^2(j+4)^2} \quad (3.35)$$

mit einer Konstanten  $C$ , die nur von der Ausgangszerlegung  $\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{Q}_0$ , der Abweichung des anisotropen Trapeznetzes in den Klüften von Parallelogrammen und einer Bedingung an  $j$ , daß  $\varepsilon = \mathcal{O}(2^{-j})$  klein ist, abhängt.

### 3.5 Variante: Zweilevel–Verfahren

In diesem Abschnitt stellen wir eine Variante des hierarchischen Gebietszerlegungsverfahrens aus Abschnitt 3.4.2 vor, bei der wir ohne direkte Lösung auf dem Kluft–Matrix–Interface auskommen. Die Grundidee des hier vorgestellten hierarchischen Zweilevel–Verfahrens gleicht dabei der des hierarchischen Gebietszerlegungsverfahrens aus Abschnitt 3.4.2.

Wir nehmen zunächst eine hierarchische Zerlegung in ein Matrix– und ein Kluftproblem vor. In den daraus resultierenden Einzelproblemen verwenden wir spezielle problemangepasste Glätter.

Wir betrachten wieder die zu den Zerlegungen  $\mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{jk}$  gehörenden Finite–Elemente–Ansatzräume  $\mathcal{S}_{jk}$  aus (3.5). Wir fassen die Zerlegung  $\mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{jk}$  mit dem Finite–Elemente–Raum  $\mathcal{S}_{jk}$  als Verfeinerung von  $\mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{j0}$  mit dem Finite–Elemente–Raum  $\mathcal{S}_{j0}$  auf. Dann erhalten wir für festes  $j$  und  $k$  die hierarchische Basis  $\hat{\lambda}$  wie folgt (siehe z.B. Bank, Dupont, Yserentant [8]):

1. Die hierarchischen Basisfunktionen  $\hat{\lambda}_i^{jk}$  auf  $\mathcal{S}_{j0}$  stimmen mit den Knotenbasisfunktionen  $\lambda_i^{jk}$  überein:

$$\hat{\lambda}_i^{jk} := \lambda_i^{jk}, \quad i \in \mathcal{N}_{j0}.$$

2. Für  $k = 1, 2, \dots$  besteht die hierarchische Basis von  $\mathcal{S}_{jk}$  aus den hierarchischen Basisfunktionen

$$\hat{\lambda}_i^{j0}, \quad i \in \mathcal{N}_{j0}$$

von  $\mathcal{S}_{j0}$  und den nodalen Basisfunktionen

$$\hat{\lambda}_i^{j0} := \lambda_i^{jk}, \quad i \in \mathcal{N}_{jk} \setminus \mathcal{N}_{j0}.$$

Wir erhalten die hierarchische Basis von  $\mathcal{S}_{jk}$  also aus der Basis von  $\mathcal{S}_{j0}$  durch Hinzunahme der nodalen Basisfunktionen von Level  $jk$  zu den Knoten, die nicht auch Knoten von  $\mathcal{S}_{j0}$  sind. Daraus ergibt sich eine natürliche Zerlegung des Finite–Elemente–Ansatzraums  $\mathcal{S}_{jk}$ :

$$\mathcal{S}_{jk} = \mathcal{V}_F \oplus \mathcal{V}_M \quad (3.36)$$

mit

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_F &= \mathcal{S}_{j_0} \\ \mathcal{V}_M &= \text{span}\{\lambda_p^{jk} \mid p \in \mathcal{N}_{jk} \setminus \mathcal{N}_{j_0} \quad \forall k \geq 1\}.\end{aligned}$$

Für den uniform verfeinerten 1D-Fall ist die hierarchische Basis in Abbildung 3.19 dargestellt. Mit  $V_0 = \mathcal{V}_F$  und  $V_1 = \mathcal{V}_M$  ergibt sich so auf natürliche Weise eine Teilraumkorrekturmethode (siehe Algorithmus 1). Auf die Wahl der Glätter  $b_i$  kommen wir später zurück. Wir erinnern an dieser Stelle daran, daß es wie bei der Teilraumkorrekturmethode aus Abschnitt 3.4.1 möglich ist, unterschiedliche Glätter in den einzelnen Teilräumen einzusetzen.

