Anhang 1: Modell zur Bestimmung von Standardbausteinen

Das nachfolgende Modell bestimmt für eine gegebene Anzahl von zu erstellenden Sortimentsbausteinen die darin enthaltenen Artikel. Gleichzeitig werden die Bausteine Outlets zugeordnet, in denen Sie zur Anwendung kommen sollen. Dabei ist nicht ausgeschlossen, dass ein Artikel in unterschiedlichen Bausteinen enthalten ist, so dass es zu Mehrfachplatzierungen kommen kann. In diesem Modell gehen die Roherträge mehrfach platzierter Artikel nur einfach in die Berechnung ein. Zur Vereinfachung bleiben Regaldetails der Outlets sowie die Platzierung unterschiedlicher Facinganzahlen von Artikel unberücksichtigt. Die Integration von Sortimentsregeln ist prinzipiell ebenfalls möglich, sie wird hier allerdings nicht weiter thematisiert.

Indexmengen

I Menge der Artikel

O Menge der Outlets

B Menge der Bausteine

Indexe

i Artikelindex, $i \in I$

o Outletindex, $o \in O$

b Bausteinindex, $b \in B$

Entscheidungsvariablen

$X_{i,b,o}$ 1, wenn Artikel i in Baustein b im Outlet o platziert ist, sonst 0, $X_{i,b,o} \in \{0, 1\}$

$Z_{i,b}$ 1, wenn Artikel i im Baustein b enthalten ist, sonst 0, $Z_{i,b} \in \{0, 1\}$

$Y_{b,o}$ 1, wenn der Baustein b in Outlet o verwendet wird, sonst 0, $Y_{b,o} \in \{0, 1\}$

$A_{i,o}$ Gibt an, wie oft ein Artikel i im Outlet o platziert wird, $A_{i,o} \in \mathbb{N}$

$D_{i,o}$ 1, wenn Artikel i in Outlet o platziert wird, $D_{i,o} \in \{0, 1\}$

Parameter

$C_{i,o}$ Leistungskennzahl des Artikels i im Outlet o [GE]

K_i Kontaktstrecke des Artikels i [LE]

R_o Regallänge des Outlets o [LE]

L_b Maximale Länge des Bausteins b [LE]

Zielfunktion

$$Maximiere \quad Z = \sum_{i \in I} \sum_{o \in O} C_{i,o} * D_{i,o} \tag{A1 - 1}$$

Restriktionen

Regallängenlimitation

$$\sum_{i \in I} \sum_{b \in B} K_i * X_{i,b,o} \leq R_o \quad , \forall o \in O \tag{A1 - 2}$$

Bausteingrößenlimitation

$$\sum_{i \in I} K_i * Z_{i,b} \leq L_b \quad , \forall b \in B \tag{A1 - 3}$$

Die Zielfunktion (A1 - 1) maximiert den Rohertrag aller Artikel, die in einem Baustein für ein Outlet zum Einsatz kommen. Dabei können Mehrfachplatzierungen von Artikeln auftreten, die nur einfach in die Berechnung eingehen. Werden z. B. zwei Bausteine in einem Outlet eingesetzt, die einen identischen Artikel *i* enthalten, so fließt lediglich der einfache Leistungsbetrag des Artikels *i* in die Zielfunktion ein. Anders hingegen ist es bei der Regallängenlimitation gemäß Restriktion (A1 - 2). Hier darf die Gesamtregallänge eines Outlets bei der Zuordnung der Artikel nicht überschritten werden, wobei Mehrfachplatzierungen selbstverständlich berücksichtigt werden müssen. Individuell können auch für Bausteine Angaben zur einer Maximallänge gemacht werden, die bei der Artikelzuordnung eingehalten werden muss (A1 - 3).

