Anhang B

Der Melnikovvektor der AL-Kette für konstante Kopplung $\kappa_0 = \alpha$ auf sämtlichen Kettengliedern

Für den Fall, daß der Kopplungsparameter κ im gesamten Doppelkettensystem konstant ist, lassen sich die unendlichen Reihen in den Melnikovvektorkomponenten analytisch berechnen. Die Ergebnisse werden gemäß den Berechnungen aus [19] zusammengefaßt:

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix},$$

$$M_1(t,s) = -\alpha C^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n(s)\, S_n(t)\, T_n(t).$$

Entsprechend ergibt sich für die zweite Komponente, M_2 :

$$M_2 = -\alpha C^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n(s)\, S_n(t)\, T_n(t).$$

Eine Berechnung der unendlichen Reihen ist in diesem Fall explizit möglich und führt zu folgender analytischer Darstellung des Melnikovvektors mit Hilfe Jacobi elliptischer Funktionen (siehe hierzu Anhang B.2) für den Spezialfall, daß sämtliche Kettenglieder miteinander gekoppelt sind und der Kopplungsparameter an allen Kettenplätzen identisch ist ($\kappa_0 = \alpha \quad \forall n$).

Das Ergebnis für die Melnikovvektorkomponenten für den Fall $t \neq s$:

$$
\begin{aligned}
M_1 \quad = \quad & -\alpha \frac{2}{\mu\beta} sinh^2\beta \left(csech(s-t) \left(coth(s-t) \left(\frac{2EK(t-s)}{\beta} + KE \left(am \left(\frac{2Ks}{\beta} \right) \right) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. -(t-s) - KE \left(am \left(\frac{2Kt}{\beta} \right) \right) \right) - \frac{2K^2}{\beta} dn^2 \left(\frac{2Kt}{\beta} \right) + \frac{2KE}{\beta} - 1 \right) \right),
\end{aligned}
$$

aufgrund der hohen Symmetrie der unendlichen Reihen folgt für M_2

$$
\begin{aligned}
M_2 \quad = \quad & -\alpha \frac{2}{\mu\beta} sinh^2\beta \left(csech(s-t) \left(coth(s-t) \left(-\frac{2EK(t-s)}{\beta} - KE \left(am \left(\frac{2Ks}{\beta} \right) \right) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. +(t-s) + KE \left(am \left(\frac{2Kt)}{\beta} \right) \right) \right) + \frac{2K^2}{\beta} dn^2 \left(\frac{2Kt}{\beta} \right) - \frac{2KE}{\beta} + 1 \right) \right).
\end{aligned}
$$

Bei der Berechnung der unendlichen Reihen ergab sich das Ergebnis unter der Voraussetzung , daß die Parameter s und t ungleich sind.
Wählt man identische Kurvenparameter ($s = t$), so ergibt sich folgendes Ergebnis:

$$
M_1 = M_2 = -\alpha C^2 \frac{\partial}{\partial t} \Sigma(t,t,\beta) = -\alpha C^2 \frac{16K^3 m}{\beta^3} cn \left(\frac{2Kt}{\beta} \right) dn \left(\frac{2Kt}{\beta} \right) sn \left(\frac{2Kt}{\beta} \right).
$$

Eine Untersuchung zeigt, daß sämtliche Nullstellen des Melnikovvektors auf der Geraden $s = t$ zu finden sind, d. h. die Doppelkette kann in diesem Fall nur stabile Lösungen besitzen, wenn direkt gegenüberliegende Kettenplätze angeregt werden. Die Form der zeitlich stabilen Amplitudenverteilung wird auch hier mit Hilfe des homoklinen Orbits der zugeordneten chaotischen Abbildung bestimmt.

B.1 Fundamentale Lösungsmatrizen

In diesem Abschnitt sollen die fundamentalen Lösungsmatrizen der Variationsprobleme 2.12 am Beispiel des Melnikovvektors für die AL-Kette gemäß [19] explizit angegeben werden.
Gemäß Abschnitt 2.2.1 haben die $\vec{q}_n$-Vektoren folgende Form:

$$\begin{aligned}
\vec{q}_n^{(1)} &= C \begin{pmatrix} S_n(t)\,T_n(t) \\ 0 \\ S_{n+1}(t)\,T_{n+1}(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\vec{q}_n^{(2)} &= C \begin{pmatrix} 0 \\ S_n(s)\,T_n(s) \\ 0 \\ S_{n+1}(s)\,T_{n+1}(s) \end{pmatrix}, \\
\vec{\tilde{q}}_n^{(1)} &= C \begin{pmatrix} S_{n+1}(t)\,T_{n+1}(t) \\ 0 \\ -S_n(t)\,T_n(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\vec{\tilde{q}}_n^{(2)} &= C \begin{pmatrix} 0 \\ S_{n+1}(s)\,T_{n+1}(s) \\ 0 \\ -S_n(s)\,T_n(s) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die fundamentalen Lösungsmatrizen enthalten die $\vec{q}_n$-Vektoren als Zeilen bzw. Spalten:

$$\begin{aligned}
Q_n &= \begin{pmatrix} \vec{q}_n^{(1)} \\ \vec{q}_n^{(2)} \end{pmatrix}^T, \\
\tilde{Q}_n &= \begin{pmatrix} \vec{\tilde{q}}_n^{(1)} \\ \vec{\tilde{q}}_n^{(2)} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$Q_{n+1} = D_n\,Q_n$$

$$
= \begin{pmatrix} p_x & 0 & -1 & 0 \\ 0 & p_u & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{q}_n^{(1)} \\ \vec{q}_n^{(2)} \end{pmatrix}^T
$$

