Teil II

Der Kritikteil mit Blick auf die Mathematik

Kapitel 3

Die intuitionistische Analyse mathematischer Wahrheit

Bekanntlich sind die Intuitionisten (siehe D/K 7) mathematische Anti-Realisten; sie lehnen die mathematisch-realistische Grundintuition ab. Positiv formuliert und genauer: Nach Ansicht der Intuitionisten, insbesondere Dummetts, ist mathematische Wahrheit mit *prinzipieller konstruktiver Beweisbarkeit* gleichzusetzen.

Ziel dieses dritten Kapitels ist eine Erläuterung dieser Gleichsetzung bzw. der **intuitionistischen Analyse** mathematischer Wahrheit in Form (1) einer einigermaßen systematischen Charakterisierung von (kanonischen) konstruktiven Beweisen im Sinne der Intuitionisten – kurz: von **i-Beweisen** – anhand arithmetischer Sätze in Verbindung mit (2) einer eingermaßen engen Eingrenzung des Sinnes, in welchem »prinzipiell« im Rahmen der Analyse zu verstehen ist – des Sinnes von »prinzipiell«, übrigens, der auch dem bedeutungstheoretischen Argument zugrunde liegt, insbesondere seiner global-anti-realistischen Konklusion (siehe 3.3.1).

3.1 Intuitionistische Beweise arithmetischer Sätze

Vorbemerkung: Der in diesem Teil mit Blick auf die Mathematik erfolgenden Argumentation gegen die Gebrauchsthese$_d$ wird man (von einigen Details abgesehen) auch ohne Lektüre dieses Abschnitts folgen können; die in den drei folgenden Unterabschnitten entwickelte i-Beweis-Charakterisierung gebe ich lediglich der Vollständigkeit halber. Leser, die bereits über ein nicht allzu vages Verständnis des i-Beweisbegriffs verfügen oder denen ein solches Verständnis, für sich genommen, nicht der Mühe wert erscheint, die das Durcharbeiten einiger Seiten recht formalen

Texts bereitet, können diesen Abschnitt also getrost überspringen. Sie müssen nur beachten bzw. sich merken (siehe D/K 8-11): (1) Die „$\mathcal{A}$-Sätze“ sind bestimmte formale arithmetische $\mathcal{D}$-Sätze (die in ihrer Gesamtheit hinreichen, um jede Aussage der Arithmetik [erster Stufe] auszudrücken); (2) eine „$\ulcorner(\overline{m}+\overline{l}) = \overline{n}\urcorner$-Rechnung“ ist eine Rechnung dafür, daß gilt: $m + l = n$, deren einzelne Schritte durch so elementare, allseits anerkannte Rechenprinzipien wie die unten (3.1.2) angegebenen [eR1]-[eR3] sanktioniert sind; entsprechend verhält es sich für eine $\ulcorner(\overline{m} \cdot \overline{l}) = \overline{n}\urcorner$-Rechnung; (3) eine „$\ulcorner(\overline{m}+\overline{l}) = \overline{n}\urcorner$-Widerlegung“ ist eine Rechnung, deren einzelne Schritte ebenfalls durch [eR1]-[eR3] oder sonstige ebenso elementare Rechenprinzipien sanktioniert sind und die (indirekt) zeigt: $m + l \neq n$; entsprechend verhält es sich für eine $\ulcorner(\overline{m} \cdot \overline{l}) = \overline{n}\urcorner$-Widerlegung; (4) die „intuitionistischen Erklärungen der logischen Konstanten“ [iB1]-[iB7] sind lediglich als unvollkommene Prototypen von den i-Beweisbegriff sauber definierenden rekursiven Klauseln anzusehen – Klauseln, die trotz größter Anstrengungen seitens zahlreicher gescheiter Köpfe bisher noch nicht vorgelegt werden konnten; und (5) eine „$\mathcal{A}$-Formel $\varphi = \varphi(\mathrm{v}_0)$“ ist (im Normalfall) ein einstelliges arithmetisches Prädikat, dessen Subjektstelle von der Variablen $\mathrm{v}_0 = \gg x \ll$ besetzt ist, so daß $\ulcorner \forall x\, \varphi \urcorner$ und $\varphi(n)$ $\mathcal{D}$-Sätze darstellen, die allen natürlichen Zahlen bzw. allein n die φ entsprechende arithmetische Eigenschaft zuschreiben.

