Kapitel 4

Die Labilität des nur lokal revisionistischen Intuitionismus

Ein Ergebnis der in diesem zweiten Teil anstehenden (und im fünften Kapitel endlich in Angriff genommenen) Argumentation gegen die Gebrauchsthese$_d$ wird – die Stichhaltigkeit der Argumentation vorausgesetzt – sein: Die These taugt nicht als Ausgangspunkt für eine philosophische Fundierung des Intuitionismus; für eine überzeugende Begründung der intuitionistischen Analyse.

Auf den ersten Blick scheinen die Intuitionisten ob dieses Resultats ganz gelassen bleiben zu können. Schließlich gibt es eine Alternative zur Wahl der Gebrauchsthese$_d$ als derartigen Ausgangspunkt, nämlich die der **anti-platonistischen These**: Mathematische Objekte sind keine „Dinge in der realen, objektiven, von unserem Denken unabhängigen Welt", sondern bloße (wenn auch faszinierende) „Konstrukte unseres Geistes", die als solche eben „nur als Bezugsgegenstände unseres Denkens existieren". Und, so könnte man meinen, diese Wahl ist nicht nur naheliegender als jene, sondern zudem aussichtsreicher.

Ziel dieses (Exkurs-) Kapitels ist die Zerstreuung dieses Eindrucks (womit, wie in der Einleitung gesagt, die auch rein mathematik-philosophische Relevanz meiner Argumentation deutlich werden soll). In *The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic* steuert Dummett dieses Ziel mittels einer Argumentation an, die zeigen soll: Die Frage nach dem ontologischen Status mathematischer Objekte kann sinnvoll letztendlich nur als rein stilistische Variante der semantischen Frage nach dem Wesen mathematischer Wahrheit verstanden werden. Somit wäre eine anti-platonistische, eine von der anti-platonistischen These ausgehende, vermeintliche Fundierung des Intuitionismus zwangsläufig als Petitio zu verwerfen.[1]

[1] Vgl. S. 229: „We cannot [. . .] *first* decide the ontological status of mathematical objects, and

Ich will es hingegen (im wesentlichen) vermöge einer Argumentation erreichen, die die folgende zunächst höchst plausible Vermutung in erheblichen Zweifel ziehen soll – dabei die Unterscheidung zwischen „Dingen in der (von unserem Denken unabhängigen) Welt“ und „Konstrukten unseres Geistes“ als hinreichend klare sowie nicht letztendlich semantische voraussetzend: Die anti-platonistische These ist **lokal**; soll heißen, es wäre eine anti-platonistische Fundierung des Intuitionismus möglich, die unsere Wahrheitsintuitionen in bezug auf (alltags-) physikalische, chemische, biologische und sonstige „allein von der Welt handelnde“ Sätze unberührt ließe.

4.1 Bedeutungstheoretischer kontra anti-platonistischer Ansatz zur Fundierung des Intuitionismus

4.1.1 Der vermeintliche Vorzug des anti-platonistischen Ansatzes

Richten wir unser Augenmerk wieder auf die Goldbachsche Vermutung bzw. den $\mathcal{A}$-Satz $\ulcorner \forall x\, \mathrm{gv} \urcorner$; ferner etwa auf den Satz **sk** = »Es gibt unendlich viele Sandkörner, die jeweils irgendwann einmal existiert haben oder existieren werden« – der offenkundig genau dann wahr ist, wenn dies auf jeden der Sätze in **SK** $= \{\mathrm{sk}(0), \mathrm{sk}(1), \mathrm{sk}(2), \ldots\}$ zutrifft; wobei gelte (siehe D/K 13): $\mathbf{sk(}\boldsymbol{n}\mathbf{)} = \ulcorner$Es gibt mindestens dez($n$) Sandkörner, die

jeweils irgendwann einmal existiert haben oder existieren werden$\urcorner$. Und fragen wir uns, wie ein von der anti-platonistischen These ausgehendes und mit der intuitionistischen Analyse vereinbares Argument aussehen könnte, das einerseits gegen die Attestierbarkeit der Bivalenz von $\ulcorner \forall x\, \mathrm{gv} \urcorner$ spricht, aber andererseits durchaus die Intuition des Gesunden Menschenverstandes bestätigt, daß sk bivalent ist.

Der Kerngedankengang eines solchen Arguments wird sich höchstens unwesentlich von dem folgenden unterscheiden, wonach der aw/ef-Schluß (siehe D/K 14) zwar bezüglich SK zulässig ist, nicht aber bezüglich GV:

then, with that as a premiss, deduce the character of mathematical truth or the correct model of meaning for mathematical statements. Rather, we have first to decide on the correct model of meaning [...]; and then one or other picture of the metaphysical character of mathematical reality will force itself upon us.“