Artikelzuordnung

$$2X_{i,b,o} \leq Z_{i,b} + Y_{b,o} \leq 1 + X_{i,b,o} \quad , \forall i \in I, b \in B, o \in O \tag{A1 - 4}$$

$$\sum_{o \in O} X_{i,b,o} \leq |O| * Z_{i,b} \quad , \forall i \in I, b \in B \tag{A1 - 5}$$

$$\sum_{i \in I} X_{i,b,o} \leq |I| * Y_{b,o} \quad , \forall b \in B, o \in O \tag{A1 - 6}$$

Ist Artikel *i* in Baustein *b* enthalten und wird *b* in Outlet *o* platziert ($X_{i,b,o} = 1$) , muss der Artikel *i* im Baustein *b* vorhanden und der Baustein *b* dem Outlet *o* zugeordnet sein. Daher ist es notwendig, dass die Variablen $Z_{i,b}$ und $Y_{b,o}$ den Wert eins annehmen (A1 - 4). Umgekehrt kann nur dann die Variable $X_{i,b,o}$ den Wert eins annehmen, wenn der Artikel i dem Baustein b zugeordnet wird ($Z_{i,b} = 1$) (A1 - 5). Entsprechend wird die Variable $X_{i,b,o}$ nur dann eins , wenn der Baustein b dem Outlet o zugeordnet ist (A1 - 6).

Artikelplatzierung

$$A_{i,o} = \sum_{b \in B} X_{i,b,o} \quad , \forall i \in I, o \in O \qquad \text{(A1 - 7)}$$

$$A_{i,o} \leq |B| * D_{i,o} \quad , \forall i \in I, o \in O \qquad \text{(A1 - 8)}$$

$$A_{i,o} \geq D_{i,o} \quad , \forall i \in I, o \in O \qquad \text{(A1 - 9)}$$

Ein Artikel i kann in mehreren Bausteinen vorhanden sein, die wiederum gleichzeitig in Outlet o eingesetzt werden. Damit kommt es zur Mehrfachplatzierung. Wie oft ein Artikel aufgrund der Platzierung von Bausteinen in einem Outlet vorkommt, wird in der Variablen $A_{i,o}$ gezählt (A1 - 7). Kommt es zur Platzierung eines Artikels in einem Outlet, wird die Variable $D_{i,o}$ auf den Wert eins gesetzt (A1 - 8), die mit der Leistungskennzahl des Artikels in der Zielfunktion verknüpft ist. Umgekehrt stellt die letzte Restriktion (A1 - 9) sicher, dass nur bei einer Platzierung des Artikels im Outlet die Variable $D_{i,o}$ den Wert eins erhält.

Anhang 2: Zweidimensionale Sortimentsoptimierung

Bei der zweidimensionalen Sortimentsoptimierung wird versucht, aus einer gegebenen Anzahl von Artikeln die ertragreichste Kombination auszuwählen, die überlappungsfrei in eine vorgegebene Fläche, z. B. eine Kühltruhe, platziert werden kann.

Diese Art der Problemstellung wird in der Literatur als „Packing Problem“ behandelt, welches in speziellen Varianten diskutiert wird (Cutting-Stock-Problem, Pallet Loading, Bin Packing, Tree-Dimensional-Packing, Non-Recangular Packing) (vgl. *Dowsland / Dowsland (1992)*). Das vorliegende Problem wird als „2-dimensional cutting-stock problem“ oder „2-dimensional knapsack-problem“ bezeichnet, welches hier an die Sortimentsoptimierung angepasst wird. Anstelle der Minimierung des Verschnitts wird, wie bei der „einfachen“ Sortimentsoptimierung, eine Leistungskennzahl wie der Artikelrohertrag maximiert.