3.1.1 Eine Musterklasse arithmetischer Sätze

Als Musterklasse arithmetischer Sätze soll in der angestrebten i-Beweis-Charakterisierung die Menge der $\mathcal{A}$-Sätze fungieren; das sind die (vollständig geklammerten) $\mathcal{D}$-Sätze unter den Elementen der Menge $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, bei der es sich um die Menge der Zeichenketten (auch ein einzelnes Zeichen gelte als solche) handele, die sich aus (wenigstens einem der) folgenden Zeichen zusammensetzen (siehe D/K 8 und 9):

- $\gg\neg\ll$, $\gg\wedge\ll$, $\gg\vee\ll$, $\gg\rightarrow\ll$;
- $\gg\forall\ll$, $\gg\exists\ll$;
- $\gg=\ll$;
- $\gg 0 \ll$, $\gg x \ll$;
- $\gg^{+}\ll$, $\gg+\ll$, $\gg\cdot\ll$;
- $\gg(\ll$, $\gg)\ll$, $\gg'\ll$.

Hier ist zu beachten:[1]

(a) Die $\mathcal{A}$-Variablen, also die als natürliche Zahlvariablen fungierenden Elemente von $\mathcal{A}$ sind $\mathbf{v_0} = \gg x \ll$, $\mathbf{v_1} = \gg x' \ll$, $\mathbf{v_2} = \gg x'' \ll$ u.s.w.

(b) Die $\mathcal{A}$-Terme sind die Elemente der kleinsten Teilmenge Θ von $\mathcal{A}$ mit $\overline{0}, \mathrm{v}_n \in \Theta$ (siehe D/K 10 und 11) und der Eigenschaft, daß für alle $\theta, \vartheta \in \Theta$ gilt:

$$\ulcorner \theta^{+} \urcorner,\ \ulcorner (\theta + \vartheta) \urcorner,\ \ulcorner (\theta \cdot \vartheta) \urcorner \in \Theta.$$

(c) Die $\mathcal{A}$-Formeln sind die Elemente der kleinsten Teilmenge Φ von $\mathcal{A}$ mit der Eigenschaft, daß für alle $\mathcal{A}$-Terme θ, ϑ und alle $\varphi, \phi \in \Phi$ gilt:

– $\ulcorner \theta = \vartheta \urcorner \in \Phi$;

– $\ulcorner \neg\, \varphi \urcorner,\ \ulcorner (\varphi \wedge \phi) \urcorner,\ \ulcorner (\varphi \vee \phi) \urcorner,\ \ulcorner (\varphi \rightarrow \phi) \urcorner \in \Phi$;

– $\ulcorner \forall \mathrm{v}_n\, \varphi \urcorner,\ \ulcorner \exists \mathrm{v}_n\, \varphi \urcorner \in \Phi$.

(d) Und die $\mathcal{A}$-Sätze sind diejenigen $\mathcal{A}$-Formeln, in denen keine Variable frei vorkommt.

3.1.2 Die intuitionistischen Erklärungen der logischen Konstanten

Den Kern der i-Beweis-Charakterisierung bilden die sogenannten intuitionistischen Erklärungen der logischen Konstanten à la Heyting in Form der sich an folgende Definitionen anschließenden Klauseln [iB1]-[iB7] – die, wie man sich leicht klarmacht und betont sei, in Einklang mit der Forderung stehen, daß wir bei (konkreter) Angabe eines i-Beweises eines $\mathcal{A}$-Satzes jenen (prinzipiell) eben als i-Beweis des Satzes sollten erkennen können:

(a) Bezeichnen wir eine (arithmetische) Rechnung genau dann als **elementar**, wenn ihre einzelnen Schritte jeweils durch eines der folgenden Rechenprinzipien sanktioniert werden; oder durch ein ähnlich grundlegendes wie etwa dem der Ersetzbarkeit eines (referierenden) Terms an jeder Stelle einer ihn enthaltenden Gleichung durch einen bereits als mit ihm bezugsgleich ausgewiesenen anderen Term:

[1]Siehe für saubere Definitionen der Begriffe >Variable<, >Term<, >Formel< und >Satz< bzw. >Formel ohne frei vorkommende Variable< in bezug ganz allgemein auf formale oder formalisierte Sprachen erster Stufe z.B. Ebbinghaus, Flum, Thomas: *Einführung in die mathematische Logik*, Kap. 2.

[eR1] (1) $n = m \quad \Leftrightarrow \quad n^+ = m^+$;
(2) $n^+ = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0^+ = 0$;[2]

[eR2] (1) $(n + 0) = n$;
(2) $(n + m^+) = (n + m)^+$;

[eR3] (1) $(n \cdot 0) = 0$;
(2) $(n \cdot m^+) = ((n \cdot m) + n)$.