Für eine beliebige gerade Zahl $n \geq 4$ können wir zumindest prinzipiell (im Sinne der intuitionistischen Analyse) entscheiden, ob der entsprechende GV-Satz wahr ist; etwa indem wir GES_n herbeiführen und anschließend überprüfen, ob GVB_n oder vielmehr GFB_n erfüllt ist. Wie sollten wir aber vorgehen, um zu entscheiden, ob sämtliche GV-Sätze wahr sind? Letztendlich laufen alle Vorschläge, die einem bei unserem derzeitigen mathematischen Wissensstand in den Sinn kommen, auf den hinaus: Man ermittle zuerst den Wahrheitswert von gv(4), dann den von gv(6), dann den von gv(8), und anschließend fahre man solange entsprechend fort, bis die Falschheit irgendeines GV-Satzes festgestellt ist. Da jedoch gewiß nicht von der Existenz einer geraden Zahl ≥ 4 auszugehen ist, die nicht Summe zweier Primzahlen ist, darf auch nicht unterstellt werden, daß dieses Vorgehen jemals zur gewünschten Entscheidung führen würde. Das heißt, es ist nicht davon auszugehen, daß wir auch nur im Prinzip entscheiden könnten, ob jeder GV-Satz wahr ist.

Nun spricht dieser Umstand für sich genommen noch nicht gegen die Attestierbarkeit der Bivalenz von $\ulcorner \forall x \, \mathrm{gv} \urcorner$. Schließlich ist zweifelsohne sk als bivalent zu erachten, obwohl in bezug auf die SK-Sätze ebensowenig davon auszugehen ist, daß wir auch nur im Prinzip entscheiden könnten, ob sie allesamt wahr sind, wie in bezug auf die GV-Sätze. Doch besteht z.B. zwischen gv(7022) und sk(7022) ein grundlegender Unterschied: gv(7022) schreibt der Zahl 7022 eine bestimmte Eigenschaft zu, nämlich die, (gleich 0, gleich 2, ungerade oder) Summe zweier Primzahlen zu sein. Das heißt, der Satz handelt nicht ausschließlich (nicht einmal partiell) von der Welt, und zwar allein schon deshalb nicht, weil die Zahl eben ein Konstrukt unseres Geistes, ein allein als Bezugsgegenstand unseres Denkens existierendes Objekt ist. Der Satz sk(7022) hingegen handelt (allein) von der Welt. Denn zum einen schreibt er natürlich keineswegs der Zahl 7022, sondern vielmehr (implizit) dem *Universum* eine bestimmte Eigenschaft zu, nämlich die, mindestens 7022 Sandkörner jeweils irgendwann einmal enthalten zu haben oder zu enthalten. Und zum andern läßt sich diese Eigenschaft nach bekanntem Muster auch ohne scheinbare Bezugnahme auf Zahlen oder sonstige mathematische Objekte festmachen.[2]

Die Sätze gv(n) und sk(n) unterscheiden sich ganz entsprechend voneinander. Also können wir festhalten:
Einerseits entscheidet die Welt für keinen GV-Satz, ob er wahr ist. Somit entscheidet sie erst recht nicht, ob alle GV-Sätze wahr sind. Andererseits entscheidet sie durchaus für jeden SK-Satz, ob er wahr ist. Somit entscheidet sie auch, ob die SK-

[2]Beispielsweise können wir die Tatsache, daß derzeit mindestens drei Sandkörner existieren, so zum Ausdruck bringen: Es gibt Sandkörner s, s', s'', die derzeit existieren und für die gilt: $s \neq s'$, $s \neq s''$ und $s' \neq s''$.

Sätze allesamt wahr sind; mehr noch:[3] zudem entscheidet sie, ob sich unter ihnen wenigstens ein falscher befindet – während nämlich für eine *unendliche* Satzmenge Σ die prinzipielle Fähigkeit, für jeden Σ-Satz zu entscheiden, ob er wahr ist, wie gesehen, mitnichten die prinzipielle Fähigkeit miteinschließt, zu entscheiden, ob die Σ-Sätze allesamt wahr sind, geht mit der tatsächlichen Entscheidung für jeden Σ-Satz, ob er wahr ist, offenkundig nicht nur die Entscheidung einher, ob alle Σ-Sätze wahr sind, sondern auch die, ob einer von ihnen falsch ist.

Deswegen ist zum einen die Bivalenz von sk festzustellen, aber zum andern: Womöglich ist $\ulcorner\forall x\,\mathrm{gv}\urcorner$ bivalent, doch darf dies angesichts dessen nicht unterstellt werden, daß nicht davon auszugehen ist, daß wir auch nur prinzipiell entscheiden könnten, ob sämtliche GV-Sätze wahr sind.

Obzwar die Rede davon, daß für jeden SK-Satz „die Welt entscheidet", ob er wahr ist, gelinde gesagt, nicht ganz unproblematisch ist, entbehrt dieses **anti-platonistische Argument** doch nicht einer gewissen Prima-facie-Plausibilität. Es legt damit die Einschätzung nahe, der anti-platonistischen These gebühre bei der Wahl eines Ausgangspunkts für eine Fundierung des Intuitionismus insofern der Vorzug gegenüber der Gebrauchsthese$_d$ als sie im Gegensatz zu dieser lokal sei.

