

Mean Curvature Flow of Cylindrical Graphs

Dissertation

von

Joshua Stephen Bode¹

zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
des Max-Planck-Instituts für Gravitationsphysik
(Albert-Einstein-Institut)
und des Fachbereichs Mathematik und Informatik
der Freien Universität Berlin

betreut von

Professor Klaus Ecker²

Professor Gerhard Huisken³

¹Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik, Golm (Albert-Einstein-Institut)
und Freie Universität, Berlin.

²Freie Universität, Berlin.

³Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik, Golm (Albert-Einstein-Institut).

for Em ...

Erklärung

Ich bestätige hiermit, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel und Quellen verwendet habe.

Unterschrift:

Joshua Stephen Bode

Tag der mündlichen Qualifikation: 15 Januar 2007
1. Gutachter: Prof. Dr. Klaus Ecker
2. Gutachter: Prof. Dr. Gerhard Huisken

Acknowledgements

There are many people who have helped me throughout my thesis. Firstly, I want to thank my supervisors, Klaus Ecker and Gerhard Huisken, who have both helped me invaluablely by providing me with expert advice, guidance and encouragement

I want to thank the Max Planck Institute, to which I am extremely grateful for their financial support, hospitality, and for the excellent opportunity it provided me to live and study in Germany. I also thank the Freie Universität, which has provided me with resources and an excellent working environment.

For their advice and support, I thank Maria Athenassenas and Marty Ross.

I thank my fellow students and colleagues Mark Aarons, Bernhard List, Kashif Rasul, James McCoy, John Buckland, Felix Schulze, Julie Clutterbuck, Amos Koeller, Paul Appleby - my thanks for all of your support, assistance and friendship throughout the years.

I especially want to thank Mark Aarons, John Buckland and Oliver Schnürer for many fruitful and vigorous mathematical discussions.

Thankyou Angelika and Stefan for your help with writing my abstract.

Finally, I thank Emily for being so patient, understanding and supportive. I could not have done this without you.

Curriculum Vitae

1980	Born in Melbourne, Australia
1985 – 1991	Croydon South Primary School
1992 – 1997	Maroondah Secondary College, Croydon
1997	Victorian Certificate of Education (VCE)
1998 – 2002	Monash University, Clayton
2001	Bachelor of Science with Honours (BScHons)
2002	Doctor of Philosophy commenced
2003 – 2005	Freie Universität, Berlin
2006	Doctor of Philosophy completed

Abstract

In this thesis we investigate the mean curvature flow of entire cylindrical graphs evolving in euclidean space. Mean curvature flow (MCF) is an evolutionary process on a family of hypersurfaces $(M_t)_{t \in [0, T]}$, $T > 0$, in which each point on the hypersurface moves with velocity equal to the mean curvature vector at that point, i.e.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{H}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in M_t, t \in [0, T]$$

where $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ is the mean curvature vector of M_t at \mathbf{x} .

Mean curvature flow of cylindrical graphs is equivalent (up to tangential diffeomorphisms) to a quasi-linear parabolic partial differential equation. The partial differential equation is uniformly parabolic if the gradient is bounded and the evolution of the surface stays away from the cylinder axis.

We obtain geometric evolution equations for the height, gradient and curvature functions, defined on the evolving hypersurface. We will finely tune these equations using specially chosen test- and cutoff-functions, rendering the evolution equations exploitable by the maximum principle, allowing us to derive estimates on important geometric quantities.

We derive interior height, gradient and curvature estimates for cylindrical graphical surfaces evolving by mean curvature flow, used to obtain a short-time existence result for the flow. Estimates are also derived using barrier solutions which allow us to obtain long-time existence for the evolution cylindrical graphs.

The main result of this thesis is that there exist certain entire, initially graphical surfaces over cylinders which remain entire cylindrical graphs under mean curvature flow. Furthermore, there exist entire cylindrical graphs which converge smoothly under a suitable rescaling to homothetically expanding graphical solutions. The proof of this result is in the spirit of the similar result for planar graphs in [10], and uses the uniform height, gradient and curvature estimates.

Zusammenfassung

In dieser Doktorarbeit wird der Mittlerer Krümmungsfluss von kompletten zylindrischen Graphen, die sich im euklidischen Raum bewegen, dargestellt.

Der Mittlerer Krümmungsfluss (MKF) ist ein evolutionärer Prozess aus einer Familie der Hyperfläche wobei sich jeder Punkt auf der Hyperfläche mit der gleichen Geschwindigkeit wie der Mittlerer Krümmungsvektor bewegt, zum Beispiel

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{H}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in M_t, t \in [0, T)$$

wobei $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ der Mittlerer Krümmungsvektor von M_t im Punkt \mathbf{x} ist.