(b) Für variablenfreie $\mathcal{A}$-Terme θ, ϑ wollen wir unter einer **$\ulcorner\boldsymbol{\theta = \vartheta}\urcorner$-Rechnung** eine elementare Rechnung mit ebendieser Gleichung an ihrem Ende verstehen; ferner unter einer **$\ulcorner\boldsymbol{\theta = \vartheta}\urcorner$-Widerlegung** eine Rechnung, aus deren Anfügen an das Ende einer $\ulcorner\theta = \vartheta\urcorner$-Rechnung eine $\ulcorner\overline{1} = 0\urcorner$-Rechnung resultieren würde.

(c) Sei für eine $\mathcal{A}$-Formel φ mit maximal einer frei in ihr vorkommenden Variable **$\boldsymbol{\varphi(n)}$** derjenige $\mathcal{A}$-Satz, den man erhält, indem man in φ die in der Formel frei vorkommende Variable, falls vorhanden, an den Stellen durch $\overline{n}$ ersetzt, an denen sie frei vorkommt.

Zur Veranschaulichung: Für $\varphi = \ulcorner\exists x'\,(x' \cdot 0) = x\urcorner$ handelt es sich somit bei $\varphi(2)$ um den Satz $\ulcorner\exists x'\,(x' \cdot 0) = 0^{++}\urcorner$. (Hingegen ist für $\sigma = \ulcorner\forall x\,\exists x'\,(x' \cdot 0) = x\urcorner$ $\sigma(2)$ nichts anderes als σ selbst, da diese Formel ja einen Satz darstellt bzw. in ihr keine Variable frei vorkommt.)

Für variablenfreie $\mathcal{A}$-Terme θ, ϑ, $\mathcal{A}$-Sätze σ, ς und eine $\mathcal{A}$-Formel φ, in der, wenn überhaupt, einzig v_n frei vorkommt – kurz: und eine $\mathcal{A}$-Formel $\boldsymbol{\varphi = \varphi(\mathrm{v}_n)}$ – gilt:[3]

[iB1] Ein i-Beweis von $\ulcorner\theta = \vartheta\urcorner$ ist schlicht eine $\ulcorner\theta = \vartheta\urcorner$-Rechnung;

[iB2] ein i-Beweis von $\ulcorner(\sigma \wedge \varsigma)\urcorner$ setzt sich aus einem i-Beweis von σ und einem i-Beweis von ς zusammen;

[iB3] als i-Beweis von $\ulcorner(\sigma \vee \varsigma)\urcorner$ zählt allein ein i-Beweis von σ oder ein i-Beweis von ς;

[iB4] ein i-Beweis von $\ulcorner(\sigma \rightarrow \varsigma)\urcorner$ ist ein Verfahren zur Umwandlung von i-Beweisen in ebensolche – kurz: ein **iB/iB-Verfahren** –, welches wir als eines erkennen können, das auf einen beliebigen i-Beweis von σ angewandt einen i-Beweis von ς liefern würde;

[iB5] ein i-Beweis von $\ulcorner\neg\,\sigma\urcorner$ ist nichts anderes als ein i-Beweis von

[2] Dieses Prinzip kann als Variante des Axioms gewertet werden, daß 0 (als natürliche Zahl betrachtet) keine Vorgängerin hat.

[3] Vgl. *Elements of Intuitionism*, S. 12 f.

$\ulcorner(\sigma \to \overline{1} = 0)\urcorner$;

[iB6] ein i-Beweis von $\ulcorner\forall \mathrm{v}_n\, \varphi\urcorner$ ist ein Verfahren zur Abbildung natürlicher Zahlen auf i-Beweise – kurz: ein **ℕ/iB-Verfahren** –, welches wir als eines erkennen können, das auf m angewandt einen i-Beweis von $\varphi(m)$ liefern würde;

[iB7] als i-Beweis von $\ulcorner\exists \mathrm{v}_n\, \varphi\urcorner$ zählt allein ein i-Beweis von $\varphi(0)$ oder ein i-Beweis von $\varphi(1)$ oder ein i-Beweis von $\varphi(2)$ u.s.w.

3.1.3 Beispiele

Kompletiert wird die i-Beweis-Charakterisierung durch einige Beispiele:

(a) Folgende Rechnung ist elementar und stellt somit einen i-Beweis der Gleichung $\ulcorner(\overline{2}\cdot\overline{2}) = \overline{4}\urcorner$ dar:

1. $(0^{++}\cdot 0^{++}) = ((0^{++}\cdot 0^{+}) + 0^{++})$
2. $(0^{++}\cdot 0^{++}) = (((0^{++}\cdot 0) + 0^{++}) + 0^{++})$
3. $(0^{++}\cdot 0^{++}) = ((0 + 0^{++}) + 0^{++})$
4. $(0^{++}\cdot 0^{++}) = ((0 + 0^{+})^{+} + 0^{++})$
5. $(0^{++}\cdot 0^{++}) = ((0 + 0)^{++} + 0^{++})$
6. $(0^{++}\cdot 0^{++}) = (0^{++} + 0^{++})$
7. $(0^{++}\cdot 0^{++}) = (0^{++} + 0^{+})^{+}$
8. $(0^{++}\cdot 0^{++}) = (0^{++} + 0)^{++}$
9. $(0^{++}\cdot 0^{++}) = 0^{++++}$.