Die hierarchische Zerlegung in einen Matrixraum und einen Kluftraum ist mit  $\mathcal{V}_F = \mathcal{S}_{jk}^F$  und  $\mathcal{V}_M = \mathcal{S}_j^{\overline{M}}$  dieselbe, die wir schon bei der Abspaltung des Klufttraums bei der hierarchischen Gebietszerlegung in Abschnitt 3.3.1 vorgestellt haben:

$$\mathcal{S}_{jk} = \mathcal{S}_j^{\overline{M}} \oplus \mathcal{S}_{jk}^F.$$

Dabei wird der Matrixraum  $\mathcal{S}_j^{\overline{M}}$  von den Knotenbasisfunktionen zum Matrixgitter  $\mathcal{N}_j^M = \mathcal{N}_{jk} \setminus \{x_i\}$ ,  $x_i$  Kluftknoten, und der Kluftraum  $\mathcal{S}_{jk}^F$  von den Knotenbasisfunktionen zu den Knoten im Inneren der Kluft aufgespannt (siehe Abbildung 3.19). Unser Ziel ist es, das

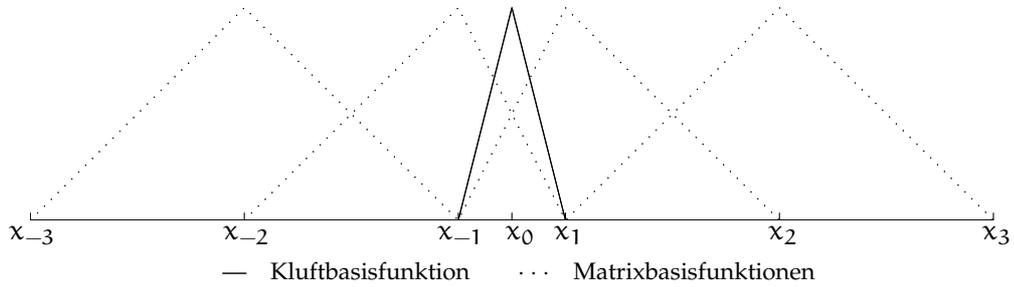


Abbildung 3.19: Hierarchische Zerlegung

Gleichungssystem (3.9) zu dem Randwertproblem (2.17) mit dem diskreten Lösungsraum  $\mathcal{S}_{jk}$  in der nodalen Basis  $\lambda^{jk}$  zu lösen. Dazu gehen wir nun mit  $\hat{p}_{jk} = \sum_{q \in \mathcal{N}_{jk}} \hat{p}_q^{jk} \lambda_q^{jk}$  zu der hierarchische Basen Formulierung

$$\hat{A}\hat{P} = \hat{b} \quad (3.37)$$

über. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\hat{A}$  des hierarchischen Gleichungssystems (3.37), die sich aus allen Knotenbasisfunktionen aus den Matrix- und den Kluftknoten ergibt, stellt sich dann bei geeigneter Numerierung wie folgt dar:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{A}_{MM} & \hat{A}_{MK} \\ \hat{A}_{KM} & \hat{A}_{KK} \end{pmatrix}.$$

Dabei werden, ähnlich wie schon bei dem hierarchischen Gebietszerlegungsverfahren, die Diagonalanteile  $\hat{A}_{MM}$  und  $\hat{A}_{KK}$  jeweils nur von Matrixbasisfunktionen bzw.

Kluftbasisfunktionen erzeugt. Die Kopplungen zwischen Matrix- und Kluftknoten stehen in den Nebendiagonal-Einträgen  $\hat{A}_{MK}$  und  $\hat{A}_{KM}$ . Dann führt die sequentielle Teilraumkorrekturmethode (Abschnitt 3.4.1, Algorithmus 1) auf eine entsprechende Zerlegung des Ausgangsproblems in zwei Teilprobleme und damit auf das folgende iterative Zweilevel-Verfahren.

