Kapitel 5

Das Manifestations- und das Normativitätsargument und der strikte Finitismus

Das Manifestations- und das Normativitätsargument liefern mehr oder weniger gute Gründe für die Annahme der Unvereinbarkeit einer Bedeutungstheorie$_d$ insbesondere mit der mathematisch-realistischen Grundintuition. Liefern sie nicht aber auch genauso gute (oder schlechte) Gründe für die Unvereinbarkeit einer solchen Theorie mit der intuitionistischen Analyse?!

Ziel dieses Kapitels ist die Erhärtung dieses Verdachts, der sich bei nur etwas genauerer Betrachtung der beiden Argumente einstellt. Und zwar will ich in erheblichen Zweifel ziehen, daß man das Manifestations- oder das Normativitätsargument vorbringen könnte, ohne sich damit (wohl unfreiwillig) auf eine *strikt-finitistische* Auffassung mathematischer Wahrheit festzulegen; eine Auffassung, wonach (irgendeinen geeigneten Beweisbegriff zugrunde gelegt) ein mathematischer Satz genau dann wahr ist, wenn wir ihn *praktisch*, nicht bloß prinzipiell, beweisen könnten; also gegeben die Beschränkungen unserer Lebenszeit, Rechengeschwindigkeit, Ausdauer, Datenspeicherungsmöglichkeiten etc.

5.1 Das Manifestationsargument und der strikte Finitismus

5.1.1 Die strikt-finitistische Konzeption des Verstehens mathematischer Sätze

Im Kapitel mit der Überschrift »Avoiding Strict Finitism« von *The Taming of the True* kommt Tennant auf ein seines Erachtens verfehltes Verständnis der Manifestationsbedingung zu sprechen:

> There still lingers [...] even on the part of anti-realist writers (such as Wright)[1] a defective understanding of the workings of the manifestation requirement. [...] The defect is apparent in the misgiving that the manifestation requirement, properly pursued, would allow for the meaningfulness only of such sentences as are verifiable (practically, feasibly verifiable) rather than of sentences that are verifiable in principle though perhaps not feasibly so. They conceive of the verification as having to be carried through to completion, no matter how long it might be. They also think that, since there are obviously limits (however vague these may be) to what human subjects could actually achieve in this regard, so too, then, there must be sentences that are decidable in principle but whose meanings could not be regarded as graspable. For these sentences would admit only of verifications that were too long to be recognized as such. And this could happen even for sentences that themselves were relatively short and surveyable such as the claim that $(2^{2^{2^{2^{2^{2}}}}}+1)$ is prime. (S. 151 f.)

Mit Blick auf mathematische Sätze besteht der von Tennant auf Seiten von Wright und anderen Anti-Realisten ausgemachte Fehler in der Ansicht, mit der Manifestationsbedingung dränge sich unweigerlich folgendes Prinzip für die Zuschreibung des Verstehens eines solchen Satzes auf:

> For a speaker S to be credited with a grasp of the meaning of a [mathematical] sentence ϕ, we should have good grounds [at least if ϕ is surveyable] for believing that, if presented with some finite piece of discourse Π, S would actually be able to deliver a correct verdict either of the form 'Π is a proof of ϕ' or of the form 'Π is a disproof of ϕ' or of the form 'Π is neither a proof nor a disproof of ϕ'; that is, after some time S would have checked all aspects of Π for correctness in the appropriate regards. (S. 154)

[1] Vgl. Wright: *Strict Finitism.*

Das heißt, nach Tennant bedingt die Manifestationsbedingung für einen mathematischen Satz σ keineswegs die Identifikation der Kenntnis der Wahrheitsbedingung von σ mit der Fähigkeit, in Anbetracht eines „Diskursstücks“ zu erkennen, ob es einen Beweis von σ, eine Widerlegung von σ oder keines von beidem darstellt.