(b) Folgende Rechnung **wid** ist eine $\ulcorner\overline{7} = (\overline{2}+\overline{2})\urcorner$-Widerlegung:

1. $0^{+++++++} = (0^{++} + 0^{+})^{+}$
2. $0^{++++++} = (0^{++} + 0^{+})$
3. $0^{++++++} = (0^{++} + 0)^{+}$
4. $0^{+++++} = (0^{++} + 0)$
5. $0^{+++++} = 0^{++}$
6. $0^{++++} = 0^{+}$
7. $0^{+++} = 0$
8. $0^{+} = 0$.

Ihr entspricht trivialerweise ein i-Beweis von $\ulcorner\neg\,\overline{7} = (\overline{2}+\overline{2})\urcorner$, nämlich das iB/iB-Verfahren, dessen Anwendung auf eine $\ulcorner\overline{7} = (\overline{2}+\overline{2})\urcorner$-Rechnung im Anfügen von wid an deren Ende und auf sonstige i-Beweise im unverändert Stehenlassen derselben bestünde.

(c)[4] Für einen i-Beweis b sei **kst(*b*)**[5] das iB/iB-Verfahren der schlichten Ersetzung eines beliebigen i-Beweises durch b.

[4] Vgl. hierzu und zu (d) *Elements of Intuitionism*, S. 15: „The explanation [iB4] of → must be understood *extensionally* in the sense that the so-called paradoxes of material implication hold for intuitionistic → also.“

[5] »kst« kurz für: konstant.

Liegt uns für $\mathcal{A}$-Sätze σ, ς ein i-Beweis b' von ς vor, so verfügen wir mit $\mathrm{kst}(b')$ über einen i-Beweis von $\ulcorner(\sigma \rightarrow \varsigma)\urcorner$. Somit ist das iB/iB-Verfahren der Ersetzung eines beliebigen i-Beweises b durch $\mathrm{kst}(b)$ ein i-Beweis von $\ulcorner(\varsigma \rightarrow (\sigma \rightarrow \varsigma))\urcorner$.

(d) Für zwei iB/iB-Verfahren v, v' sei $\boldsymbol{v \circ v'}$ die „Verkettung" von v mit v', d.i. das durch folgende Vorschift in bezug auf einen beliebigen i-Beweis bestimmte iB/iB-Verfahren: Wende zunächst v' auf den i-Beweis an, und wende anschließend v auf den daraus resultierenden i-Beweis an. Nehmen wir ferner – mit den Intuitionisten – an, daß sich für einen beliebigen $\mathcal{A}$-Satz ς (in systematischer Weise) ein i-Beweis $\mathbf{efq}(\boldsymbol{\varsigma})$[6] von $\ulcorner(\overline{1} = 0 \rightarrow \varsigma)\urcorner$ gewinnen läßt.

Liegt uns für einen weiteren $\mathcal{A}$-Satz σ ein i-Beweis b' von $\ulcorner\neg\sigma\urcorner$ vor, so verfügen wir mit $\mathrm{efq}(\varsigma) \circ b'$ über einen i-Beweis von $\ulcorner(\sigma \rightarrow \varsigma)\urcorner$.[7] Somit ist folgendes Verfahren ein i-Beweis von $\ulcorner(\neg\sigma \rightarrow (\sigma \rightarrow \varsigma))\urcorner$: Ersetzen eines beliebigen i-Beweises b durch $\mathrm{efq}(\varsigma) \circ b$ im Falle, daß es sich bei b um einen i-Beweis von $\ulcorner\neg\sigma\urcorner$ handelt; und ansonsten Stehenlassen von b.