4.1.2 Die Bringschuld anti-platonistisch motivierter nur lokal revisionistischer Intuitionisten

Nun ist fraglos von der Globalität der Gebrauchsthese$_d$ auszugehen; wegen ihrer Allgemeinheit hätte eine bedeutungstheoretische, eine von ihr ausgehende, Fundierung des Intuitionismus gewiß die Konsequenz, daß die Bivalenz von sk ebensowenig zu unterstellen wäre wie die von $\ulcorner\forall x\,\mathrm{gv}\urcorner$ bzw. daß der aw/ef-Schluß bezüglich SK ebensowenig zulässig wäre wie in bezug auf GV. Es stellt sich allerdings durchaus die Frage, ob es sich bei der auf den ersten Blick zu vermutenden Lokalität der anti-platonistischen These nicht bloß um eine scheinbare handelt.

Vorbemerkung: Die Grundidee der Argumentation in den beiden folgenden Unterabschnitten ist die:
Angenommen, es sei eine Satzmenge $\Sigma = \{\sigma(2), \sigma(3), \sigma(4), \ldots\}$ bestimmt, für die gilt: (1) Σ ist auch von den Intuitionisten als wohldefinierte Satzmenge anzuerken-

[3] Aus intuitionistischer Sicht darf für eine (unendliche) Satzmenge Σ i.a. nicht von der Annahme, daß die Σ-Sätze nicht allesamt wahr sind, darauf geschlossen werden, daß wenigstens einer von ihnen falsch ist (vgl. Fn. 12) – selbst unter der Voraussetzung nicht, daß jeder der Sätze bivalent ist.

nen; (2) für $n \geq 2$ sind $\sigma(n)$ und $\mathrm{gv}(2n)$ äquivalent; und (3) die Σ-Sätze handeln von der Welt. Dann müßte die Lokalität der anti-platonistischen These stark angezweifelt werden. Denn wegen (1) und (2) würde auch aus intuitionistischer Sicht gelten, daß die Σ-Sätze genau dann allesamt wahr sind oder wenigstens einer von ihnen falsch ist, wenn dies für die GV-Sätze zutrifft; somit auch, daß der aw/ef-Schluß bezüglich GV zulässig ist, wenn er bezüglich Σ zulässig ist. Und wegen (3) wäre nicht zu sehen, weshalb der aw/ef-Schluß nicht auch bezüglich Σ zulässig sein sollte, wenn er bezüglich SK zulässig ist.

Hierbei ist zu beachten: Eine Menge Z von Zeichenketten ist aus intuitionistischer Sicht genau dann wohldefiniert, wenn wir für eine beliebige konkret gegebene Zeichenkette prinzipiell entscheiden könnten, ob sie zu Z gehört. Ferner: Als notwendiges und hinreichendes Kriterium für das Von-der-Welt-Handeln eines Satzes lege ich ganz im Sinne des anti-platonistischen Arguments die Bedingung zugrunde: Wenn nicht für den Satz selbst, so gilt doch immerhin für eine geeignete Paraphrase seiner, daß sich die darin enthaltenen referentiellen Termini ausnahmslos auf Dinge in der Welt beziehen.

Gemäß diesem Kriterium handelt z.B. der tautologische Satz »Wenn Sand Silicium enthält, dann enthält Sand Silicium« von der Welt. Und das Kriterium läßt sich gerade mit Blick auf solche Konsequenzen kritisieren; es läßt sich

einwenden, es müsse statt auf den ontologischen Status der Bezugsgegenstände eines Satzes auf dessen *informativen* Gehalt über die Welt abzielen (siehe 4.2). Doch es geht mir hier um die Frage, ob die anti-platonistische These wirklich als lokal einzuschätzen ist. Und die anti-platonistische These ist nun einmal eine ontologische. Das heißt, legt man ein anderes als das obige, ein nicht-ontologisches Kriterium für das Von-der-Welt-Handeln eines Satzes zugrunde, so ist von vornherein klar, daß die anti-platonistische These nicht lokal sein kann.

4.1.2.1 Die Grundschuld

Ernste Zweifel an der Lokalität der anti-platonistischen These weckt bereits folgende Überlegung:

$$\text{Für } n \geq 2 \text{ sei } \boldsymbol{\mathrm{sk}'(n)} = \begin{cases} \ulcorner(\neg\,\mathrm{sk}(n) \vee \mathrm{sk}(n))\urcorner & \text{falls}: \mathrm{gv}(2n) \text{ ist wahr} \\ \ulcorner(\neg\,\mathrm{sk}(n) \wedge \mathrm{sk}(n))\urcorner & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die logischen Konstanten »$\neg$«, »$\vee$« und »$\wedge$« sind natürlich keine referentiellen Ausdrücke. Somit bezieht sich für $n \geq 2$ $\mathrm{sk}'(n)$ auf dieselben Objekte wie $\mathrm{sk}(n)$. Das heißt, die Sätze in $\mathbf{SK'} = \{\mathrm{sk}'(2), \mathrm{sk}'(3), \mathrm{sk}'(4), \ldots\}$ handeln ebenso von der Welt wie die SK-Sätze – wogegen keineswegs spricht, daß $\ulcorner(\neg\,\mathrm{sk}(n) \vee \mathrm{sk}(n))\urcorner$ und

