

# Anhang A

## Realisierung eines nichtlinearen Doppelkettensystems in Form eines elektrischen Netzwerks

In Anlehnung an P. Marquie and M. Remoissenet et. al. [4], [5] wird der Vorschlag einer Realisierung eines nichtlinearen Doppelkettensystems, in Form eines elektrischen Netzwerks aufgezeigt. Dieses Netzwerk, genauer die Zeitentwicklung der Spannungsamplituden in den Einheitszellen, kann mit Hilfe der GDNLS-Diskretisierung (Abschnitt 1.1.3) modelliert werden. Das Netzwerk besteht aus L-C Gliedern, die über eine weitere Induktivität miteinander galvanisch gekoppelt sind (siehe Abbildung A1). Die Grundbausteine des Doppelkettensystems sind demnach Einheitszellen, die selbst wiederum aus verschiedenen elektronischen Bauteilen zusammengesetzt sind.

Das folgende Doppelkettensystem stellt eine Erweiterung des Modells von Remoissenet et. al. dar, die lediglich einen Kettenstrang betrachteten. Die Einführung einer weiteren Induktivität macht es möglich, einen zweiten Kettenstrang extern steuerbar anzukoppeln.

Die Kirchhoff'schen Regeln liefern die Ausgangsgleichung der Strom-Spannungsbilanz in einer Einheitszelle:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 Q_n^\psi}{dt^2} &= \frac{1}{L_1}(V_{n+1} + V_{n-1} - 3V_n) - \frac{3V_n}{L_2} + \frac{U_n}{L_3}, \\ \frac{d^2 Q_n^\phi}{dt^2} &= \frac{1}{L_1}(U_{n+1} + U_{n-1} + 3U_n) - \frac{3U_n}{L_2} + \frac{V_n}{L_3}.\end{aligned}$$

Mit der in [4] angenommenen und experimentell realisierten nichtlinearen Beziehung zwischen Ladung und Spannung in den Einheitszellen

$$Q_n^\psi = C_0 A \ln \left( 1 + \frac{V_n}{A} \right),$$

$$Q_n^\phi = C_0 A \ln \left( 1 + \frac{U_n}{A} \right),$$

bzw.

$$\frac{1}{C(V_n)} = \frac{A + V_n}{AC_0}, \quad \frac{1}{C(U_n)} = \frac{A + U_n}{AC_0},$$

und den Ersetzungen

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_2 C_0}, \quad u_0^2 = \frac{1}{L_1 C_0}, \quad v_0^2 = \frac{1}{L_3 C_0},$$

ergibt sich ein gekoppeltes Gleichungssystem für die Spannungen in der n-ten Zelle:

$$\begin{aligned} & \frac{A^2 C_0}{(A + V_n)^2} \left( (A + V_n) \frac{d^2 V_n}{dt^2} - \left[ \frac{dV_n}{dt} \right]^2 \right) = \\ & u_0 C_0 \left( V_{n+1} + V_{n-1} + \frac{v_0^2}{u_0^2} U_n - \left( 3 + \frac{\omega_0^2}{u_0^2} \right) V_n \right), \\ & \frac{A^2 C_0}{(A + U_n)^2} \left( (A + U_n) \frac{d^2 U_n}{dt^2} - \left[ \frac{dU_n}{dt} \right]^2 \right) = \\ & u_0 C_0 \left( U_{n+1} + U_{n-1} + \frac{v_0^2}{u_0^2} V_n - \left( 3 + \frac{\omega_0^2}{u_0^2} \right) U_n \right). \end{aligned}$$

Dabei ist  $A$  eine Konstante mit der Dimension Spannung und  $C_0$  eine konstante Kapazität, die in Serie zu  $L_2$  geschaltet ist.