(e) Das „uniforme"[8] $\mathbb{N}$/iB-Verfahren der Abbildung von n auf die $\ulcorner(\overline{n} + (\overline{1} + \overline{1})) = ((\overline{n} + \overline{1}) + \overline{1})\urcorner$-Rechnung, die durch Ersetzung von »x« durch $\overline{n}$ aus folgendem Rechnungsschema hervorgeht, ist ein i-Beweis von $\ulcorner\forall x\,(x + (\overline{1} + \overline{1})) = ((x + \overline{1}) + \overline{1})\urcorner$:

1. $(x + (0^+ + 0^+)) = (x + (0^+ + 0)^+)$
2. $(x + (0^+ + 0^+)) = (x + 0^{++})$
3. $(x + (0^+ + 0^+)) = (x + 0^+)^+$
4. $(x + (0^+ + 0^+)) = ((x + 0^+) + 0)^+$
5. $(x + (0^+ + 0^+)) = ((x + 0^+) + 0^+)$.

(f) Das durch folgende rekursive Regel bestimmte nicht-uniforme $\mathbb{N}$/iB-Verfahren ist ein i-Beweis von $\ulcorner\forall x\,(0 \cdot x) = 0\urcorner$: Ordne der 0 folgende triviale Rechnung $\mathbf{er_0}$ zu:

$$(0 \cdot 0) = 0;$$

und ordne $n+1$ die Rechnung $\mathbf{er}_{\boldsymbol{n+1}}$ zu, die man erhält, indem man die durch Ersetzung von »x« durch $\overline{n}$ aus folgendem Rechnungsschema hervorgehende Rechnung an das Ende der n zugeordneten Rechnung $\mathbf{er}_{\boldsymbol{n}}$ anfügt:

$$\begin{aligned}(0 \cdot x^+) &= ((0 \cdot x) + 0)\\ (0 \cdot x^+) &= (0 \cdot x)\\ (0 \cdot x^+) &= 0.\end{aligned}$$

[6] »efq« kurz für: ex falso quodlibet.

[7] Man beachte, daß b' ein iB/iB-Verfahren darstellt, (welches wir als eines erkennen können) das auf einen i-Beweis von σ angewandt eine $\ulcorner\overline{1} = 0\urcorner$-Rechnung liefern würde.

[8] Vgl. *Elements of Intuitionism*, S. 14.

Denn natürlich ist er_0 elementar. Und offenkundig ist er_{n+1} elementar, wenn dies auf er_n zutifft.

3.2 Der prinzipielle Möglichkeitsbegriff der intuitionistischen Analyse

Den Status strenger definitorischer Klauseln genießen [iB1]-[iB7] (und deren Pendants für mathematische Theorien neben der Arithmetik) ganz gewiß nicht. Sie setzen vielmehr nur einige Markierungspunkte, an denen sich eine befriedigende Definition des i-Beweisbegriffs zu orientieren hätte. Doch selbst von diesem Defizit abgesehen, lassen die Klauseln die Frage nach dem genauen Sinn des Begriffs der prinzipiellen Möglichkeit im Rahmen der intuitionistischen Analyse bzw. folgender Version derselben gänzlich unberührt: Ein mathematischer Satz ist genau dann wahr, wenn es für uns prinzipiell möglich wäre, einen i-Beweis des Satzes anzugeben.

Diese Frage will ich (nur im Ansatz) anhand der berühmten Goldbachschen Vermutung klären, daß jede gerade Zahl ≥ 4 Summe zweier (nicht unbedingt verschiedener) Primzahlen ist.

3.2.1 Die Bivalenz sämtlicher Spezialisierungen der Goldbachschen Vermutung aus Sicht auch der Intuitionisten

Sei $\mathbf{gv} = \mathrm{gv}(\mathrm{v}_0)$ eine $\mathcal{A}$-Formel, der die Eigenschaft entspricht, gleich 0, gleich 2, ungerade oder Summe zweier Primzahlen zu sein, so daß $\ulcorner\forall x\, \mathrm{gv}\urcorner$ die Goldbachsche Vermutung zum Ausdruck bringt (bzw. die, daß jede natürliche Zahl gleich 0, gleich 2, ungerade oder Summe zweier Primzahlen ist).

Bekanntlich darf den Intuitionisten zufolge nicht für jeden mathematischen Satz davon ausgegangen werden, daß er entweder wahr oder falsch ist – kurz: daß er **bivalent** ist –; insbesondere nicht für $\ulcorner\forall x\, \mathrm{gv}\urcorner$. Sie erachten aber sehr wohl jede Spezialisierung dieses Satzes als bivalent, also insbesondere jeden der Sätze in $\mathbf{GV} = \{\mathrm{gv}(4), \mathrm{gv}(6), \mathrm{gv}(8), \ldots\}$, und zwar aufgrund einer Überlegung wie der im Anschluß an folgende Definitionen:

(a) Sei für eine gerade Zahl $n \geq 4$ $\mathbf{GES}_{\boldsymbol{n}}$ die entsprechende **Goldbach-Entscheidungssituation**, daß für alle $m, l \in \{2, \ldots, n-2\}$ und alle $k, j \in \{2, \ldots, \frac{n}{2}\}$

entweder eine $\ulcorner(\overline{m}+\overline{l}) = \overline{n}\urcorner$-Rechnung oder -Widerlegung sowie entweder eine $\ulcorner(\overline{k}\cdot\overline{j}) = \overline{m}\urcorner$-Rechnung oder -Widerlegung vorliegt.