Problembeschreibung

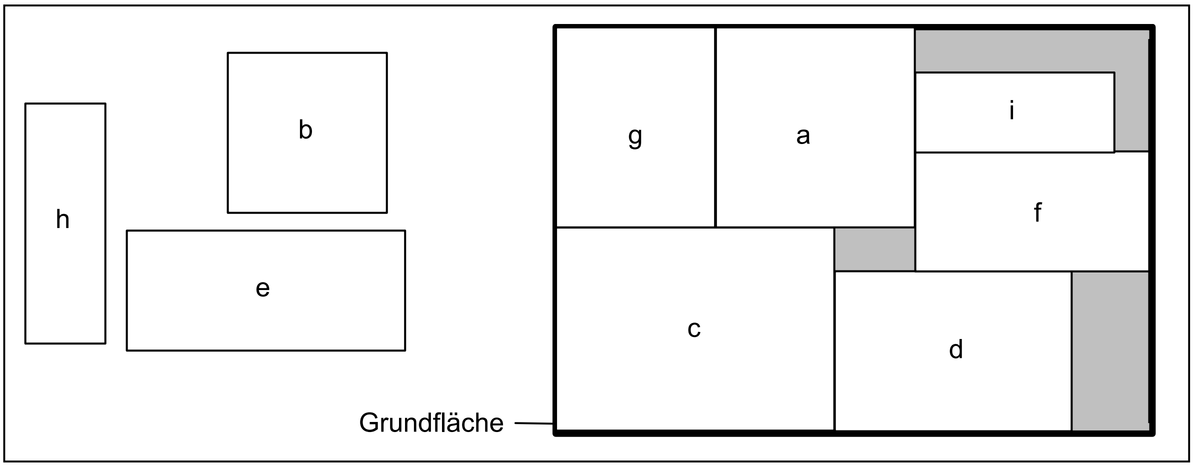

Abbildung 62: Beispiel 2-dimensionale Platzierung

Es wird eine einzelne rechteckige Fläche (Grundfläche) betrachtet, in der Artikel platziert werden können (siehe Abbildung 62). Die einzelnen Artikelflächen sind ebenfalls rechteckig, so dass Artikel mit einer runden Stellfläche, wie z. B. Flaschen, entsprechend angepasst werden. Für die Artikelabmessungen sind nur ganzzahlige Werte zulässig. Entsprechend erfolgt die Platzierung eines Artikels innerhalb der Grundfläche nur in ganzzahligen Schritten, so dass die Eckpunkte der Artikel in der Grundfläche ebenfalls ganzzahligen Werten entsprechen. Diese Form der Diskretisierung stellt keine Einschränkung dar, da eine entsprechende Skalierung vorgenommen werden kann.

Ein Platzierungsmuster ist eine Kombination von Artikeln, die überlappungsfrei innerhalb der Dimensionen der Grundfläche angeordnet sind. Dabei wird als Platzierungspunkt die linke untere Ecke eines Artikels in der Grundfläche verstanden, der durch die Angabe der (x, y)-Koordinaten genau beschrieben ist. Zur Vereinfachung des Modells wird angenommen, dass ein Artikel lediglich in einer Orientierungsrichtung platziert werden kann. Abbildung 63 zeigt am Beispiel eines Artikel zwei unterschiedliche Orientierungsrichtungen für die Platzierung des Artikels.

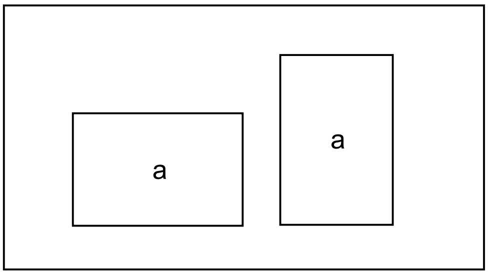

Abbildung 63: Orientierungsrichtungen

Normalisierung

Zur Reduzierung der Komplexität wird für die nachfolgend vorgestellten Lösungsverfahren das Prinzip der Normalisierung verwendet, welches von *Herz (1972)* als *canonical dissection* und von *Hadjiconstantinou / Christofides (1995)* als *normal cutting patterns* bezeichnet wird. Als normalisiert soll eine Artikelanordnung verstanden werden, bei der sich die linke untere Ecke eines jeden Artikels entweder an einer rechten unteren Ecke eines anderen Artikels oder an den Kanten der Grundfläche anschließt. Dadurch verringert sich die Anzahl von Platzierungsalternativen, ohne dass die optimale Platzierungskombination verloren geht.