$\ulcorner(\neg\,\mathrm{sk}(n)\wedge\mathrm{sk}(n))\urcorner$ *logisch* wahr bzw. falsch sind (die Bivalenz von $\mathrm{sk}(n)$ vorausgesetzt). Also ist der aw/ef-Schluß bezüglich SK′ ebenso zulässig wie bezüglich SK. Damit ist er aber auch in bezug auf GV zu akzeptieren. Denn da ja $\ulcorner(\neg\,\mathrm{sk}(n)\vee\mathrm{sk}(n))\urcorner$ wahr und $\ulcorner(\neg\,\mathrm{sk}(n)\wedge\mathrm{sk}(n))\urcorner$ falsch ist, ist für $n\geq 2$ die Äquivalenz von $\mathrm{sk}'(n)$ und $\mathrm{gv}(n)$ zu konstatieren.

Wie ist diese Überlegung von einem Intuitionisten zu entkräften, der den aw/ef-Schluß bezüglich SK aufgrund des anti-platonistischen Arguments bzw. mit Verweis darauf unterschreibt, daß jeder SK-Satz von der Welt handelt? Offenbar bleibt ihm, dem **ap-Intuitionisten**,[4] nur, die Zulässigkeit des aw/ef-Schlusses bezüglich SK′ mit Verweis darauf zu bestreiten, daß die SK′-Sätze mit Rekursnahme auf die Wahrheitswerte der Spezialisierungen von $\ulcorner\forall x\,\mathrm{gv}\urcorner$ bestimmt sind. Damit steht er jedoch in gehöriger Bringschuld: In Anbetracht seiner Billigung des aw/ef-Schlusses bezüglich SK muß er den Verdacht ausräumen, daß seine Ablehnung des Schlusses bezüglich SK′ auf nichts anderem als reiner Willkür beruht. Anders als man auf den allerersten Blick vermuten könnte, wie man sich aber leicht klarmacht, hat die Rekursnahme auf die Wahrheitswerte der Spezialisierungen von $\ulcorner\forall x\,\mathrm{gv}\urcorner$ bei der Bestimmung der SK′-Sätze nämlich mitnichten zur Folge, daß SK′ nicht auch aus intuitionistischer Sicht als wohldifiniert anzusehen wäre.

4.1.2.2 Die Zusatzschuld

Doch damit nicht genug! Angesichts der mit der obigen verwandten Überlegung im Anschluß an folgende Definitionen steigert sich die Bringschuld des ap-Intuitionisten noch, und zwar beträchtlich:

Vorbemerkung: Daß für $n\geq 2$ die Definition des Satzes $\mathrm{gv}^*(n)$ in (f) des einigermaßen komplizierten Systems der Hilfsdefinitionen (a)-(e) bedarf, ist dem Umstand geschuldet, daß die Definition zwei divergierenden Anforderungen genügen soll: (1) Es soll sich leicht die Äquivalenz zwischen $\mathrm{gv}^*(n)$ und $\mathrm{gv}(2n)$ aufzeigen lassen, freilich ohne daß der Zusammenhang zwischen den beiden Sätzen gar so „unnatürlich“ wirkt wie der zwischen $\mathrm{sk}'(n)$ und $\mathrm{gv}(2n)$; aber (2) jegliche scheinbare Bezugnahme von $\mathrm{gv}^*(n)$ auf mathematische Objekte ist tatsächlich nur eine scheinbare, die sich ohne Probleme (wenn auch nur mit noch größerem definitorischen Aufwand) eliminieren ließe.

(a) Für eine nicht-leere Teilmenge M von $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sei $\boldsymbol{\min M}$ dasjenige Paar $\langle n,m\rangle\in$

[4] »ap« kurz für: anti-platonistischer.

M mit der Eigenschaft, daß für alle $\langle l, k\rangle \in M\backslash\{\langle n, m\rangle\}$ gilt: $n < l$; oder $n = l$ und $m < k$.

(b) Für endliches derartiges M gelte: $\boldsymbol{M^0} = M$; und $\boldsymbol{M^{n+1}} = M^n\backslash\{\min M^n\}$ für $n < |M|$.

(c) Für $n \geq 2$ sei $\mathbf{PZP}_{\boldsymbol{n}}$ die Menge der Primzahlpaare $\langle p, q\rangle$ mit $p \leq q < 2n$.

(d) Sei $\mathbf{gv^*}(\boldsymbol{n, m, l}) = \ulcorner$Ein Blatt Papier mit genau dez(n) Punkten auf einer und genau dez(m) Punkten auf der anderen seiner beiden Seiten weist insgesamt genau dez(l) Punkte auf$\urcorner$.

(e) Für $n \geq 2$ und $l \leq |\mathrm{PZP}_n| - 2$ gelte: $\mathbf{gv^{*\prime}}(\boldsymbol{n, 0, m}) = \mathrm{gv}^*(p, q, m)$ mit $\langle p, q\rangle = \min \mathrm{PZP}_n$; und $\mathbf{gv^{*\prime}}(\boldsymbol{n, l+1, m}) = \ulcorner(\mathrm{gv}^{*\prime}(n, l, m) \vee \mathrm{gv}^*(p, q, m))\urcorner$ mit $\langle p, q\rangle = \min \mathrm{PZP}_n^{l+1}$.