5.1.2 Tennants Konzeption

Ein Intuitionist – und Tennant ist ein solcher – würde diese Gleichsetzung bzw. jenes Prinzip auch gar nicht gelten lassen können; mit Blick etwa auf (uns $\mathcal{D}$-Sprecher und) den natürlich auch aus seiner Sicht ebenso wie $\mathrm{gv}(10^{10^{10}})$ als bivalent anzusehenden (aber im Gegensatz zu diesem praktisch verwendbaren) Satz $\mathbf{gv'(10^{10^{10}})} = \gg 10^{10^{10}}$ ist Summe zweier Primzahlen$\ll$. Denn zum einen könnte er dem Prinzip hinsichtlich $\mathrm{gv}'(10^{10^{10}})$ nur dann zustimmen, wenn die Diskursstück-Variable $\gg\Pi\ll$ u.a. über einen i-Beweis von $\mathrm{gv}'(10^{10^{10}})$ oder von $\ulcorner\neg\,\mathrm{gv}'(10^{10^{10}})\urcorner$ läuft. Und zum andern setzt sich ein solcher im wesentlichen aus den der entsprechenden Goldbach-Entscheidungssituation zugehörigen Rechnungen zusammen; womit er viel zu lang ist, als daß wir ihn, läge er uns vor, praktisch als i-Beweis von $\mathrm{gv}'(10^{10^{10}})$ bzw. $\ulcorner\neg\,\mathrm{gv}'(10^{10^{10}})\urcorner$ erkennen könnten.

Wenn nun aber nicht das obige, welches Prinzip für die Zuschreibung des Verstehens eines mathematischen Satzes kann ein Intuitionist denn dann unterschreiben? – ein Intuitionist, der im Anschluß an Dummett das Manifestationsargument gegen die mathematisch-realistische Grundintuition vorbringen möchte. Tennants Vorschlag ist der:

> For a speaker S to be credited with a grasp of the meaning of a [mathematical] sentence ϕ, we should have good grounds for believing that, if presented with some finite [but possibly unsurveyable] piece of discourse Π, S would [actually] be able to deliver a correct verdict on any aspect of Π that is relevant to arriving at a correct judgement of the form 'Π is a proof of ϕ' or of the form 'Π is a disproof of ϕ' or of the form 'Π is neither a proof nor a disproof of ϕ'; that is, for any such aspect α, S would, after some time, be able to judge whether α was as it ought to be, in order for Π to have the status in question. (S. 154)

5.1.3 Die Unvereinbarkeit der Konzeption Tennants mit der Manifestationsbedingung

Das heißt, nach Tennant läßt sich der Manifestationsbedingung in bezug auf einen mathematischen Satz σ durchaus in Einklang mit der intuitionistischen Analyse Rechnung tragen, nämlich indem man die Kenntnis der Wahrheitsbedingung von σ mit der nicht bloß prinzipiellen Fähigkeit identifiziert, in Anbetracht eines (endlichen, aber eventuell nicht praktisch überschaubaren) Diskursstücks d einen beliebigen bezüglich σ „beweisstatus-relevanten“ Aspekt von d mit Blick auf den Beweisstatus von d bezüglich σ richtig zu beurteilen.

Zugunsten dieser Einschätzung versucht Tennant deutlich zu machen:[2]

Wir könnten zwar (für solches σ) in Anbetracht eines (praktisch) *unüberschaubaren* Diskursstücks d nicht praktisch *sämtliche* (bezüglich σ) beweisstatus-relevanten Aspekte von d (auf den Beweisstatus von d bezüglich σ hin) überprüfen – weil es schlicht zu viele Aspekte wären. Doch spricht dieser Umstand nicht im geringsten gegen die Manifestierbarkeit unserer Fähigkeit, einen *beliebigen* derartigen Aspekt richtig zu beurteilen.

Aber selbst wenn man Tennant diesen Punkt einfach schenkt, entlarven die beiden folgenden Überlegungen (wobei die erste als bloße Vorüberlegung zur zweiten angesehen werden kann) seine Einschätzung als falsch:

5.1.3.1 Das Problem bloß prinzipiell präsentierbarer i-Beweise

Sei s ein (mathematisch alphabetisierter) $\mathcal{D}$-Sprecher, sei b ein i-Beweis von $\mathrm{gv}'(10^{10^{10}})$ oder von $\ulcorner\neg\,\mathrm{gv}'(10^{10^{10}})\urcorner$, und sei a ein beweisstatus-relevanter Aspekt von b.