Das folgende Beispiel mit zwei Artikeln dient zur Veranschaulichung des normalisierten Problems:

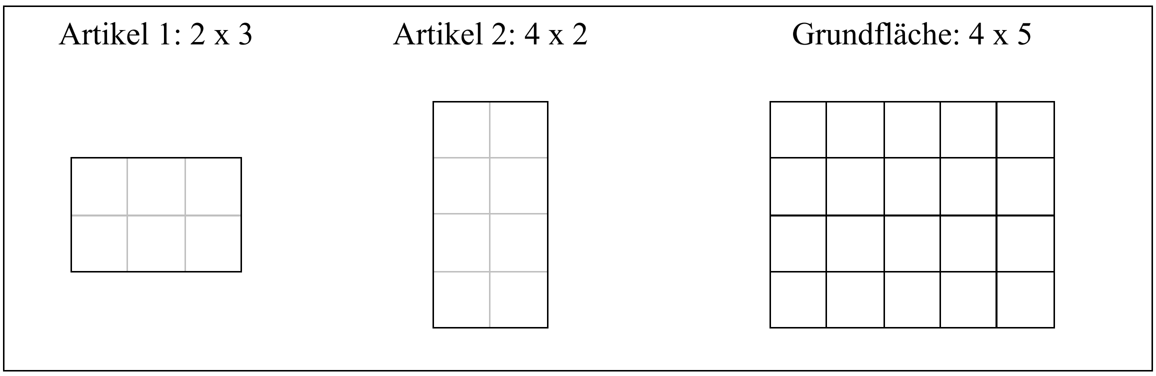

Abbildung 64: Beispiel Normalisierung

In Abbildung 65 ist jede mögliche Platzierungsalternative unabhängig von Artikelabmessungen als ein Punkt dargestellt, wobei sich 20 Möglichkeiten ergeben. Unter Beachtung der Normalisierung kann eine erhebliche Reduktion der Anzahl von Platzierungen erreicht werden (Abbildung 66).

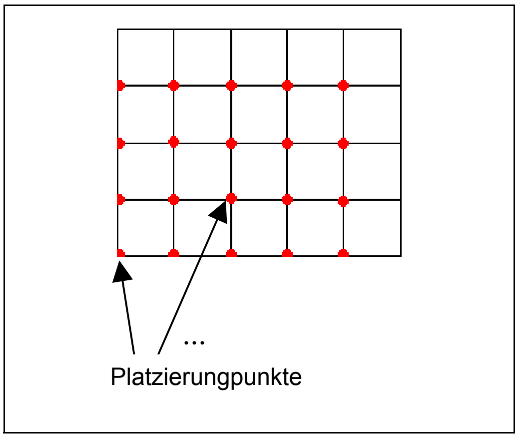

Abbildung 65: Platzierungsalternativen

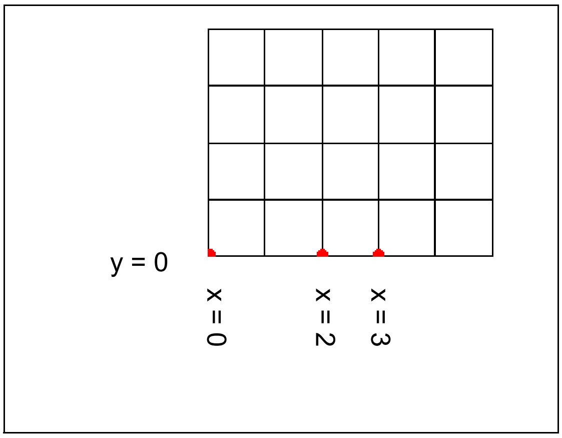

Abbildung 66: Reduzierte Platzierungsalternativen

In Abhängigkeit eines Artikels lassen sich die möglichen Platzierungsalternativen wie in Abbildung 67 und Abbildung 68 dargestellt zeigen:

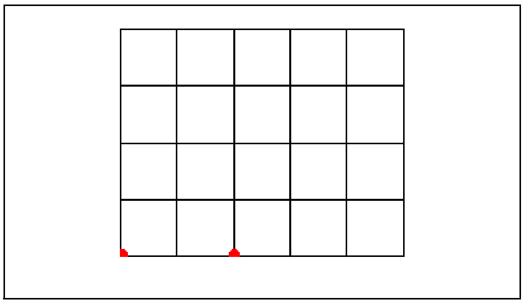

Abbildung 67: Platzierungsalternativen Artikel 1

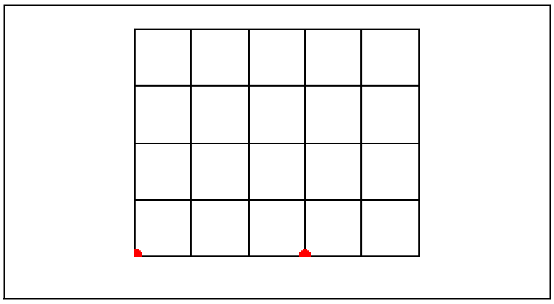

Abbildung 68: Platzierungsalternativen Artikel 2

Das Potential der Reduktionsmöglichkeiten ist umso höher, je größer der Anteil von Artikeln ist, welche die gleichen Abmessungen haben und je größer die Abmessungen der einzelnen Artikel im Verhältnis zur Grundfläche sind.

Nachfolgend werden zwei unterschiedliche 0-1 Optimierungsmodelle vorgestellt, die probeweise implementiert wurden. Das erste Modell folgt dabei der Formulierung von *Hadjiconstantinou / Christofides (1995)*, das an die Anforderungen der Sortimentsoptimierung angepasst wurde. Zur weiteren Vereinfachung werden in beiden Modellen weder mehrere Facinganzahlen noch Sortimentsregeln berücksichtigt.

Modell 1

Indexmengen und Indexe

I	Menge aller Artikel
i	Artikelindex, $i \in I$

Wertemengen

W	Menge aller normalisierten Koordinatenwerte auf der x-Achse, $W = \{ p \in \mathbb{N} \mid 0 \leq p \leq w_o\text{-}1\}$
H	Menge aller normalisierten Koordinatenwerte auf der y-Achse, $H = \{ q \in \mathbb{N} \mid 0 \leq q \leq h_0\text{-}1\}$
W_i	Menge aller normalisierten Koordinatenwerte auf der x-Achse für die Platzierung des Artikels i, $W_i = \{ p \in \mathbb{N} \mid 0 \leq p \leq w_0 - w_i\}$, $W_i \subseteq W$
H_i	Menge aller normalisierten Koordinatenwerte auf der y-Achse für die Platzierung des Artikels i, $H_i = \{ q \in \mathbb{N} \mid 0 \leq q \leq h_0 - h_i\}$, $H_i \subseteq H$

Parameter:

w_0	Breite der Grundfläche [LE]
h_0	Länge der Grundfläche [LE]
w_i	Breite des Artikels i [LE]
h_i	Länge des Artikels i [LE]
p	Koordinatenwert auf der x-Achse, $p \in W$
q	Koordinatenwert auf der y-Achse, $q \in H$
c_i	Leistungskennzahl des Artikels i [GE]
r_p	Unterschiedsbetrag zwischen dem Koordinatenwert p und dem nachfolgenden Koordinatenwert p_{+1} auf der x-Achse ($p_{+1} - p$), wobei beim letzten Wert m in W der Unterschiedsbetrag zum Ende der Grundflächenbreite ermittelt wird ($w_o - p_m$) [LE]
s_q	Unterschiedsbetrag zwischen dem Koordinatenwert q und dem nachfolgenden Koordinatenwert q_{+1} auf der y-Achse ($q_{+1} - q$), wobei beim letzten Wert n in H der Unterschiedsbetrag zum Ende der Grundflächenhöhe ermittelt wird ($h_o - q_n$) [LE]

Entscheidungsvariablen:

$X_{i,p}$ 1, wenn Artikel i an der horizontalen Position p platziert wird, sonst 0, $i \in I, p \in W_i$

$Y_{i,q}$ 1, wenn Artikel i an der vertikalen Position q platziert wird, sonst 0, $i \in I, q \in H_i$

$Z_{p,q}$ 1, wenn kein Artikel den Punkt überdeckt, sonst 0, $p \in W, q \in H$

Zielfunktion:

$$Maximiere\ Z = \sum_{i \in I} c_i \sum_{p \in W_i} X_{i,p} \qquad \text{(A2 - 1)}$$

Nebenbedingungen:

Jeder Punkt darf von nur einem Artikel überdeckt werden:

$$\sum_{p_1 \in \{W | p \le p_1 \le p + w_i\}} \sum_{q_1 \in \{H | q \le q_1 < q + h_i\}} Z_{p_1,q_1} \le (2 - X_{i,p} - Y_{i,q}) * h_i * w_i \qquad \text{(A2 - 2)}$$

$$, \forall i \in I, p \in W_i, q \in H_i$$

Jeder Artikel darf maximal einmal platziert werden:

$$\sum_{p \in W_i} X_{i,p} \le 1 \qquad , \forall i \in I \qquad \text{(A2 - 3)}$$

$$\sum_{p \in W_i} X_{i,p} = \sum_{q \in H_i} Y_{i,q} \qquad , \forall i \in I \qquad \text{(A2 - 4)}$$

Länge und Breite der Grundfläche darf nicht überschritten werden:

$$\sum_{i \in I} h_i \sum_{p_1 \in \{W_i | p - w_i + 1 \le p_1 \le p\}} X_{i,p_1} + \sum_{q \in H} s_q * Z_{p,q} = h_0 \qquad , \forall p \in W \qquad \text{(A2 - 5)}$$

$$\sum_{i \in I} w_i \sum_{q_1 \in \{H_i | q - h_i + 1 \le q_1 \le q\}} Y_{i,q_1} + \sum_{p \in W} r_p * Z_{p,q} = w_0 \qquad , \forall q \in H \qquad \text{(A2 - 6)}$$

Modell 2

Indexmengen:

I Menge aller Artikel

P Menge aller normalisierten Platzierungspunkte in der Grundfläche

P_i Menge aller normalisierten Platzierungspunkte des Artikels i, $i \in I$, $P_i \subseteq P$

$S_{i,p}$ Menge aller Platzierungspunkte des Artikels i, die den Platzierungspunkt p überlappen könnten, $i \in I, p \in P, S_{i,p} \subseteq P$

Indexe:

i Artikelindex, $i \in I$

p Platzierungspunktindex, $p \in P$

Parameter:

C_i Leistungskennzahl des Artikels i

Entscheidungsvariablen:

$Y_{i,p}$ 1, wenn Artikel i mit der linken unteren Ecke am Platzierungspunkt p platziert wird, sonst 0, $Y \in \{0, 1\}$, $i \in I$, $p \in P_i$

Zielfunktion:

$$Maximiere\ Z = \sum_{i \in I} C_i \sum_{p \in P_i} Y_{i,p} \qquad \text{(A2 – 7)}$$

Nebenbedingungen:

Jeder Punkt darf von nur einem Artikel überdeckt werden (keine Überlappung)

$$\sum_{i \in I} \sum_{p_1 \in S_{i,p}} Y_{i,p_1} \leq 1 \qquad ,\forall p \in P \qquad \text{(A2 - 8)}$$

Jeder Artikel darf maximal einmal platziert werden

$$\sum_{p \in P_i} Y_{i,p} \leq 1 \qquad ,\forall i \in I \qquad \text{(A2 - 9)}$$

Leider hat die testweise Implementation beider Modellfomulierungen bestätigt, was bereits vorab vermutet wurde: Für den praktischen Einsatz mit einer größeren Anzahl von Artikeln werden die heutigen Grenzen der IP-Optimierung erreicht, wobei zur Lösung in beide Fällen Standart-Optimierungssoftware (MOPS) eingesetzt wurde. Die Verwendung heuristischer Verfahren verspricht in diesem Zusammenhang einen größeren Erfolg, obwohl ebenfalls der Versuch als gescheitert anzusehen ist, durch implizite Enumeration mit Hilfe des Algorithmuses von *Wang (1983)* und den Verbesserungen von *Oliveira / Ferreira (1990)* Lösungen für größerer zweidimensionaler Sortimentsprobleme zu erhalten. Bei diesem Ansatz entstehen in kurzer Zeit enorme Ressourcenanforderungen, so dass möglicherweise Verfahren zur Tiefensuche, z. B. mit Hilfe eines Backtracking-Algorithmuses, Fortschritte auf diesem Gebiet erzielen könnten.