(f) Für $n \geq 2$ sei $\mathbf{gv^*}(\boldsymbol{n}) = \mathrm{gv}^{*\prime}(n, |\mathrm{PZP}_n| - 1, 2n)$.

Zur Veranschaulichung: $\mathrm{PZP}_2^0 = \{\langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$ und $\mathrm{PZP}_2^1 = \{\langle 2, 3\rangle\}$. Somit gilt: $\mathrm{gv}^{*\prime}(2, 0, 4) = \mathrm{gv}^*(2, 2, 4)$ und $\mathrm{gv}^{*\prime}(2, 1, 4) = \ulcorner(\mathrm{gv}^*(2, 2, 4) \vee \mathrm{gv}^*(2, 3, 4))\urcorner$. Damit handelt es sich bei $\mathrm{gv}^*(2)$ um den Satz »(Ein Blatt Papier mit genau 2 Punkten auf einer und genau 2 Punkten auf der anderen seiner beiden Seiten weist insgesamt genau 4 Punkte auf $\vee$ Ein Blatt Papier mit genau 2 Punkten auf einer und genau 3 Punkten auf der anderen seiner beiden Seiten weist insgesamt genau 4 Punkte auf)«.

Da Papierblätter und Punkte bzw. Exemplare von »•« materielle Gegenstände sind, handelt für $n \geq 2$ der Satz $\mathrm{gv}^*(n)$ von der Welt; er bringt ebenso ein (nicht sehr grundlegendes) Naturgesetz zum Ausdruck, wie es etwa »Ein in 17 Litern Wasser getauchtes Sandkorn löst sich nicht auf« tut. Um die Zulässigkeit des aw/ef-Schlusses bezüglich GV aufzuzeigen, genügt es somit, deutlich zu machen, daß für jedes solche n gilt:

$$\mathrm{gv}^*(n) \text{ ist wahr} \Leftrightarrow \mathrm{gv}(2n) \text{ ist wahr.}$$

Sei also $n \geq 2$.

Angenommen, $\mathrm{gv}(2n)$ ist wahr bzw. es gibt zwei Primzahlen p, q mit $p \leq q$ und $p+q = 2n$. Da ja selbstverständlich ein Blatt Papier mit genau p Punkten auf einer und genau q Punkten auf der anderen seiner beiden Seiten insgesamt genau $p + q$ Punkte aufweist, ist somit $\mathrm{gv}^*(p, q, 2n)$ wahr; also erst recht $\mathrm{gv}^*(n)$.

Angenommen, $\mathrm{gv}^*(n)$ ist wahr bzw. es gibt zwei Primzahlen p, q mit $p \leq q < 2n$, so daß $\mathrm{gv}^*(p, q, 2n)$ wahr ist. Ein Blatt Papier mit genau p Punkten auf einer und genau q Punkten auf der anderen seiner beiden Seiten weist also insgesamt genau $2n$ Punkte auf. Da es ja aber insgesamt genau $p+q$ Punkte aufweist, gilt somit: $p+q=2n$. Das heißt, $\mathrm{gv}(2n)$ ist wahr.

Wie könnte der ap-Intuitionist diese Überlegung entkräften? Er wird wohl kaum bestreiten können, daß $\mathbf{GV^*} = \{\mathrm{gv}^*(2), \mathrm{gv}^*(3), \mathrm{gv}^*(4), \ldots\}$ eine wohldefinierte Satzmenge darstellt; auch nicht, daß jeder GV*-Satz in der Tat von der Welt handelt – wogegen ja keineswegs spricht, daß es keiner empirischen Untersuchung, sondern lediglich einer geeigneten Rechnung bedarf, um etwa $\mathrm{gv}^*(4)$ bzw. $\mathrm{gv}^*(3,5,8)$ als wahr erkennen zu können. Wenn der ap-Intuitionist den obigen Zusammenhang zwischen den Wahrheitswerten der GV-Sätze und denen der GV*-Sätze anerkennt, steht er also vor folgendem Problem: Er muß seine notgedrungene Zurückweisung des aw/ef-Schlusses bezüglich GV*, mit Verweis auf die Art der Bestimmung der GV*-Sätze, als nicht völlig ad hoc ausweisen. Doch erscheint dieses Unterfangen noch aussichtsloser als das entsprechende hinsichtlich SK′.

Fragen wir uns also, ob der ap-Intuitionist den Zusammenhang zwischen den Wahrheitswerten der GV-Sätze und denen der GV*-Sätze in Abrede stellen kann. Hierzu müßte er sich wohl oder übel auf eine Überlegung wie die folgende stützen:

Betrachten wir z.B. $\mathrm{gv}^*(10^{10^{10}}, 10^{10^{10}}, 10)$.