(b) Sei für solches n **GVB$_{n}$** die entsprechende **Goldbach-Verifikationsbedingung**, daß es $m, l \in \{2, \ldots, n-2\}$ gibt, so daß eine $\ulcorner(\overline{m}+\overline{l}) = \overline{n}\urcorner$-Rechnung sowie für alle $k, j \in \{2, \ldots, \frac{n}{2}\}$ eine $\ulcorner(\overline{k}\cdot\overline{j}) = \overline{m}\urcorner$- und eine $\ulcorner(\overline{k}\cdot\overline{j}) = \overline{l}\urcorner$-Widerlegung vorliegt.

(c) Sei für solches n **GFB$_{n}$** die entsprechende **Goldbach-Falsifikationsbedingung**, daß für alle $m, l \in \{2, \ldots, n-2\}$ eine $\ulcorner(\overline{m}+\overline{l}) = \overline{n}\urcorner$-Widerlegung vorliegt oder es $k, j \in \{2, \ldots, \frac{n}{2}\}$ gibt, so daß eine $\ulcorner(\overline{k}\cdot\overline{j}) = \overline{m}\urcorner$- oder eine $\ulcorner(\overline{k}\cdot\overline{j}) = \overline{l}\urcorner$-Rechnung vorliegt.

Zur Veranschaulichung: Lägen uns eine $\ulcorner(\overline{2}+\overline{2}) = \overline{4}\urcorner$-Rechnung sowie eine $\ulcorner(\overline{2}\cdot\overline{2}) = \overline{2}\urcorner$-Widerlegung vor, so befänden wir uns in GES$_4$. Und in dieser Situation wäre GVB$_4$ erfüllt.

Die Goldbach-Entscheidungssituationen, -Verifikationsbedingungen und -Falsifikationsbedingungen tragen ihre Bezeichnungen als ebensolche insofern völlig zurecht, als für gerades $n \geq 4$ gilt: (1) Sollte in der Situation GES$_n$ die Bedingung GVB$_n$ erfüllt sein, so ließe sich in, wenn nicht im einzelnen, so doch immerhin im groben klar vorgezeichneter Manier mit Rekurs auf die dann vorliegenden Rechnungen ein i-Beweis von gv(n) entwickeln; (2) sollte in der Situation hingegen GFB$_n$ erfüllt sein, so ließe sich in analoger Manier ein i-Beweis von $\ulcorner\neg\,$gv(n)$\urcorner$ entwickeln; und (3) in der Situation wäre genau eine der beiden Bedingungen erfüllt.

Nun können wir für eine auch noch so große gerade Zahl zumindest im Prinzip die entsprechende Goldbach-Entscheidungssituation herbeiführen. Somit sind die GV-Sätze allesamt bivalent.

3.2.2 Die Nicht-Attestierbarkeit der Bivalenz der Goldbachschen Vermutung aus Sicht der Intuitionisten

Die Intuitionisten vertreten also keinen radikalen Konstruktivismus *strikt-finitistischer* Art; trotz u.a. unserer beschränkten Lebenszeit und Rechengeschwindigkeit dürfen wir ihres Erachtens durchaus z.B. festhalten: gv($10^{10^{10}}$) ist bivalent, denn *prinzipiell* könnten wir die Goldbach-Entscheidungssituation GES$_{10^{10^{10}}}$ herbeiführen (und darauf aufbauend einen i-Beweis entweder von gv($10^{10^{10}}$) oder von $\ulcorner\neg\,$gv($10^{10^{10}}$)$\urcorner$ entwickeln). Dennoch dürfen wir, wie bereits bemerkt, nach ihrer

Ansicht nicht die Bivalenz von $\ulcorner\forall x\,\mathrm{gv}\urcorner$ unterstellen; insbesondere ist, so die Intuitionisten, folgende Überlegung à la Russell zurückzuweisen:

Prinzipiell könnten wir durchaus folgendes tun: zunächst binnen einer halben Sekunde GES_4 herbeiführen und überprüfen, ob GVB_4 oder vielmehr GFB_4 erfüllt ist; dann binnen einer viertel Sekunde GES_6 herbeiführen und überprüfen, ob GVB_6 oder vielmehr GFB_6 erfüllt ist; dann binnen einer achtel Sekunde GES_8 herbeiführen und überprüfen, ob GVB_8 oder vielmehr GFB_8 erfüllt ist; und anschließend entsprechend fortfahren. Das heißt, wegen $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n = 1$, wir könnten prinzipiell binnen einer Sekunde sämtliche Goldbach-Entscheidungssituationen herbeigeführt und entschieden haben, ob sämtliche GV-Sätze wahr sind oder ob einer von ihnen falsch ist. Somit ist $\ulcorner\forall x\,\mathrm{gv}\urcorner$ sehr wohl bivalent.