Tennant meint, in Anbetracht von b könnte s, im Rahmen der ihm als Menschen aus Fleisch und Blut gesetzten Grenzen, a zutreffend beurteilen. Ferner glaubt Tennant, daß sich uns dieser Umstand zeigen kann. Nur, wie sollte das gehen? Es müßte doch wohl folgender Test durchgeführt werden: Man legt s (ein Examplar von) b vor, anschließend bittet man s um sein Urteil über a, und zu guter letzt notiert man dieses, sobald es gegeben worden ist. Den Test können wir jedoch aufgrund der Länge von b überhaupt nicht praktisch durchführen. Und es gibt ja wohl niemanden sonst – Tennant wird bestimmt nicht Gott ins Spiel bringen wollen –, der ihn praktisch durchführen könnte.

Hier wird man womöglich einwenden, man müsse s gar nicht unbedingt den gesamten Beweis b vorlegen; es reiche ein echtes Teilstück b' von b, nämlich das für die Beurteilung von a einschlägige. Doch es ist überhaupt nicht garantiert, daß nicht auch b', obzwar kürzer als b, unüberschaubar ist (ganz im Gegenteil)[3].

[2] Vgl. *The Taming of the True*, 5.6.

[3] Siehe Fn. 6.

5.1.3.2 Das Problem bloß prinzipiell beurteilbarer i-Beweisaspekte

Wenn auch Tennants Rede von den beweisstatus-relevanten Aspekten eines Diskursstücks nicht völlig transparent ist, so ist doch immerhin klar: Enthält eine Rechnung z.B. eine durch das Rechenprinzip [eR3](2)[4] sanktionierte Gleichung, so ist der

Umstand, daß die Gleichung durch ebendieses Prinzip sanktioniert ist, ein beweisstatus-relevanter Aspekt der Rechnung. Und b setzt sich, wie bereits bemerkt, im wesentlichen aus den der Goldbach-Entscheidungssituation $\text{GES}_{10^{10^{10}}}$ zugehörigen Rechnungen zusammen. Ferner enthalten offenkundig einige dieser Rechnungen durch [eR3](2) sanktionierte Gleichungen, die unüberschaubar sind.[5] Das heißt aber, es gibt einen beweisstatus-relevanten Aspekt von b, den s nur prinzipiell beurteilen könnte; eben für irgendeine dieser Gleichungen den Umstand, daß sie durch [eR3](2) sanktioniert ist.[6] Der $\mathcal{D}$-Sprecher s besitzt also mitnichten die Fähigkeit, die Tennant zufolge mit seiner Kenntnis der Wahrheitsbedingung von $\text{gv}'(10^{10^{10}})$ gleichzusetzen ist.

5.1.4 Das strikt-finitistische Manifestationsargument und seine relative Überzeugungskraft

Wir können festhalten: Tennants Vorschlag dafür, wie der Manifestationsbedingung unter der intuitionistischen Analyse in bezug auf mathematische Sätze Rechnung zu tragen sei, ist ungenügend. Denn mit Blick z.B. auf $\text{gv}'(10^{10^{10}})$ gilt für die von Tennant favorisierte Fähigkeit, in Anbetracht eines Diskursstücks d einen beliebigen beweisstatus-relevanten Aspekt von d richtig zu beurteilen: Sie mit der Kenntnis der Wahrheitsbedingung von $\text{gv}'(10^{10^{10}})$ zu identifizieren ist nur dann mit der intutionistischen Analyse vereinbar, wenn die Diskursstück-Variable »d« u.a. über einen i-Beweis von $\text{gv}'(10^{10^{10}})$ oder von $\ulcorner\neg\,\text{gv}'(10^{10^{10}})\urcorner$ läuft. Ferner gilt aber: Wenn denn ein solcher Beweis zum Bereich von »d« gehört, so besitzen wir die Fähigkeit bloß im Prinzip bzw. können wir sie bloß im Prinzip manifestieren. Und es ist jedenfalls für einen praktisch verwendbaren Satz alles andere als klar, welchen Vorzug die Identifikation der Kenntnis der Wahrheitsbedingung des Satzes mit einer prinzi-

[4] Siehe 3.1.2.