Mit  $\epsilon \ll 0$  und dem Superpositionsansatz :

$$V_n(t) = \epsilon \Psi_n e^{-i\omega t} + \epsilon \Psi_n^* e^{i\omega t},$$

$$U_n(t) = \epsilon \Phi_n e^{-i\omega t} + \epsilon \Phi_n^* e^{i\omega t}$$

und ausschließlicher Berücksichtigung der  $\epsilon^2$ -Terme ergibt sich:

$$\frac{-2\omega^2}{u_0^2} |\Psi_n|^2 \Psi_n = \left( \Psi_{n+1} + \Psi_{n-1} + \frac{v_0^2}{u_0^2} \Phi_n - \left( 3 + \frac{\omega_0^2}{u_0^2} \right) \Psi_n \right) |\Psi_n|^2$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \Psi_{n+1}^* + \Psi_{n-1}^* + \frac{v_0^2}{u_0^2} \Phi_n^* - \left( 3 + \frac{\omega_0^2}{u_0^2} \right) \Psi_n^* \right) |\Psi_n|^2, \\
\frac{-2\omega^2}{u_0^2} |\Phi_n|^2 \Phi_n & = \left( \Phi_{n+1} + \Phi_{n-1} + \frac{v_0^2}{u_0^2} \Psi_n - \left( 3 + \frac{\omega_0^2}{u_0^2} \right) \Phi_n \right) |\Phi_n|^2 \\
& + \left( \Phi_{n+1}^* + \Phi_{n-1}^* + \frac{v_0^2}{u_0^2} \Psi_n^* - \left( 3 + \frac{\omega_0^2}{u_0^2} \right) \Phi_n^* \right) |\Phi_n|^2.
\end{aligned}$$

Verschiedene Zeitskalen der Änderung der einhüllenden Lösungsfunktionen und der Oszillatorfrequenzen geben Anlaß zur Einführung von  $T$  und einer dimensionslosen Zeit  $\tau$ :

$$\begin{aligned}
\Psi_n & = \Psi_n(T), & \Phi_n & = \Phi_n(T), \\
\text{mit } T & = \epsilon^2 t & \tau & = \frac{u_0^2 T}{2\omega}
\end{aligned}$$

Ansatz für die Lösungsfunktionen:

$$\begin{aligned}
\Psi_n(T) & = \psi_n \exp \left( i\tau \frac{\omega^2 - \omega_0^2 - v_0^2 - 2u_0^2}{u_0^2} \right), \\
\Phi_n(T) & = \phi_n \exp \left( i\tau \frac{\omega^2 - \omega_0^2 - v_0^2 - 2u_0^2}{u_0^2} \right).
\end{aligned}$$

Damit folgen die Bewegungsgleichungen für die Spannungsamplituden in den Einheitszellen:

$$\begin{aligned}
i \frac{d\psi_n}{dt} + \psi_{n+1} + \psi_{n-1} + \kappa \phi_n + (\mu(\psi_{n-1} + \psi_{n+1} + \kappa \phi_n) + 2\gamma \psi_n) |\psi_n|^2 & = 0, \\
i \frac{d\phi_n}{dt} + \phi_{n+1} + \phi_{n-1} + \kappa \psi_n + (\mu(\phi_{n-1} + \phi_{n+1} + \kappa \psi_n) + 2\gamma \phi_n) |\phi_n|^2 & = 0.
\end{aligned}$$

Sie sind mit den GDNLS-Bewegungsgleichungen (1.15) identisch, wenn  $V_n^\psi = V_n^\phi = 1$  und  $E_n = 0$  gilt

$$\begin{aligned}
i \dot{\psi}_n & = -(1 + \mu |\psi_n|^2)(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}) - 2\gamma |\psi_n|^2 \psi_n - \kappa(1 + \mu |\psi_n|^2) \phi_n, \\
i \dot{\phi}_n & = -(1 + \mu |\phi_n|^2)(\phi_{n+1} + \phi_{n-1}) - 2\gamma |\phi_n|^2 \phi_n - \kappa(1 + \mu |\phi_n|^2) \psi_n
\end{aligned}$$

und die Nichtlinearitätsparameter durch

$$\mu = \frac{1}{A^2} \quad [1/\text{Spannung}^2], \quad \gamma = \frac{2\omega^2 + \omega_0^2 + 2u_0^2}{2u_0^2 A^2} \quad [1/\text{Spannung}^2] \quad 1 \quad [1/\text{Zeit}]$$

definiert werden.