Hier ist zu beachten, daß auch aus intuitionistischer Sicht gilt:[9] $\ulcorner\forall x\,\mathrm{gv}\urcorner$ ist bivalent, wenn die GV-Sätze allesamt wahr sind oder wenigstens einer von ihnen falsch ist. Offenbar weisen die Intuitionisten dieses Argument zugunsten der Bivalenz von $\ulcorner\forall x\,\mathrm{gv}\urcorner$ somit deshalb zurück, weil ihm ihres Erachtens eine allzu liberale Vorstellung von unseren prinzipiellen rechnerischen Fähigkeiten zugrunde liegt.[10]

3.2.3 Eingrenzung des prinzipiellen Möglichkeitsbegriffs

Damit können wir zur gewünschten Eingrenzung des Sinnes kommen, in welchem der Begriff der prinzipiellen Möglichkeit im Rahmen der intuitionistischen Analyse zu verstehen ist.

Einerseits steht die Beschränktheit unserer Lebenszeit, Rechengeschwindigkeit, Ausdauer, Datenspeicherungsmöglichkeiten etc. aus intuitionistischer Sicht für keinen mathematischen Satz der Wahrheitsfähigkeit desselben entgegen; seine prinzipielle i-Beweisbarkeit ist ihres Erachtens gegeben, wenn wir ihn *bei hinreichender Erweiterung dieser Größen* i-beweisen könnten. Andererseits kann den Intuitionisten zufolge der Satz nicht aufgrund einer Überlegung als prinzipiell i-beweisbar gelten, in welcher von einer *unendlichen* oder *stetigen* Erweiterung der Größen ausgegangen wird. Die intuitionistische Analyse ist also grob wie folgt zu fassen: Ein mathematischer Satz ist genau dann wahr, wenn es bei *beliebiger, aber konstanter endlicher* Erweiterung unserer Lebenszeit, Rechengeschwindigkeit, Ausdauer, Da-

[9] Die Sätze $\mathrm{gv}(n)$ mit $n \in \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$ sind natürlich auch aus dieser Sicht trivialerweise wahr.

[10] Man beachte, daß auch im Rahmen der intuitionistischen Analysis gilt: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n = 1$.

tenspeicherungsmöglichkeiten etc. für uns möglich wäre, einen i-Beweis des Satzes anzugeben.

3.3 Nachträge

3.3.1 Präzisierung der Konklusion des bedeutungstheoretischen Arguments

Wie eingangs erwähnt, ist »prinzipiell« im Rahmen des bedeutungstheoretischen Arguments so zu verstehen wie im Rahmen der intuitionistischen Analyse. Das heißt, die Konklusion des Arguments läßt sich präziser, wenn auch immer noch sehr vage, wie folgt fassen: Ein $\mathcal{L}$-Satz ist genau dann wahr, wenn ihn die $\mathcal{L}$-Sprecher bei beliebiger, aber konstanter endlicher Erweiterung ihrer Lebenszeit, Ausdauer und sonstiger für das mögliche Erkennen des Wahrheitswertes des Satzes relevanter Größen als wahr erkennen könnten.

3.3.2 Das Folgen der W-Theoreme aus den semantischen Grundregeln aus Sicht auch der Intuitionisten

Wir dürfen annehmen, daß die die $\mathcal{A}$-Sätze betreffenden W-Theoreme der Semantik einer $\mathcal{D}$-Bedeutungstheorie$_d$ in ihren $\mathcal{D}$-Fassungen von der trivialen Form wären. Das heißt, wir dürfen annehmen, daß für jeden $\mathcal{A}$-Satz σ aus der Semantik die in folgendem Bikonditional zum Ausdruck kommende Äquivalenz folgen würde (siehe D/K 12):

$$\ulcorner \widehat{\sigma} \text{ ist wahr} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma \urcorner .$$

In Hinblick auf die Frage insbesondere nach der Vereinbarkeit einer $\mathcal{D}$-Bedeutungstheorie$_d$ mit der intuitionistischen Analyse, bezogen auf die $\mathcal{A}$-Sätze, ist zu betonen: Die hierbei einschlägigen Schlußregeln sind auch aus intuitionistischer Sicht völlig akzeptabel.[11]

Daß die Theorie in dieser „technischen" Hinsicht mit der intuitionistischen Analyse vereinbar wäre heißt freilich nicht, daß es sich so in jeder Hinsicht verhielte; ich will in diesem zweiten Teil ja gerade zeigen, daß die Theorie eine strikt-finitistische Konzeption mathematischer Wahrheit bedingen würde und somit ebensowenig mit der intuitionistischen Analyse vereinbar wäre wie mit der mathematisch-realistischen Grundintuition.

