Mean Curvature Flow of Cylindrical Graphs

Dissertation
von
Joshua Stephen Bode[1]

zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
des Max-Planck-Instituts für Gravitationsphysik
(Albert-Einstein-Institut)
und des Fachbereichs Mathematik und Informatik
der Freien Universität Berlin

betreut von
Professor Klaus Ecker[2]
Professor Gerhard Huisken[3]

[1]Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik, Golm (Albert-Einstein-Institut) und Freie Universität, Berlin.
[2]Freie Universität, Berlin.
[3]Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik, Golm (Albert-Einstein-Institut).

for Em …

Erklärung

Ich bestätige hiermit, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel und Quellen verwendet habe.

Unterschrift:

Joshua Stephen Bode

Tag der mündlichen Qualifikation:	15 Januar 2007
1. Gutachter:	Prof. Dr. Klaus Ecker
2. Gutachter:	Prof. Dr. Gerhard Huisken

Acknowledgements

There are many people who have helped me throughout my thesis. Firstly, I want to thank my supervisors, Klaus Ecker and Gerhard Huisken, who have both helped me invaluably by providing me with expert advice, guidance and encouragement

I want to thank the Max Planck Institute, to which I am extremely grateful for their financial support, hospitality, and for the excellent opportunity it provided me to live and study in Germany. I also thank the Freie Universität, which has provided me with resources and an excellent working environment.

For their advice and support, I thank Maria Athenassenas and Marty Ross.

I thank my fellow students and colleagues Mark Aarons, Bernhard List, Kashif Rasul, James McCoy, John Buckland, Felix Schulze, Julie Clutterbuck, Amos Koeller, Paul Appleby - my thanks for all of your support, assistance and friendship throughout the years.

I especially want to thank Mark Aarons, John Buckland and Oliver Schnürer for many fruitful and vigorous mathematical discussions.

Thankyou Angelika and Stefan for your help with writing my abstract.

Finally, I thank Emily for being so patient, understanding and supportive. I could not have done this without you.

Curriculum Vitae

1980	Born in Melbourne, Australia
1985 – 1991	Croydon South Primary School
1992 – 1997	Maroondah Secondary College, Croydon
1997	Victorian Certificate of Education (VCE)
1998 – 2002	Monash University, Clayton
2001	Bachelor of Science with Honours (BScHons)
2002	Doctor of Philosophy commenced
2003 – 2005	Freie Universität, Berlin
2006	Doctor of Philosophy completed

Abstract

In this thesis we investigate the mean curvature flow of entire cylindrical graphs evolving in euclidean space. Mean curvature flow (MCF) is an evolutionary process on a family of hypersurfaces $(M_t)_{t\in[0,T)}, T > 0$, in which each point on the hypersurface moves with velocity equal to the mean curvature vector at that point, i.e.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{H}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in M_t, t \in [0, T)$$

where $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ is the mean curvature vector of M_t at $\mathbf{x}$.

Mean curvature flow of cylindrical graphs is equivalent (up to tangential diffeomorphisms) to a quasi-linear parabolic partial differential equation. The partial differential equation is uniformly parabolic if the gradient is bounded and the evolution of the surface stays away from the cylinder axis.

We obtain geometric evolution equations for the height, gradient and curvature functions, defined on the evolving hypersurface. We will finely tune these equations using specially chosen test- and cutoff-functions, rendering the evolution equations exploitable by the maximum principle, allowing us to derive estimates on important geometric quantities.

We derive interior height, gradient and curvature estimates for cylindrical graphical surfaces evolving by mean curvature flow, used to obtain a short-time existence result for the flow. Estimates are also derived using barrier solutions which allow us to obtain long-time existence for the evolution cylindrical graphs.

The main result of this thesis is that there exist certain entire, initially graphical surfaces over cylinders which remain entire cylindrical graphs under mean curvature flow. Furthermore, there exist entire cylindrical graphs which converge smoothly under a suitable rescaling to homothetically expanding graphical solutions. The proof of this result is in the spirit of the similar result for planar graphs in [10], and uses the uniform height, gradient and curvature estimates.

Zusammenfassung

In dieser Doktorarbeit wird der Mittelerer Krümungsfluss von kompleten zylindrischen Graphen, die sich im euklidischen Raum bewegen, dargestellt.

Der Mittelerer Krümungsfluss (MKF) ist ein evolutionärer Prozess aus einer Familie der Hyperfläche wobei sich jeder Punkt auf der Hyperfläche mit der gleichen Geschwindigkeit wie der Mittelerer Krümungsvektor bewegt, zum Beispiel

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{H}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in M_t, t \in [0, T)$$

wobei $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ der Mittelerer Krümungsvector von M_t im Punkt $\mathbf{x}$ ist.

Der (MKF) von zylindrischen Graphen ist (bis zu tangentialen Diffeomorphismen) äquivalent zu einer quasilinearen, parabolishen partiellen Differentialgleichung. Die Differentialgleichung ist gleichmäßig parabolisch, wenn der Gradient beschränkt ist und die Bewegung der Fläche die Zylinderachse nicht berürht.

Die geometrischen Bewegungsgleichungen für die Höhe, den Gradienten und die Krümungsfunktionen werden gefunden, die sich auf der beweglichen Hyperfläche definiert sind.

Für zylindrishe, graphishe Flächen, die sich im (MKF) bewegen, werden innere Abschätzungen für die Höhe, den Gradienten und die Krümmungen gefunden und die Existenz des Flusses wird hierdurch für eine kurze Zeitspanne bewiesen. Abschätzungen werden auch durch Barrierlösungen gefunden, welche die Existenz der Bewegung zylindrischer Graphen über eine lange Zeitspanne sichern.

Das Hauptresultat dieser Arbeit ist, dass bestimmte anfangs graphische Flächen über Zylindern existieren, welche unter dem (MKF) zylindrische Graphen bleiben. Desweiteren existieren glatte zylindrische Graphen, welche unter einer geeigneten Skalierung gegen homothetisch expandierende Lösungen konvergieren. Der Berweis dieses Resultats wurde durch ähnliche Resultate für planar Graphen inspiriert, siehe [10], und nutzt die gleichmäßig Höhe, den Gradienten und die Krümmungs Abschätzungen.

Contents

Index