### Algorithmus 3 (Zweilevel-Verfahren)

gegeben:  $p_{jk}^\gamma \in \mathcal{S}_{jk}^\varepsilon$

löse:

$$v_j^{\overline{M}} \in \mathcal{S}_j^{\overline{M}} : \quad a(v_j^{\overline{M}}, v) = \ell(v) - a(p_{jk}^\gamma, v) \quad \forall v \in \mathcal{S}_j^{\overline{M}} \quad (3.38)$$

löse:

$$v_{jk}^F \in \mathcal{S}_{jk}^F : \quad a(v_{jk}^F, v) = \ell(v) - a(p_{jk}^\gamma + v_j^{\overline{M}}, v) \quad \forall v \in \mathcal{S}_{jk}^F \quad (3.39)$$

neue Iterierte:  $p_{jk}^{\gamma+1} = p_{jk}^\gamma + v_j^{\overline{M}} + v_{jk}^F$

Für die Konvergenz dieses Zweilevel-Verfahrens ist die Lösung der Teilprobleme entscheidend. Ist die Anzahl der Freiheitsgrade in den Teilproblemen zu groß, kommt eine exakte Lösung von Kluft- und Matrixproblem nicht in Frage. Das Kluftproblem ist dasselbe wie in dem hierarchischen Gebietszerlegungsverfahren aus Abschnitt 3.4.2. Wir können das Kluftproblem also wieder direkt lösen oder ein Mehrgitterverfahren mit einem speziellen (Linien-) Glätter für anisotrope Probleme (z.B. Bramble, Zhang [16]) einsetzen. Der entscheidende Unterschied zu dem hierarchischen Gebietszerlegungsverfahren aus Abschnitt 3.4.2 liegt im Matrixproblem. Die Basisfunktionen des Matrixproblems der hierarchischen Gebietszerlegung aus Abschnitt 3.4.2 am Klufrand treten hier nicht auf. Das Matrixproblem wird am Klufrand von den Interface-Basisfunktionen aufgespannt. Dadurch sind die Basisfunktionen des Matrixproblems am Klufrand einseitig sehr steil. Klassische Mehrgitterverfahren versagen für diese Art von Problemen. In Abschnitt 3.3.3 haben wir daher die einseitig steilen Basisfunktionen in ein Interfaceproblem abgespaltet, welches wir direkt gelöst haben. Die über die Kluftbreite konstanten Basisfunktionen des Matrixproblems des hierarchischen Gebietszerlegungsverfahrens (Abschnitt 3.4.2) benutzen wir in dem hier betrachteten hierarchischen Zweilevel-Verfahren als Grundlage für geometrieangepaßte Glättungsschritte am Kluft-Matrix-Übergang im Matrixproblem. Diese werden im folgenden vorgestellt.

**Robuste Gauß-Seidel-Glätter für das Matrixproblem** Mit der hierarchischen Zerlegung in Kluft- und Matrixproblem haben wir zwar ermöglicht, in Kluft und Matrix unterschiedliche Lösungsverfahren zu verwenden, die angesprochenen Probleme durch sehr unterschiedliche Elementgrößen am Kluft-Matrix-Übergang und dadurch bedingte einseitig steile Basisfunktionen haben wir aber noch nicht beseitigt. Zur iterativen Lösung des Matrixproblems soll nun ein geeignetes Mehrgitterverfahren bereitgestellt werden. Grundlage ist die Gitterhierarchie

$$\mathcal{N}_0^M \subset \mathcal{N}_1^M \subset \dots \subset \mathcal{N}_j^M,$$

und die entsprechende Hierarchie von Finite-Elemente-Räumen

$$\mathcal{S}_0^M \subset \mathcal{S}_1^M \subset \dots \subset \mathcal{S}_j^M$$

(vergleiche Abb. 3.19).

Um die Abhängigkeit des Problems von der Kluftweite  $\varepsilon$  zu verdeutlichen, bezeichnen wir im folgenden den Finite-Elemente-Raum mit  $\mathcal{S}_{jk}^\varepsilon = \mathcal{S}_{jk}$  und die dazugehörige Menge der Knoten mit  $\mathcal{N}_{jk}^\varepsilon = \mathcal{N}_{jk}$ .