[11] Siehe z.B. Tennant: *Anti-Realism and Logic*, S. 71 ff.; und siehe zuvor, für eine Auflistung der intuitionistisch-prädikatenlogischen Grundregeln, *Elements of Intuitionism*, S. 123.

3.3.3 Einige auch von den Intuitionisten akzeptierte Intuitionen arithmetische Wahrheit betreffend

Neben den die $\mathcal{A}$-Sätze betreffenden W-Theoremen der Semantik einer hypothetischen $\mathcal{D}$-Bedeutungstheorie$_d$ unterschreiben die Intuitionisten z.B. auch folgende grundlegenden Wahrheitsintuitionen in bezug auf die $\mathcal{A}$-Sätze: Für $\mathcal{A}$-Sätze σ, ς und eine $\mathcal{A}$-Formel $\varphi = \varphi(\mathrm{v}_n)$ gilt:

[WI1] $\ulcorner\neg\,\sigma\urcorner$ ist wahr $\Leftrightarrow$ σ ist falsch;

[WI2] $\ulcorner(\sigma \wedge \varsigma)\urcorner$ ist wahr $\Leftrightarrow$ σ und ς sind wahr;

[WI3] $\ulcorner(\sigma \vee \varsigma)\urcorner$ ist wahr $\Leftrightarrow$ σ oder ς ist wahr;

[WI4] $\ulcorner(\sigma \rightarrow \varsigma)\urcorner$ ist wahr $\Leftrightarrow$ Wenn σ wahr ist, dann ist auch ς wahr;

[WI5] $\ulcorner\forall\mathrm{v}_n\,\varphi\urcorner$ ist wahr $\Leftrightarrow$ Die Sätze $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2)$ etc. sind allesamt wahr;

[WI6] $\ulcorner\exists\mathrm{v}_n\,\varphi\urcorner$ ist wahr $\Leftrightarrow$ Wenigstens einer der Sätze $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2)$ etc. ist wahr.

3.3.4 Der Agnostizismus der Intuitionisten hinsichtlich des Bivalenz-Prinzips

Daß die Intuitionisten das Bivalenz-Prinzip allein schon mit Blick auf die Arithmetik bzw. die $\mathcal{A}$-Sätze nicht akzeptieren, daß sie es für verfehlt halten, für jeden $\mathcal{A}$-Satz von dessen Bivalenz auszugehen, heißt wirklich nur das. Die Intuitionisten sind *Agnostiker* bezüglich des Bivalenz-Prinzips; in nüchternem Zustand würden sie sich keinesfalls zur Behauptung hinreißen lassen, insbesondere die $\mathcal{A}$-Sätze seien nicht allesamt bivalent; geschweige denn[12] zu der, es gäbe nicht-bivalente $\mathcal{A}$-Sätze. Denn wie sich leicht (wenn auch nur mit einigem Aufwand) zeigen läßt, ist für einen klassisch-*aussagen*logisch wahren $\mathcal{A}$-Satz σ dessen doppelte Negation $\ulcorner\neg\neg\,\sigma\urcorner$ i-beweisbar.[13] Das heißt insbesondere, für einen beliebigen $\mathcal{A}$-Satz ς ist $\ulcorner\neg\neg\,(\varsigma \vee \neg\,\varsigma)\urcorner$ i-beweisbar. Und gemäß [WI1] und [WI3] hat dieser Satz denselben Wahrheitswert wie $\ulcorner$Es gilt nicht, daß $\widehat{\varsigma}$ nicht bivalent ist$\urcorner$ – sein metasprachliches Pendant.

[12]Nach Ansicht der Intuitionisten darf i.a. für eine Menge M und eine Eigenschaft E – etwa die Menge der $\mathcal{A}$-Sätze und die Eigenschaft, bivalent zu sein – davon, daß E nicht von jedem Objekt in M aufgewiesen wird, *nicht* darauf geschlossen werden, daß es ein Objekt in M gibt, das E nicht aufweist; wohl aber umgekehrt.

[13]Siehe *Elements of Intuitionism*, S. 132.