$$
= C \begin{pmatrix} p_x\, S_n(t)\, T_n(t) - S_{n+1}(t)\, T_{n+1}(t) & 0 \\ 0 & p_u\, S_n(s)\, T_n(s) - S_{n+1}(s)\, T_{n+1}(s) \\ S_n(t)\, T_n(t) & 0 \\ 0 & S_n(s)\, T_n(s) \end{pmatrix},
$$

$$
\tilde{Q}_{n+1} = \tilde{Q}_n\, D_n^{-1}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \vec{\tilde{q}}_n^{(1)} \\ \vec{\tilde{q}}_n^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & p_x & 0 \\ 0 & -1 & 0 & p_u \end{pmatrix}
$$

$$
= C \begin{pmatrix} S_n(t)\, T_n(t) & 0 \\ 0 & S_n(s)\, T_n(s) \\ S_{n+1}(t)\, T_{n+1}(t) - p_x\, S_n(t)\, T_n(t) & 0 \\ 0 & S_{n+1}(s)\, T_{n+1}(s) - p_u\, S_n(s)\, T_n(s) \end{pmatrix}^T.
$$

Aus diesen Ergebnissen folgt direkt die zu zeigende Bedingung 2.13:

$$
\tilde{Q}_n\, Q_n = \tilde{Q}_{n+1}\, Q_{n+1} = 0 = \mathit{constant}.
$$

B.2 Elliptische Integrale und Jacobi elliptische Funktionen [21]

Jedes Integral der Form

$$
\int R(x, \sqrt{P(x)})\, dx,
$$

wobei $P(x)$ ein Polynom dritten oder vierten Grades ist, kann auf eine der drei folgenden kanonischen Formen reduziert werden:

$$
\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{\sqrt{(1-k^2x^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}}\, dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(1+nx^2)(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.
$$

Die Integrale werden elliptische Integrale der ersten, zweiten und dritten Art genannt. k ist das Modul des entsprechenden Integrals und $k' = \sqrt{1-k^2}$ wird als

komplementäres Modul bezeichnet. n ist die Charakteristik des elliptischen Integrals der dritten Art.
Mit der Substitution

$$x = sin\,\phi$$

können die elliptischen Integrale auf die trigonometrischen Normalformen gebracht werden:

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 sin^2\phi}}, \quad \int \sqrt{1-k^2 sin^2\phi}\, d\phi, \quad \int \frac{d\phi}{(1+n\, sin^2\phi)\sqrt{1-k^2 sin^2\phi}}.$$

Folgende Notationen sind üblich:
Elliptisches Integral der ersten Art:

$$F(\phi,k) = \int_0^{\phi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 sin^2\alpha}} = \int_0^{sin\phi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Elliptisches Integral der zweiten Art:

$$E(\phi,k) = \int_0^{\phi} \sqrt{1-k^2 sin^2\alpha}\, d\alpha = \int_0^{sin\phi} \frac{\sqrt{(1-k^2x^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}}\, dx.$$

Elliptisches Integral der dritten Art:

$$D(\phi,k) = \frac{F(\phi,k)-E(\phi,k)}{k^2} = \int_0^{\phi} \frac{sin^2\alpha\, d\alpha}{\sqrt{1-k^2 sin^2\alpha}} = \int_0^{sin\phi} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Elliptische Integrale in den Grenzen von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ werden als vollständige elliptische Integrale bezeichnet. Die Abhängigkeit vom Modulus k wird dabei oft weggelassen. Es gelten folgende Notationen:

$$\begin{aligned}
K \equiv K(k) &= F\left(\frac{\pi}{2},k\right) = K'(k'),\\
E \equiv E(k) &= E\left(\frac{\pi}{2},k\right) = E'(k'),\\
K' \equiv K'(k) &= F\left(\frac{\pi}{2},k'\right) = K(k'),\\
E' \equiv E'(k) &= E\left(\frac{\pi}{2},k'\right) = E(k'),\\
D &= D\left(\frac{\pi}{2},k\right) = \frac{K-E}{k^2}.
\end{aligned}$$

Sei

$$u = \int\limits_0^{\phi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 sin^2\alpha}},$$

so läßt sich ϕ als Funktion von u beschreiben:

$$\phi = am(u).$$

ϕ ist die Funktion $Jacobiamplitude$. Sie hat die Periode $4Ki$.
Weiterhin gibt es die Jacobi elliptischen Funktionen $Sinusamplitude$ (sn), $Cosinusamplitude$ (cn) und $Deltaamplitude$ (dn):

$$\begin{aligned} sn(u) &= sin\,\phi = sin\,am(u), \\ cn(u) &= cos\,\phi = cos\,am(u), \\ dn(u) &= \Delta\phi = \sqrt{1 - k^2 sin^2\phi} = \frac{d\phi}{du}. \end{aligned}$$

Mit den Jacobi elliptischen Funktionen als Grenzen für die elliptischen Integrale erhält man:

$$u = \int\limits_0^{sn(u)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad u = \int\limits_1^{cn(u)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2+k^2t^2)}}, \quad u = \int\limits_1^{dn(u)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k'^2)}}.$$

Für die Ableitungen der Jacobi elliptischen Funktionen gilt:

$$\frac{d}{du} sn(u) = cn(u)\, dn(u), \quad \frac{d}{du} cn(u) = -sn(u)\, dn(u), \quad \frac{d}{du} dn(u) = -k^2\, sn(u)\, cn(u).$$