

Helmholtz Operator in Quaternionic Analysis

DISSERTATION

des Fachbereichs Mathematik und Informatik
der Freien Universität Berlin
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

Vorgelegt von

VU THI NGOC HA

aus Vietnam

10. Februar 2005

Tag der mündlichen Prüfung	10.02.2005
Dekan	Prof. Dr. Jochen Schiller
1. Berichterstatter	Prof. Dr. Heinrich Begehr
2. Berichterstatter	Prof. Dr. Le Hung Son

Zusammenfassung in Deutscher Sprache

Wie der Laplace Operator ist auch der allgemeinere Helmholtz Operator faktorisierbar. Im vierdimensionalen Raum spielt der Helmholtz Operator im Rahmen der Quaternionenanalyse eine wichtige, fundamentale Rolle. Der Helmholtz Operator und seine Faktorisierung in der Quaternionenanalyse sind die Grundlage unserer Arbeit. Von dem quernionischen Stokesschen Integralsatz

$$\int_{\Omega} [(D_r f(y))g(y) + f(y)Dg(y)]dy = \int_{\Gamma} f(y)\vec{n}(y)g(y)d\Gamma_y, \quad (Stokes)$$

wo $\vec{n} := \sum_{k=1}^3 n_k e_k$ den äußeren Normalenvektor auf $\Gamma := \partial\Omega$ bezeichnet und Ω ein beschränktes reguläres Gebiet ist, erhalten wir mit $\alpha \in \mathbb{C}$ die Gleichungen

$$\int_{\Omega} [(D_{r,-\alpha} f(y))g(y) + f(y)(D_{\alpha} g(y))]dy = \int_{\Gamma} f(y)\vec{n}(y)g(y)d\Gamma_y \quad (Eq1)$$

und

$$\int_{\Omega} [(D_{r,\alpha} f(y))g(y) + f(y)(D_{-\alpha} g(y))]dy = \int_{\Gamma} f(y)\vec{n}(y)g(y)d\Gamma_y. \quad (Eq2)$$

In dieser Arbeit sind die Gleichungen (Eq1) und (Eq2) ein grundlegendes Hilfsmittel.

In Kapitel 1 werden kurz einige grundlegenden Konzepte der algebraischen und strukturellen Eigenschaften der komplexen Quaternionen zusammengestellt. Es enthält auch die wichtigen Ergebnisse über die Gleichungen (Eq1) und (Eq2) und die Cauchy-Pompeiusche Integraldarstellung erster Ordnung.

In Kapitel 2 können wir mit Hilfe der Fundamentallösung der Helmholtz Gleichung die explizite Form der Fundamentallösung für Potenzen des Faktors des Helmholtz Operators konstruieren. Unter Verwendung der Formeln (Eq1) und (Eq2) wird eine Integraldarstellung vom Cauchy-Pompeiuschen Typ für Lösungen der inhomogenen Modellgleichung $D_{\alpha}^n f = g$ erhalten. Hier bezeichnet D_{α} einen Faktor des Helmholtz Operators $\Delta + \alpha^2$. Diese Ergebnisse geben Anlass, Eigenschaften des Teodorescu Operators höherer Ordnung zu untersuchen. Dieser Operator spielt in der Behandlung von Randwertproblemen eine wichtige Rolle, die in Kapitel 3 entwickelt werden. Mit Hilfe der Grundlösung der Helmholtz Gleichung wird hier das Dirichlet Problem für die inhomogene Helmholtz Gleichung und für solche Gleichungen mit Potenzen des Helmholtz Operators untersucht. Fragen von Existenz, Eindeutigkeit und Regularität der Lösungen werden beantwortet.

In Kapitel 4 werden dieselben Ideen wie in Kapitel 2 benutzt, um Darstellungen von Lösungen zur inhomogenen Helmholtz Gleichung zu erhalten. Mit Hilfe der Gleichungen (Eq1) und (Eq2) werden orthogonale Zerlegungen des komplexen quaternionenwertigen Hilbert Raumes sowohl bezüglich *links (rechts) α -hyperholomorpher Funktionen* als

auch bezüglich *poly-links (rechts) α -hyperholomorpher* und *polymetaharmonischer Funktionen* bereitgestellt. Auf dieser Grundlage wird das Dirichlet Problem für die inhomogene bimetaharmonische Gleichung

$$\begin{cases} (\Delta + \alpha^2)^2 u &= 0 & \text{in } \Omega, \\ \text{tr}_\Gamma u &= g_1 & \text{on } \Gamma, \\ \text{tr}_\Gamma D_\alpha u &= g_2 & \text{on } \Gamma, \end{cases}$$

untersucht, wo Ω ein beschränktes reguläres Gebiet ist.

In Kapitel 5 werden derselbe Zugang und die selben Ideen benutzt wie in den Kapiteln 2 und 4, um ähnliche Ergebnisse für eine allgemeinere Gleichung zu erhalten, die durch einen polynomialen Differentialoperator gegeben ist. Dieser Operator besteht aus einem Produkt von Potenzen von D_α Operatoren mit unterschiedlichen α . Eine Cauchy-Pompeiusche Integraldarstellung wird für seine Lösungen gewonnen.

Contents

Zusammenfassung in Deutscher Sprache	1
Introduction	5
Chapter 1. Quaternionic Analysis	9
1. Algebra of complex quaternions	9
2. The Moisil - Teodorescu differential operator	11
3. The Cauchy-Pompeiu integral representation	15
Chapter 2. Higher Order Teodorescu Operators in Quaternionic Analysis	21
1. Motivation	21
2. Integral representations for higher order D_α equations	22
3. Existence and continuity of integrals	28
4. Differentiability of integrals	31
5. Mapping properties of $T_{\alpha,n}$	36
Chapter 3. A Boundary Value Problem of the Helmholtz Equation	41
1. History and Motivation	41
2. The Dirichlet problem for the operator D_α	43
3. Orthogonal decomposition of the space $L_2(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$	47
4. Applications to boundary value problems of the Helmholtz equation	50
5. Boundary value problem of the higher order Helmholtz equations	55
Chapter 4. Integral Representations in Terms of Powers of the Helmholtz Operator	59
1. Integral representations for metaharmonic functions	59
2. Orthogonal decomposition of $L_2(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$	61
3. Integral representations in terms of powers of the Helmholtz operator	64
4. Dirichlet problem for bimetaharmonic function	68
Chapter 5. Integral Representation of Solutions to the General Inhomogeneous Polynomial Equation	73
1. A fundamental solution for a general polynomial operator	73
2. Representation for the general polynomial operator	74
Bibliography	83
Index	87