[5] Dem wäre übrigens auch dann so, wenn der gegebenen Definition elementarer Rechnungen ein umfassenderes arithmetisches Termsystem zugrunde gelegen hätte; gleich welches (praktisch handhabbare) Termsystem man nimmt, es stellt nur für die allerwenigsten natürlichen Zahlen $\leq 10^{10^{10}}$ überschaubare Bezeichnungen bereit.

[6] Das für die Beurteilung dieses Aspekts einschlägige Teilstück von b ist natürlich nicht mehr, aber auch nicht weniger als die Gleichung selbst.

piell, aber nicht praktisch manifestierbaren Fähigkeit gegenüber der Identifikation der Kenntnis mit einer weder praktisch noch prinzipiell manifestierbaren Fähigkeit genießen sollte. Ferner ist jedoch ebensowenig klar, wie der Manifestationsbedingung unter der intuitionistischen Analyse in bezug auf mathematische Sätze in anderer als der von Tennant vorgeschlagenen Weise Rechnung zu tragen ist. Das heißt, wer das Manifestationsargument akzeptiert, wird kaum umhinkönnen, auch dessen strikt-finitistisches Pendant zu unterschreiben:

Eine $\mathcal{L}$-Bedeutungstheorie$_d$ wäre nicht nur insbesondere mit der mathematisch-realistischen Grundintuition unvereinbar, sondern auch mit der intuitionistischen Analyse. Denn die Theorie müßte die Manifestationsbedingung u.a. in bezug auf die mathematischen $\mathcal{L}$-Sätze erfüllen. Und dies könnte sie unter der intuitionistischen Analyse nicht: Wenn man für einen mathematischen $\mathcal{L}$-Satz annimmt, er könne wahr sein, ohne von den $\mathcal{L}$-Sprechern *praktisch* bewiesen werden zu können, wird man auf keinerlei Fähigkeit der $\mathcal{L}$-Sprecher verweisen können, die hinsichtlich eines sie besitzenden Individuums die Zuschreibung der Kenntnis der Wahrheitsbedingung des Satzes erlaubt und die sich zum andern in von den $\mathcal{L}$-Sprechern beobachtbaren Handlungen zeigen kann. Es ist nämlich nicht zu sehen, um welche Fähigkeit es sich dabei sollte handeln können, wenn nicht um die nicht bloß prinzipielle, in Anbetracht eines (überschaubaren) Diskursstücks zu erkennen, ob es einen Beweis des Satzes, eine Widerlegung des Satzes oder keines von beidem darstellt.

5.2 Das Normativitätsargument und der strikte Finitismus

5.2.1 Das strikt-finitistische Normativitätsargument

Läßt sich, wenn schon nicht das Manifestations-, so doch immerhin das Normativitätsargument gegen die Vereinbarkeit einer Bedeutungstheorie$_d$ mit der mathematisch-realistischen Grundintuition vorbringen, ohne sich damit zugleich gegen die Vereinbarkeit einer solchen Theorie mit der intuitionistischen Analyse zu wenden? Zu erstem Zweifel daran berechtigt der Umstand, daß zunächst nicht zu sehen ist, was bei Akzeptanz des Normativitätsarguments an seinem strikt-finitistischen Pendant auszusetzen wäre:

Eine $\mathcal{L}$-Bedeutungstheorie$_d$ wäre nicht nur insbesondere mit der mathematisch-realistischen Grundintuition unvereinbar, sondern auch mit der intuitionistischen Analyse. Denn wenngleich wir keine sehr genaue Vorstellung von ihrer Theorie der Kraft haben, so ist doch immerhin klar: Mit den von der Theorie der Kraft gelieferten Sprachspiel-Erklärungen ginge eine Erklärung insbesondere mathematischer Wahrheit einher, dergemäß festzuhalten wäre: Die wahren unter den mathematischen $\mathcal{L}$-Sätzen zeichnen sich, ähnlich wie etwa die Gewinn- gegenüber den anderen möglichen Stellungen eines Spiels, durch einen bestimmten normativen Status aus. Und die Vorstellung, ein solcher Satz könne einen solchen Status besitzen, ohne daß dies für die $\mathcal{L}$-Sprecher *praktisch* zu erkennen wäre, ist ebenso absurd wie die Vorstellung von einem Spiel, in dem eine Partei eine Gewinnstellung erreichen könnte, ohne daß sie oder eine andere Partei dies praktisch erkennen könnte; oder die Vorstellung von einem Spiel, das durch eine „Regel" mitbestimmt wäre, die zwar in mancher möglichen Spielsituation einschlägig wäre, aber von einem Spieler insofern nicht praktisch befolgt werden könnte, als er die Regel selbst bei noch so genauer ihm als nicht-göttlichem Wesen, als Menschen aus Fleisch und Blut möglichen Analyse der Situation nicht als einschlägig erkennen könnte.

Mit Blick auf $\mathcal{D}$ läßt sich dieses Argument etwas präziser fassen:

Eine $\mathcal{D}$-Bedeutungstheorie$_d$ wäre nicht nur insbesondere mit der mathematisch-realistischen Grundintuition unvereinbar, sondern auch mit der intuitionistischen Analyse. Denn wenngleich wir keine sehr genaue Vorstellung von ihrer Theorie der Kraft haben, so ist doch immerhin klar: Mit den von der Theorie der Kraft gelieferten Sprachspiel-Erklärungen ginge eine Erklärung insbesondere mathematischer Wahrheit einher; eine Erklärung mathematischer Wahrheit in Form einer Zurückführung der Wahrheit mathematischer $\mathcal{D}$-Sätze auf die Korrektheit (in einem geeigneten spezifischen Sinne)[7] von Äußerungen der Sätze (im Rahmen von mithilfe von $\mathcal{D}$ gemäß si$_\mathcal{D}$ ausgetragenen tatsächlichen oder hypothetischen Behauptungsspielpartien). Und offenbar müßte gemäß der Erklärung, soll sie in Einklang mit der intuitionistischen Analyse stehen, gelten: Ein mathematischer $\mathcal{D}$-Satz ist genau dann wahr, wenn er prinzipiell (insbesondere und vor allem als Eröffnungszug einer Behauptungsspielpartie) korrekt äußerbar ist; wobei die Regel **br**[8] greift, wonach eine Äußerung eines solchen Satzes (u.a.)[9] bei Vorliegen eines i-Beweises

[7]Siehe die Eingangsbemerkung zu 1.4.5.

[8]≫br≪ kurz für: Bedeutungsregel.

[9]Eine weitere hinreichende Bedingung für die Korrektheit einer Äußerung eines solchen Satzes wäre gemäß der intuitionistischen Analyse die des Vorliegens einer i-„Demonstration" des Satzes, d.i. ein überzeugendes Argument für die Existenz eines i-Beweises desselben. (Siehe 6.2.2.)

des Satzes korrekt ist. Das hieße aber z.B., die Bedeutung von $\mathrm{gv}'(10^{10^{10}})$ oder von $\ulcorner\neg\,\mathrm{gv}'(10^{10^{10}})\urcorner$ wäre, wegen der Unüberschaubarkeit der i-Beweise eines der beiden Sätze, durch eine Regel mitbestimmt, die wir nur prinzipiell befolgen könnten – eben die Regel $\mathbf{br}_{\mathbf{10^{10^{10}}}}$, wonach wir $\mathrm{gv}'(10^{10^{10}})$ bzw. $\ulcorner\neg\,\mathrm{gv}'(10^{10^{10}})\urcorner$ äußern dürfen, wenn wir über einen i-Beweis des Satzes verfügen. Und während es für einen nicht praktisch verwendbaren mathematischen $\mathcal{D}$-Satz noch angehen mag, daß seine Bedeutung durch eine nur prinzipiell zu befolgende Regel mitbestimmt ist, ist dies für $\mathrm{gv}'(10^{10^{10}})$ und $\ulcorner\neg\,\mathrm{gv}'(10^{10^{10}})\urcorner$ völlig inakzeptabel.