Der (MKF) von zylindrischen Graphen ist (bis zu tangentialen Diffeomorphismen) äquivalent zu einer quasilinearen, parabolischen partiellen Differentialgleichung. Die Differentialgleichung ist gleichmäßig parabolisch, wenn der Gradient beschränkt ist und die Bewegung der Fläche die Zylinderachse nicht berührt.

Die geometrischen Bewegungsgleichungen für die Höhe, den Gradienten und die Krümmungsfunktionen werden gefunden, die sich auf der beweglichen Hyperfläche definiert sind.

Für zylindrische, graphische Flächen, die sich im (MKF) bewegen, werden innere Abschätzungen für die Höhe, den Gradienten und die Krümmungen gefunden und die Existenz des Flusses wird hierdurch für eine kurze Zeitspanne bewiesen. Abschätzungen werden auch durch Barrierelösungen gefunden, welche die Existenz der Bewegung zylindrischer Graphen über eine lange Zeitspanne sichern.

Das Hauptresultat dieser Arbeit ist, dass bestimmte anfangs graphische Flächen über Zylindern existieren, welche unter dem (MKF) zylindrische Graphen bleiben. Desweiteren existieren glatte zylindrische Graphen, welche unter einer geeigneten Skalierung gegen homothetisch expandierende Lösungen konvergieren. Der Beweis dieses Resultats wurde durch ähnliche Resultate für planar Graphen inspiriert, siehe [10], und nutzt die gleichmäßig Höhe, den Gradienten und die Krümmungs Abschätzungen.

Contents

1	Introduction	1
2	Evolution Equations	5
2.1	Cylindrical Graphs	5
2.2	The Evolution Equations	6
2.3	Normalised Equations	10
3	Estimates on Surfaces of Revolution	15
3.1	Height Estimates	15
3.1.1	Local Estimates	15
3.1.2	Global Estimates	17
3.2	Gradient Estimates	20
3.2.1	Local Estimates	20
3.2.2	Global Estimates	26
3.3	Curvature Estimate	27
3.3.1	Local Estimates	27
3.3.2	Global Estimates	34
4	Existence	37
5	Self-Similar Solutions	39
5.1	Homothetic Solutions	39
5.2	Self-Similarly Shrinking Solutions	42
5.3	Self-Similar Expanding Solutions	42
5.3.1	Properties of Self-Similar Expanders	42
5.3.2	Solutions out of Cones	45
5.4	Convergence to Self-Similar Expanders	49
5.4.1	Time Independent Estimates	50
5.4.2	The Convergence	58
A	Notation and Useful Identities	63
A.1	Geometry in Coordinates	63
A.2	Geometry Coordinate-Free	65
A.3	Identities	67

B Geometric Flows	69
B.1 General Flows	69
B.2 Mean Curvature Flow	72
B.3 Higher-order Evolution Equations	73
C Geometric Graphs	77
C.1 Local Graphs	77
C.2 Evolution Equations	78
D Normal Graphs	81
D.1 Preliminaries	81
D.2 Uniform Parabolicity	84
D.3 Cylindrical Case	86
E Maximum and Comparison Principles	89
E.1 Global Maximum Principle	89
E.2 Extending the Maximum Principle	92
E.3 Comparison Principle	93

Index

- area measure $d\mu$, 64
- base unit normal ω_ξ , 77
- canonical basis $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{n+1}$, 63
- canonical connection $\bar{\nabla}$, 77
- canonical metric $\langle \cdot, \cdot \rangle$, 63
- Christoffel symbols Γ_{ij}^k , 64
- closest point projection \mathbf{S} , 82
- curvature norm $|A|^2$, 64
- cylinder unit normal ω , 5
- cylindrical gradient function v , 6
- cylindrical height function u , 6

- first fundamental form g_{ij} , 63

- gradient function v_ξ , 77

- height function u_ξ , 78

- inverted first fundamental form g^{ij} ,
64

- Laplace-Beltrami operator Δ , 66

- mean curvature H , 64
- mean curvature vector \mathbf{H} , 1

- reference slices M_ρ^n , 77

- second fundamental form h_{ij} , 64
- signed distance function Λ , 82

- tangent space $T_{\mathbf{x}}M$, 63
- tangent space basis $\{\tau_i\}_{i=1}^n$, 63
- tangential gradient ∇ , 66