Der Kopplungsparameter  $\kappa$  ist:

$$\kappa = \frac{L_1}{L_3} \quad 1 \quad [1/\text{Zeit}].$$

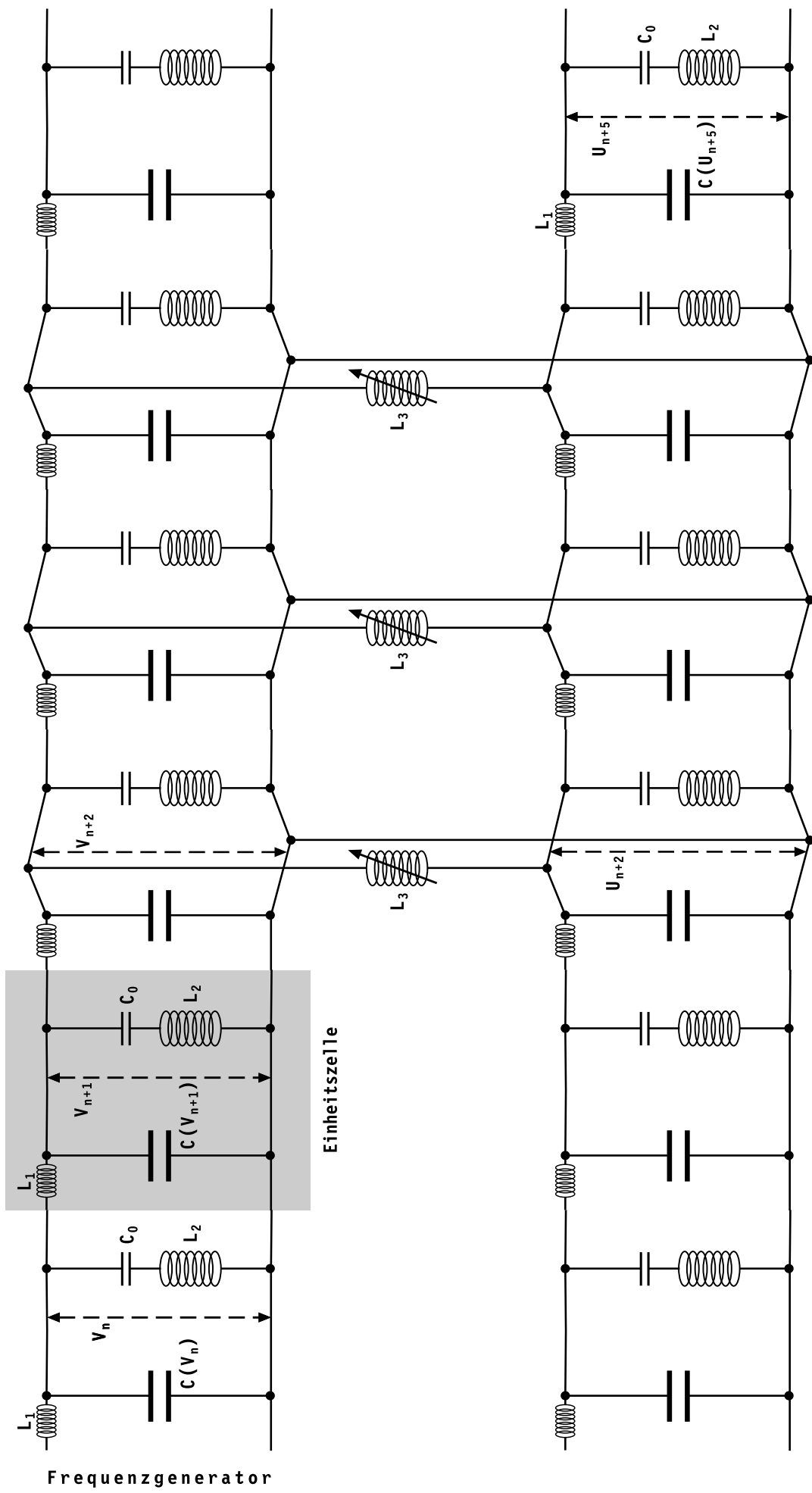


Abbildung A1: Realisierung einer GDNLS-Doppelkette mit L-C Gliedern als Einheitszellen. Mit variabler Induktivität  $L_3$  wird die Kopplungsstärke reguliert.