Natürlich wäre von der Falschheit dieses Satzes auszugehen, wenn er denn besagte, daß jedes *begrifflich* mögliche Blatt Papier mit jeweils genau $10^{10^{10}}$ Punkten auf seinen beiden Seiten insgesamt nur zehn Punkte aufweist. Das besagt er allerdings mitnichten. Vielmehr besagt er, daß jedes *physikalisch* mögliche Blatt Papier mit jeweils genau $10^{10^{10}}$ Punkten auf seinen beiden Seiten insgesamt nur zehn Punkte aufweist. Somit ist er wahr, wenn es kein physikalisch mögliches Blatt Papier mit jeweils $10^{10^{10}}$ Punkten auf seinen beiden Seiten gibt, d.h. wenn die *grundlegenden* Naturgesetze z.B. ausschließen, daß sich im gesamten Universum überhaupt soviel Materie befinden könnte, wie für das Entstehen eines derartigen Blattes nötig wäre. Und daß die grundlegenden Naturgesetze ebendies *nicht* ausschließen, dürfen wir gewiß nicht unterstellen.

Es ist also nicht von der Falschheit aller Sätze $\mathrm{gv}^*(n,m,l)$ mit $n+m \neq l$ auszugehen; somit auch nicht davon, daß für $n \geq 2$ die Sätze $\mathrm{gv}^*(n)$ und $\mathrm{gv}(2n)$ äquivalent sind.

Mit diesem Einwand geriete der ap-Intuitionist allerdings vom Regen in die Traufe. Denn wenn er bestreitet, daß von der physikalischen Möglichkeit eines Blattes

Papier mit je n Punkten auf seinen beiden Seiten auszugehen ist, sei n auch noch so groß, wird er zugeben müssen: Für gerades $n \geq 4$ ist die Frage, ob wir prinzipiell GES_n herbeiführen und dann überprüfen könnten, ob GVB_n oder vielmehr GFB_n erfüllt wäre, vollkommen unabhängig von der Frage, ob dies physikalisch möglich ist.[5] Und wenn er dies zugesteht, wird er sich hinsichtlich seiner Zurückweisung der Überlegung à la Russel in 3.2.2 zugunsten der Bivalenz von $\ulcorner\forall x\,\mathrm{gv}\urcorner$ nicht auf die trotz aller Unklarheiten des physikalischen Möglichkeitsbegriffs zweifelsohne zu attestierende physikalische Unmöglichkeit der Herbeiführung sämtlicher Goldbach-Entscheidungssituationen in endlicher Zeit berufen können. Vielmehr wird er dann offenbar darauf festgelegt sein, die *begriffliche* Unmöglichkeit dessen aufzuzeigen; die *Inkohärenz* der Vorstellung, der Wahrheitswert von $\ulcorner\forall x\,\mathrm{gv}\urcorner$ ließe sich durch sukzessive Bestimmung der Wahrheitswerte aller GV-Sätze ermitteln. Und es ist schlechterdings nicht zu sehen, wie ihm dies gelingen sollte, ohne zugleich die Inkohärenz der Vorstellung aufzuzeigen, die Welt bestimme auf einen Streich die Wahrheitswerte aller SK-Sätze.

4.1.3 Der Vorzug des Dummettschen Ansatzes

Um etwaigen Einwänden gegen die vorangegangene Argumentation vorzubeugen, die sich aus einer Überschätzung des mit ihr verbundenen Anspruchs speisen, möchte ich mich einem ebensolchen Einwand zuwenden:

Für $n \geq 2$ handele es sich bei $\boldsymbol{\mathrm{sk}''(n)}$ um den Satz ⌜Zu jedem Zeitpunkt der ersten $\mathrm{dez}(n)$ $\mathrm{dez}(n+1)$-tel des Jahres 1523 existierten genau 10^{20} Sandkörner⌝ und sei $\boldsymbol{\mathrm{sk}'''(n)} = \begin{cases} \ulcorner(\neg\,\mathrm{sk}''(n) \vee \mathrm{sk}''(n))\urcorner \text{ falls : gv}(2n) \text{ ist wahr} \\ \ulcorner(\neg\,\mathrm{sk}''(n) \wedge \mathrm{sk}''(n))\urcorner \text{ sonst} \end{cases}$.

Würde der ap-Intuitionist, der natürlich den aw/ef-Schluß auch bezüglich $\mathbf{SK''} = \{\mathrm{sk}''(2), \mathrm{sk}''(3), \mathrm{sk}''(4), \ldots\}$ akzeptiert, mit seiner notgedrungenen Ablehnung des aw/ef-Schlusses bezüglich $\mathbf{SK'''} = \{\mathrm{sk}'''(2), \mathrm{sk}'''(3), \mathrm{sk}'''(4), \ldots\}$ in ähnlichen Rechtfertigungsnotstand geraten wie mit seiner Ablehnung des aw/ef-Schlusses bezüglich SK′? Nein! Denn es besteht ein qualitativer Unterschied zwischen SK″ und SK‴, der nicht zwischen SK und SK′ besteht:
Der ap-Intuitionist beginge offenbar eine *Petitio*, begründete er seine Billigung des aw/ef-Schlusses bezüglich SK mit der Annahme der Bivalenz von sk. Somit brächte