5.2.2 Die anti-regelfolgen-skeptizistische Replik und ihre Unzulänglichkeit

Der kritische, anfechtbare Punkt dieses Arguments ist offenbar die Einstufung der Vorstellung als inakzeptabel, die Bedeutung eines praktisch verwendbaren Satzes könne durch eine nicht praktisch zu befolgende Regel mitbestimmt sein. Diese Einstufung wird man womöglich (ganz im Sinne Dummetts)[10] mit einer Überlegung wie der folgenden angreifen wollen:

Ist die Vorstellung absurd, wir könnten (in einem bestimmten Zeitraum) etwa an die erste der beiden folgenden Regeln **gr**[11] und **gr′** gebunden sein? – die z.B. jeweils im Rahmen eines kognitionspsychologischen Experiments den korrekten Gebrauch von »u« und »g« bestimmen könnten:

gr : Eine Äußerung von »u« oder von »g« ist bei Vorliegen einer Reihe von Strichen – der Art wie »|||||« – korrekt, deren Anzahl ungerade bzw. gerade ist.

gr′ : Eine Äußerung von »u« oder von »g« ist bei Vorliegen einer Reihe von Strichen korrekt, deren Anzahl ungerade oder nicht kleiner als $10^{10^{10}}$ bzw. gerade und kleiner als $10^{10^{10}}$ ist.

Die Vorstellung ist natürlich nicht absurd; somit insbesondere auch nicht die, wir könnten an die nicht praktisch zu befolgende Regel $\mathbf{gr}_{\mathbf{10^{10^{10}}}}$ gebunden sein, wonach eine Äußerung von »g« bei Vorliegen einer Reihe von $10^{10^{10}}$ Strichen korrekt ist.

Wer dies bestreitet, schlägt sich damit auf die Seite des *Regelfolgen-Skeptikers* – als den Kripke Wittgenstein in *Wittgenstein über Regeln und Privatsprache* darstellt. Nach dessen Ansicht kann es keine genuine Tatsache des Gebundenseins an

[10] Siehe 1.4.3.

[11] »gr« kurz für: Gebrauchsregel.

gr geben, und zwar deshalb nicht, weil wir keine plausible nicht-triviale Antwort auf die Frage finden können: Worin sollte denn eigentlich der Unterschied zwischen dem Gebundensein an gr und dem Gebundensein etwa an gr′ bestehen? – angesichts der Übereinstimmung der „praktisch zu befolgenden Teile“ von gr und gr′ bzw. angesichts dessen, daß in den Umständen, in denen wir gr praktisch befolgen könnten, eine gemäß gr korrekte Äußerung von »u« oder »g« auch gemäß gr′ korrekt wäre, und umgekehrt. Doch warum sollten wir überhaupt der Forderung nach einer nicht-trivialen Antwort bzw., allgemeiner, nach einer reduktiven, etwa einer dispositionalen, Analyse des Regelfolgens nachkommen müssen? Was genau ist denn so obskur am Regelfolgen, daß es philosophisch unredlich ist, etwa den möglichen Sachverhalt unseres Gebundenseins an gr als *basal* anzusehen? Hierauf weiß der Regelfolgen-Skeptiker seinerseits keine überzeugende Antwort zu geben, aber einer solchen bedarf sein Skeptizismus als Grundlage.