Wir betrachten zunächst das (klassische) Mehrgitterverfahren mit kanonischer Restriktion und Prolongation sowie Gauß-Seidel-Glätter. Als Grobgitterkorrektur im Knoten  $x_{-1} = -\frac{\varepsilon}{2} \in \mathcal{N}_i^M$  (linker Klufttrand) auf Level  $i$  erhält man

$$z_{-1,i} = \frac{f(\lambda_{-1,i}) - a(w, \lambda_{-1,i})}{a(\lambda_{-1,i}, \lambda_{-1,i})}. \quad (3.40)$$

Dabei ist  $\lambda_{-1,i} \in \mathcal{S}_i^M$  die Knotenbasisfunktion zu  $x_{-1}$  auf Level  $i$  und  $w \in \mathcal{S}_j^M$  eine beliebige Zwischeniterierte. Im Falle  $\varepsilon \rightarrow 0$  gilt

$$\|\lambda_{-1,i}\| = a(\lambda_{-1,i}, \lambda_{-1,i})^{1/2} \rightarrow \infty$$

und daher  $z_{-1,i} \rightarrow 0$ . Mit verschwindender Kluftweite  $\varepsilon$  verschwinden also auch die Grobgitterkorrekturen am Klufttrand und die Konvergenzgeschwindigkeit nimmt dramatisch ab. Diese Eigenschaft ist typisch für klassische Mehrgitterverfahren.

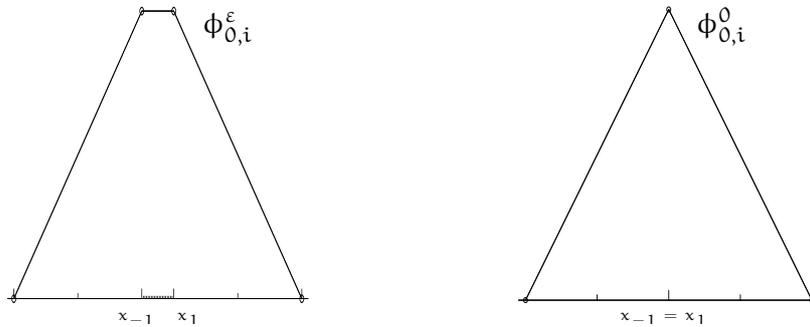


Abbildung 3.20: Grobgittersuchrichtung / zusätzlicher Glättungsschritt

Um auch für  $\varepsilon \rightarrow 0$  ein robustes Konvergenzverhalten zu erreichen, wird am Klufttrand eine zusätzliche, Geometrie-angepasste Korrektur

$$z_{0,i}^\varepsilon = \frac{f(\phi_{0,i}^\varepsilon) - a(w, \phi_{0,i}^\varepsilon)}{a(\phi_{0,i}, \phi_{0,i}^\varepsilon)} \quad (3.41)$$

in Richtung

$$\phi_{0,i}^\varepsilon = \lambda_{-1,i} + \lambda_{1,i}$$

durchgeführt. Ersetzt man in Algorithmus 3 die exakte Lösung des Matrixproblems durch eine Mehrgitteriteration mit Zusatzglättung (3.41) am Klufttrand, so erhält man ein neues *Mehrgitterverfahren für Kluftprobleme*.

Beachte, daß  $\phi_{0,i}^\varepsilon$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen die Grobgitterknotenbasisfunktion  $\phi_{0,i}^0$  für das reduzierte Gitter  $\mathcal{N}_i^0 = \mathcal{N}_i \setminus \{x_{-1}, x_1\}$  konvergiert (vgl. Abb. 3.20). Die  $z_{0,i}^0$  sind damit gerade die lokalen Gauß–Seidel–Korrekturen des klassischen Mehrgitterverfahrens mit Gauß–Seidel–Glätter angewandt auf das reduzierte Problem

$$p_j^0 \in \mathcal{S}_j^0: \quad a^0(p_j, v) = \ell(v) \quad \forall v \in \mathcal{S}_j^0. \quad (3.42)$$

Das reduzierte Problem (3.42) beschreibt die Situation im Falle  $x_{-1} = x_0 = x_1$ , also ohne Kluft. Für festes  $j, k$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$  geht das Mehrgitterverfahren für das Matrixproblem gegen das klassische Mehrgitterverfahren. Das bedeutet insbesondere robustes Konvergenzverhalten bezüglich der Kluftweite.

Praktische Untersuchungen des Konvergenzverhaltens dieses Zweilevel–Verfahrens werden in Kapitel 6 vorgestellt.