Helmholtz Operator in Quaternionic Analysis

DISSERTATION

des Fachbereichs Mathematik und Informatik

der Freien Universität Berlin

zur Erlangung des Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

Vorgelegt von

VU THI NGOC HA

aus Vietnam

10. Februar 2005

Tag der mündlichen Prüfung	10.02.2005
Dekan	Prof. Dr. Jochen Schiller
1. Berichterstatter	Prof. Dr. Heinrich Begehr
2. Berichterstatter	Prof. Dr. Le Hung Son

Zusammenfassung in Deutscher Sprache

Wie der Laplace Operator ist auch der allgemeinere Helmholtz Operator faktorisierbar. Im vierdimensionalen Raum spielt der Helmholtz Operator im Rahmen der Quaternionenanalysis eine wichtige, fundamentale Rolle. Der Helmholtz Operator und seine Faktorisierung in der Quaternionenanalysis sind die Grundlage unserer Arbeit. Von dem quernionischen Stokesschen Integralsatz

$$\int_{\Omega} [(D_r f(y))g(y) + f(y)Dg(y)]dy = \int_{\Gamma} f(y)\vec{n}(y)g(y)d\Gamma_y, \qquad (Stokes)$$

wo $\vec{n} := \sum_{k=1}^{3} n_k e_k$ den äußeren Normalenvektor auf $\Gamma := \partial\Omega$ bezeichet und Ω ein beschränktes reguläres Gebiet ist, erhalten wir mit $\alpha \in \mathbb{C}$ die Gleichungen

$$\int_{\Omega} [(D_{r,-\alpha} f(y))g(y) + f(y)(D_\alpha g(y))]dy = \int_{\Gamma} f(y)\vec{n}(y)g(y)d\Gamma_y \qquad (Eq1)$$

und

$$\int_{\Omega} [(D_{r,\alpha} f(y))g(y) + f(y)(D_{-\alpha} g(y))]dy = \int_{\Gamma} f(y)\vec{n}(y)g(y)d\Gamma_y. \qquad (Eq2)$$

In dieser Arbeit sind die Gleichungen (Eq1) und (Eq2) ein grundlegendes Hilfsmittel.

In Kapitel 1 werden kurz einige grundlegenden Konzepte der algebraischen und stukturellen Eigenschaften der komplexen Quaternionen zusammengestellt. Es enthält auch die wichtigen Ergebnisse über die Gleichungen (Eq1) und (Eq2) und die Cauchy-Pompeiusche Integraldarstellung erster Ordnung.

In Kapitel 2 können wir mit Hilfe der Fundamentallösung der Helmholtz Gleichung die explizite Form der Fundamentallösung für Potenzen des Faktors des Helmholtz Operators konstruieren. Unter Verwendung der Formeln (Eq1) und (Eq2) wird eine Integraldarstellung vom Cauchy-Pompeiuschen Typ für Lösungen der inhomogenen Modellgleichung $D_\alpha^n f = g$ erhalten. Hier bezeichnet D_α einen Faktor des Helmholtz Operators $\Delta + \alpha^2$. Diese Ergebnisse geben Anlass, Eigenschaften des Teodorescu Operators höherer Ordnung zu untersuchen. Dieser Operator spielt in der Behandlung von Randwertproblemen eine wichtige Rolle, die in Kapitel 3 entwickelt werden. Mit Hilfe der Grundlösung der Helmholtz Gleichung wird hier das Dirichlet Problem für die inhomogene Helmholtz Gleichung und für solche Gleichungen mit Potenzen des Helmholtz Operators untersucht. Fragen von Existenz, Eindeutigkeit und Regularität der Lösungen werden beantwortet.

In Kapitel 4 werden dieselben Ideen wie in Kapitel 2 benutzt, um Darstellungen von Lösungen zur inhomogenen Helmholtz Gleichung zu erhalten. Mit Hilfe der Gleichungen (Eq1) und (Eq2) werden orthogonale Zerlegungen des komplexen quaternionenwertigen Hilbert Raumes sowohl bezüglich *links (rechts) α-hyperholomorpher Funktionen* als auch bezüglich *poly-links (rechts)α-hyperholomorpher* und *polymetaharmonischer Funktionen* bereitgestellt. Auf dieserGrundlage wird das Dirichlet Problem für die inhomogene bimetaharmonische Gleichung

$$\begin{cases} (\Delta+\alpha^2)^2 u & = 0 \qquad \text{in } \Omega, \\ tr_\Gamma u & = g_1 \qquad \text{on } \Gamma, \\ tr_\Gamma D_\alpha u & = g_2 \qquad \text{on } \Gamma, \end{cases}$$

untersucht, wo Ω ein beschränktes reguläres Gebiet ist.

In Kapitel 5 werden derselbe Zugang und die selben Ideen benutzt wie in den Kapiteln 2 und 4, um ähnliche Ergebnisse für eine allgemeinere Gleichung zu erhalten, die durch einen polynomialen Differentialoperator gegeben ist. Dieser Operator besteht aus einem Produkt von Potenzen von D_α Operatoren mit unterschiedlichen α. Eine Cauchy-Pompeiusche Integraldarstellung wird für seine Lösungen gewonnen.

Contents