In der Tat, es ist alles andere als ausgemacht, daß mit Blick auf das Regelfolgen nur die Wahl bleibt zwischen Reduktionismus und Eliminativismus; zwischen (1) der These, das Gebundensein an eine Regel lasse sich auf das Disponiertsein zu bestimmtem Bewegungsverhalten oder auf anderes (vermeintlich) Elementareres zurückführen, und (2) der These, dem sei nicht so, und das liege schlicht an der *Inkohärenz*, an der buchstäblichen *Sinnlosigkeit* der Rede vom Gebundensein an eine Regel. Sei also zugestanden, daß der mögliche Umstand unseres Gebundenseins an gr, und damit der unseres Gebundenseins an $\mathrm{gr}_{10^{10^{10}}}$, eine genuine Tatsache sein könnte; auch falls sich der Unterschied zwischen dem Gebundensein an gr und dem an gr′ wirklich nicht nicht-trivial festmachen läßt.

Damit ist nun aber keineswegs zugestanden, daß die Bedeutung von $\mathrm{gv}'(10^{10^{10}})$ bzw. $\ulcorner\neg\,\mathrm{gv}'(10^{10^{10}})\urcorner$ durch $\mathrm{br}_{10^{10^{10}}}$ mitbestimmt sein könnte. Ohne eine reduktive Analyse des Regelfolgens gelten nämlich uneingeschränkt die *gewöhnlichen* Kriterien für die Zuschreibung des Gebundenseins an eine Regel. Und gemäß dieser Kriterien wird eine Person nur bei *bewußter* Anerkennung von gr als Regel, die den korrekten Gebrauch von »u« und »g« bestimmt, an gr (inklusive ihres nicht praktisch zu befolgenden Teils) gebunden sein können; also insbesondere nur, wenn sie gr *erfaßt* hat, wenn ihr gr *präsent* ist. Entsprechendes gilt für br. Doch ist gewiß vielen $\mathcal{D}$-Sprechern br mitnichten präsent, und zwar ohne daß sie mathematische Analphabeten wären. Damit nicht genug! Selbst uns, die wir die intuitionistischen Erklärungen der logischen Konstanten kennen, ist br nicht wirklich präsent. Denn wie bereits (indirekt in der Vorbemerkung zu 3.1.2) bemerkt und von Dummett an mehreren Stellen betont,[12] ist der i-Beweisbegriff derzeit noch ein rein programmatischer, dessen Kohärenz bzw. letztendliche Wohldefinierbarkeit keineswegs außer Frage steht.

5.2.3 Tennants regelfolgen-reduktionistische Replik und ihre Unzulänglichkeit

Hier bleibt einem intuitionistischen Anhänger des Normativitätsarguments noch eine Entgegnungsstrategie (die zu verfolgen freilich miteinschließen würde, Dummett die Gefolgschaft aufzukündigen): Er könnte in den sauren Apfel beißen und sich doch um eine reduktive Analyse des Regelfolgens bemühen. Der Apfel ist allerdings sehr sauer. Denn Kripkes Argumentation in Anlehnung an Wittgenstein gegen die Möglichkeit einer solchen Analyse ist höchst überzeugend; insbesondere und vor allem seine Argumentation gegen die Möglichkeit einer dispositionalen Analyse.

Tennant bestreitet dies. Seine Kritik an Kripkes Argumentation beruht jedoch – wenig überraschend – wesentlich u.a. auf einer Überlegung, die mit Blick auf br auf folgende durchaus verfehlte Überlegung hinausläuft:[13]

Nach Kripke läßt sich auf keinerlei Disposition unsererseits verweisen, die unser Gebundensein an br ausmachen könnte. Dies zeige sich schon allein daran, daß wir keineswegs disponiert sind, in Anbetracht eines (eventuell unüberschaubaren) Diskursstücks dieses auf Nachfrage (in bezug auf einen gegebenen mathematischen $\mathcal{D}$-Satz) hinsichtlich seines Beweisstatus richtig zu beurteilen.

In der Tat, so sind wir nicht disponiert. Wir sind jedoch durchaus disponiert, in Anbetracht eines Diskursstücks einen beliebigen beweisstatus-relevanten Aspekt desselben auf Nachfrage richtig zu beurteilen. Und das genügt völlig.