[5] Ansonsten könnte man ihm entgegenhalten: Wenn die physikalische Möglichkeit etwa eines Blattes Papier mit je $10^{10^{10}}$ Punkten auf seinen beiden Seiten nicht zu unterstellen ist, so auch nicht die der Herbeiführung von $\mathrm{GES}_{10^{10^{10}}}$; und damit ist dann auch nicht davon auszugehen, daß wir für einen beliebigen GV-Satz im Prinzip entscheiden könnten, ob er wahr ist.

ihm der Verweis darauf rein gar nichts, daß es keinen von der Welt handelnden, sich insbesondere nicht (direkt oder indirekt) auf die Wahrheitswerte der GV-Sätze beziehenden Satz gibt, dessen Bivalenz garantieren würde, daß die SK′-Sätze entweder allesamt wahr sind oder wenigstens einer von ihnen falsch ist. Hingegen brächte ihm der entsprechende Verweis darauf sehr viel, daß es keinen von der Welt handelnden Satz gibt, dessen Bivalenz garantieren würde, daß die SK‴-Sätze entweder allesamt wahr sind oder wenigstens einer von ihnen falsch ist. Denn es gibt einen von der Welt handelnden Satz, so daß sich durchaus mit der Annahme seiner Bivalenz die Zulässigkeit des aw/ef-Schlusses bezüglich SK″ begründen läßt, ohne eine Petitio zu begehen. Es handelt sich dabei um den Satz **sk″** = »Zu jedem Zeitpunkt des Jahres 1523 existierten genau 10^{20} Sandkörner«; und zwar ist die Begründung die ganz schlichte: Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ ist sk″ genau dann wahr, wenn jeder SK″-Satz wahr ist, und genau dann falsch, wenn wenigstens ein SK″-Satz falsch ist; und da sk″ bivalent ist, sind somit entweder sämtliche SK″-Sätze wahr oder ist wenigstens einer von ihnen falsch.

Dieser Unterschied zwischen SK″ und SK‴ besteht offenbar auch zwischen SK″ und GV^*. Da eine bedeutungstheoretische Fundierung des Intuitionismus gewiß auch die Unzulässigkeit des aw/ef-Schlusses bezüglich SK″ bedingen würde, können wir somit festhalten: Die Argumentation in 4.1.2 macht keineswegs deutlich, daß *sämtliche*, sondern nur, daß *einige* der intuitiv gültigen Schlüsse, die in Anbetracht einer bedeutungstheoretischen Fundierung des Intuitionismus abzulehnen wären, auch in Anbetracht einer anti-platonistischen Fundierung inakzeptabel wären.

Die Frage nach der Stichhaltigkeit dieses Einwandes, d.h. die, ob die Intuition von der Bivalenz von sk″ wirklich grundlegender ist als die von der Zulässigkeit des aw/ef-Schlusses bezüglich SK″, so daß jene Intuition diese zu stützen vermag, kann ich getrost auf sich beruhen lassen. Mit der Argumentation in 4.1.2 habe ich nämlich lediglich das eingangs erwähnte Ziel verfolgt: die Einschätzung zu untergraben, die anti-platonistische These stelle einen geeigneteren Ausgangspunkt für eine Fundierung des Intuitionismus dar als die Gebrauchsthese$_d$. Und hierzu muß mitnichten deutlich gemacht werden, daß die anti-platonistische These *in demselben Maße* global ist wie die Gebrauchsthese$_d$. Vielmehr genügt es, die naheliegende Vermutung in erheblichen Zweifel zu ziehen, die anti-platonistische These sei lokal. Denn wenn die Lokalität der anti-platonistischen These stark bezweifelt werden muß, ist nicht zu sehen, welchen Vorzug sie hinsichtlich des Problems einer Fundierung des Intuitionismus gegenüber der Gebrauchsthese$_d$ besitzen sollte; im Gegenteil, dann erscheint die Gebrauchsthese$_d$ in dieser Hinsicht sogar vorteilhafter, und zwar insofern, als ihre Allgemeinheit vermuten läßt: Den von einer etwaigen bedeutungstheoretischen Fundierung des Intuitionismus erzwungenen Revisionen unserer Schlußpraktiken auch im Rahmen von der Welt handelder Theorien, ihren kontraintuitiven Konsequenzen etwa physikalische Wahrheit betreffend würde nichts Willkürliches oder auch nur willkürlich Anmutendes anhaften.

4.2 Der Mangel an Alternativ-Ansätzen zur Fundierung des nur lokal revisionistischen Intuitionismus

Als Fazit der bisherigen Diskussion ist festzuhalten: Dem ersten Anschein zum Trotz ist die Lokalität der anti-platonistischen stark anzuzweifeln, so daß das Projekt einer anti-platonistischen Fundierung des Intuitionismus keineswegs als aussichtsreicher einzustufen ist als das einer bedeutungstheoretischen; ganz im Gegenteil.