In Anbetracht des (Teil-) Arguments in 5.1.3.2 ist klar, woran diese Überlegung krankt: Dort wurde gezeigt, daß es für einen i-Beweis von $\mathrm{gv}'(10^{10^{10}})$ oder von $\ulcorner\neg\,\mathrm{gv}'(10^{10^{10}})\urcorner$ einen beweisstatus-relevanten Aspekt desselben gibt, den wir nur im Prinzip beurteilen könnten. Wir sind also mitnichten derart disponiert, wie Tennant glaubt.

[12]Vgl. etwa *The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic*, S. 242: „The notion of canonical proof [...] lies in some obscurity; and this state of affairs is not indefinitely tolerable, because, unless it is possible to find a coherent and relatively sharp explanation of the notion, the viability of the intuitionist explanations of the logical constants must remain in doubt.“

[13]Vgl. *The Taming of the True*, 4.13.2.

5.3 Zusammenfassung

Damit wäre das Ziel dieses Kapitels erreicht. In 5.1 ist deutlich geworden:
Der Manifestationsbedingung läßt sich in bezug auf einen mathematischen Satz mitnichten durch Identifikation der Kenntnis seiner Wahrheitsbedingung mit der von Tennant favorisierten Fähigkeit Genüge leisten; der Fähigkeit, in Anbetracht eines (eventuell unüberschaubaren) Diskursstücks einen beliebigen beweistatus-relevanten Aspekt desselben in bezug auf den Satz richtig zu beurteilen. Damit spricht aber alles für die Ansicht Wrights und der übrigen von Tennant kritisierten Anti-Realisten, daß die Manifestationsbedingung die Gleichsetzung der Kenntnis der Wahrheitsbedingung des Satzes mit der Fähigkeit bedingt, in Anbetracht eines (überschaubaren) Diskursstücks dessen Beweisstatus hinsichtlich des Satzes richtig zu beurteilen. Aber diese Gleichsetzung verträgt sich nicht mit der intuitionistischen Analyse. Vielmehr hätte sie die strikt-finitistische Konsequenz: Ein mathematischer Satz ist nur dann wahr, wenn wir ihn innerhalb der uns gesetzten Grenzen bezüglich Lebenszeit, Rechengeschwindigkeit, Ausdauer, Datenspeicherungsmöglichkeiten etc. beweisen könnten. Das heißt, es ist überaus stark zu bezweifeln, daß man bei Akzeptanz der Gebrauchsthese$_d$ sowie des Manifestationsarguments umhinkönnte, sich auf ein strikt-finitistisches Verständnis mathematischer Wahrheit festzulegen.

Mit der Desavouierung des Vorschlags von Tennant dafür, wie der Manifestationsbedingung in bezug auf mathematische Sätze in Einklang mit der intuitionistischen Analyse Rechnung zu tragen wäre, ist zudem die ohnehin enorm überzeugende anti-regelfolgen-reduktionistische Argumentation Kripkes zusätzlich gestützt worden. Somit ist sehr stark an der Möglichkeit einer

reduktiven Analyse des Regelfolgens zu zweifeln. Aber in 5.2 ist deutlich geworden:
Allein durch eine solche Analyse wäre der Einschätzung ein Mindestmaß an Plausibilität zu verleihen, wir könnten an eine bloß prinzipiell zu befolgende Regel gebunden sein, ohne sie präsent zu haben. Und wer von der Entwickelbarkeit einer Bedeutungstheorie$_d$ ausgeht und das Normativitätsargument unterschreibt wird anerkennen müssen, daß wir gemäß der intuitionistischen Analyse an „Regeln“ gebunden wären, die uns nicht präsent sind und die wir nicht praktisch befolgen können – weil nach der Analyse ein mathematischer Satz wahr sein kann, ohne daß wir ihn innerhalb der erwähnten Grenzen beweisen könnten. Das heißt, auch für das Normativitätsargument gilt: Es ist überaus stark zu bezweifeln, daß man bei Akzeptanz des Arguments sowie der Gebrauchsthese$_d$ umhinkönnte, sich auf ein strikt-finitistisches Verständnis mathematischer Wahrheit festzulegen.