Das Ziel dieses Kapitels wäre somit erreicht. Ist damit aber – wie von seiner Überschrift nahegelegt – die Vorstellung einer Fundierung des Intuitionismus, die sich insbesondere zu physikalischer Wahrheit neutral verhält, als höchst fragwürdig entlarvt? Dies wird man womöglich aufgrund folgender Überlegung verneinen:

In der Tat macht die Argumentation in 4.1.2 deutlich: Ein Intuitionist, der den aw/ef-Schluß bezüglich SK zuläßt, gerät in die Bredouille, wenn er seine Billigung des Schlusses damit begründet, daß sich die SK-Sätze ausschließlich auf Dinge in der Welt beziehen. Bei genauerer Betrachtung des anti-platonistischen Arguments zeigt sich jedoch, daß es nur seinem Namen und dem ersten Anschein nach auf der anti-platonistischen These beruht; daß der Unterschied zwischen den SK- und den GV-Sätzen, auf den es eigentlich abzielt, gar kein *ontologischer* ist, sondern vielmehr der: Die SK-Sätze handeln nicht bloß in dem Sinne von der Welt, daß sie sich ausschließlich auf Dinge in dieser beziehen, sondern in dem stärkeren und einzig angemessenen Sinne, daß sie etwas über die Welt *aussagen*; daß sie genuine *Informationen* über selbige wiedergeben (seien es nun wahre oder falsche). Das heißt, die SK-Sätze werden jeweils von der Welt wahr oder falsch gemacht. Hingegen werden die GV-Sätze jeweils von uns wahr oder falsch gemacht. Und letzteres liegt daran, daß die GV-Sätze allesamt *analytisch* sind; ihre Wahrheitswerte sind allein durch ihre Bedeutungen bestimmt, die ihnen natürlich nicht die Welt, sondern wir beigegeben haben.

Dies trifft auch auf die SK′- sowie die GV*-Sätze zu – wogegen ja keineswegs spricht, daß sie ausschließlich auf Dinge in der Welt Bezug nehmen. Somit kann ein Intuitionist sehr wohl wohlbegründet zum einen den aw/ef-Schluß bezüglich SK zulassen und ihn bezüglich GV, GV* sowie SK′ ablehnen.

Eine mögliche Entgegnung ist die: Zumindest das Argument in 4.1.2.1 läßt sich so modifizieren, daß es einem Intuitionisten, der den aw/ef-Schluß bezüglich SK zuläßt und dies damit begründet, daß im Gegensatz zu den SK-Sätzen die GV-Sätze analytisch seien, eine ebenso große Bringschuld aufbürdet wie dem ap-Intuitionisten. Wie man sich leicht klarmacht, wäre das Argument nämlich durchaus z.B. auch unter der Definition $\mathrm{sk}'(n) = \begin{cases} \ulcorner(\text{Sandkuchen ist eßbar} \vee \mathrm{sk}(n))\urcorner & \text{falls} : \mathrm{gv}(2n) \text{ ist wahr} \\ \ulcorner(\text{Sand ist eßbar} \wedge \mathrm{sk}(n))\urcorner & \text{sonst} \end{cases}$ durchgegangen. Und $\ulcorner(\text{Sandkuchen ist eßbar} \vee \mathrm{sk}(n))\urcorner$ und $\ulcorner(\text{Sand ist eßbar} \wedge \mathrm{sk}(n))\urcorner$ sind, wie auch immer man die analytisch/synthetisch-Unterscheidung präzisieren mag, gewiß als synthetisch einzustufen.

Die grundsätzlichere Replik ist jedoch die: Die **Analytizitätsthese**, daß arithmetische Sätze analytisch sind, genießt womöglich den Vorzug der Lokalität. Diesem möglichen Vorzug steht jedoch das tatsächliche Manko gegenüber, jedweder Prima-facie-Plausibilität zu entbehren. Eine von der Analytizitätsthese ausgehende Fundierung des Intuitionismus wäre also nur auf der Grundlage einer befriedigenden Präzisierung der analytisch/synthetisch-Unterscheidung möglich, die die keineswegs intuitiv einleuchtende Einstufung arithmetischer Sätze als analytisch sanktionieren würde. Doch, auch wenn die analytisch/synthetisch-Unterscheidung nicht unbedingt als durch W. V. O. Quines Fundalmental-Kritik an ihr in *Two Dogmas of Empiricism* desavouiert zu erachten ist, darf das Projekt einer solchen Präzisierung mit Fug und Recht als wenig aussichtsreich gewertet werden.

Die Analytizitätsthese ist – wenn auch aus anderen Gründen – ebensowenig wie die anti-platonistische These eine vielversprechende Anwärterin auf die Rolle des Ausgangspunkts einer Fundierung des Intuitionismus mit dem Vorzug der Lokalität. Und da schlechterdings keine andere Anwärterin mit diesem Vorzug in Sicht ist, können wir zu guter letzt doch festhalten: Es ist stark zu bezweifeln, daß eine solide Begründung der intuitionistischen Analyse zu entwickeln wäre, die sich in bezug auf den Bereich der physikalischen Aussagen und die meisten anderen Bereiche nicht-mathematischer Aussagen wahrheitsneutral verhielte.